Jahresbericht der Deutschen Mathematiker...

Deutsche Mathematiker-Ve...


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO
VE RI TAS

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



SIEBZEHNTER BAND. 17

MIT DEN BILDNISSEN VON ENNO JÜRGENS, HEINRICH MASCHKE UND ADOLF MAYER
SOWIE 8 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908.

Inhalt.

1. Abteilung.

I. Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Berichte, Vorträge und Abhandlungen.

III. Nekrologe.

IV. Sprechsaal für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

2. Abteilung.

I. Mitteilungen und Nachrichten.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

3. Hochschulnachrichten.

II. Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 1. HEFT. JANUAR.
MIT 2 TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 18. FEBRUAR 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Das nächste Heft wird Ende Februar ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrucke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

nach dem Stande vom 1. Januar 1908.

(Im Interesse eines genauen Mitglieder-Verzeichnisses wird gebeten, von jeder Änderung der Adresse dem Schriftführer, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe i. B., Westendstraße 57, oder der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, Mitteilung zu machen.)

Vorstand der D. M.-V. für das Jahr 1908.

Vorsitzender: Klein, F., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weberstr. 3.

Schriftführer: Krazer, A., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Westendstr. 57.

Schatzmeister: Ackermann-Teubner, A., Dr., *H.R.*, Mitinhaber der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.

Herausgeber der Jahresberichte: Gutzmer, A., Dr., Professor an der Universität, Halle a. S., Wettinerstr. 17.

Brill, A. v., Dr., Professor an der Universität, Tübingen, Eugenstr. 3.

Krause, M., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden-A., Friedrich Wilhelmstr. 82.

Schoenflies, A., Dr., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Haarbrückerstr. 12.

Study, E., Dr., Professor an der Universität, Bonn, Göbenstr. 28.

Jahr des Eintritts

1893. Abbe, C., Professor am U. S. Weather Bureau, Washington, D. C. (*U. S. A.*).

1899. Abraham, M., Dr., Professor an der Universität, Berlin W., Sigismundstr. 1.

1894. Ackermann-Teubner, A., Dr., *H.R.*, Mitinhaber der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.

1893. Adami, F., Gymnasialprofessor, Hof.

1902. d'Adhémar, Vicomte, R., Dr., Professor an der Faculté libre des sciences, Lille (*Frankreich*), Place de Genevières 14.

1901. Adler, A., Dr., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Wien (*Österreich*).

1898. Ahrens, W., Dr., Lehrer an der Maschinenbauschule, Magdeburg, Königgrätzertr. 7.

1900. Albeggiani, M., Professor am R. Istituto Tecnico, Palermo (*Italien*), Salita Banditore 4.

1899. Aley, R. J., Professor a. d. Universität, Bloomington, Ind. (*U.S.A.*), Forest Place 203.

10. 1897. Ambronn, L., Dr., Professor an der Universität, Göttingen, Sternwarte.

1902. Amodeo, F., Dr., Professor an der Universität und am R. Istituto Tecnico, Neapel (*Italien*), Via S. Gennaro ad Attignano 16.

Jahr des Eintritts

1893. **Amthor**, A., Dr., Mathematiker der Deutschen Militärdienst- und Lebensversicherungsanstalt, Hannover, Königstr. 39.

1891. **Archenhold**, F. S., Dr., Direktor der Treptow-Sternwarte bei Berlin.

1904. Aversum für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

1891. **Bacharach**, J., Dr., Prof. a. d. Industrieschule, Nürnberg, Schlüsselfelderstr. 4.

1899. **Bachmann**, P., Dr., Professor, Weimar, Carl Alexander-Allee 2.

1904. **Backhaus**, Th., Oberlehrer an der Maschinenbau- und Hüttenschule, Duisburg, Oststr. 69.

1897. **Bäcklund**, V., Dr., Professor an der Universität, Lund (*Schweden*).

1897. **Baker**, H. F., University Lecturer, Cambridge (*England*), Belvoir Terrace 4.

20. 1900. **Balser**, L., Professor a. d. Oberrealschule, Darmstadt, Herderstr. 10.

1899. **Barthels**, L., Dr., Professor, Aschaffenburg, Weißenburgerstr. 52.

1904. **Bartlett**, D., Professor am Institute of Technology, Boston, Mass. (*U. S. A.*)

1904. **Bates**, W. H., Instruktor an der Purdue Universität, La Fayette, Ind. (*U. S. A.*)

1900. **Bauch**, F., Reallehrer, Hamburg, Höltystr. 10.

1893. **Bauschinger**, J., Dr., Professor a. d. Universität, Berlin SW. 68, Lindenstr. 91.

1891. **Beck**, A., Dr., *St.R.*, Professor, Zürich I (*Schweiz*), Schanzenberg 7.

1907. **Beck**, H., Dr., Oberlehrer, Hannover, Engelsbosteler Damm 41—42.

1902. **Becker**, E., Dr., Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, Straßburg i. E.

1897. **Beke**, M., Dr., Professor a. d. Universität, Budapest II (*Ungarn*), Bimbó utcza 26.

30. 1902. **Bellermann**, G., Dr., Professor am Königstädtischen Realgymnasium, Berlin N.O., Belforterstr. 4.

1897. **Beman**, W. W., Professor an der Universität, Ann Arbor, Mich. (*U. S. A.*), East Kingsley Street 813.

1906. **Berkhan**, G., Dr., Kand. d. höh. Schulamts, Hamburg 21, Arndtstr. 21.

1899. **Bernstein**, F., Dr., Professor an der Universität Göttingen, Herzberger Chaussee 9.

1902. **Berry**, A., King's College, Cambridge (*England*).

1902. **Beyel**, Ch., Dr., Dozent am Polytechnikum, Zürich (*Schweiz*), Leonhardstr. 1.

1905. Bibliothek der Technischen Hochschule, Aachen.

1904. Bibliothek der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn (*Österreich*).

1899. Bibliothek, allgemeine, der Technischen Hochschule, Darmstadt.

1899. Bibliothek der Technischen Hochschule, Karlsruhe.

40. 1897. Bibliothek der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg (*Rußland*).

1902. Bibliothek des eidgenössischen Polytechnikums, Zürich (*Schweiz*).

1901. Bibliothèque mathématique de l'Université, Genf (*Schweiz*).

1896. **Biermann**, O., Dr., Professor a. d. Deutschen Techn. Hochsch., Brünn (*Österreich*), Thalgasse 4a.

1891. **Binder**, W., Dr., Professor, Wien XVI (*Österreich*), Thaliastr. 137.

1894. **Blaschke**, E., Dr., *R.R.*, Professor, Wien IX (*Österreich*), Michelbeuerngasse 41.

1903. **Bleicher**, H., Dr., Professor, Stadtrat, Frankfurt a/M., Mauerweg 18.

1902. **Bliss**, G., Professor an der Universität, Princeton N. J. (*U. S. A.*).

1897. **Blümke**, A., Dr., Gymnasialprofessor, München, Barerstr. 49.

1900. **Blumenthal**, O., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Rütscherstr. 37.

50. 1900. **Bôcher**, M, Dr., Professor an der Harvard Universität, Cambridge, Mass. (*U. S. A.*), Buckingham Street 48.

1893. **Bock**, A., Dr., Professor, Regensburg, Sternbergstr. 30.

1891. **Böger** R., Professor am Johanneum Hamburg, Hohe Weide 6

Jahr des Eintritts

1899. **Böhm**, K., Dr., Professor an der Universität, Heidelberg, Karl Ludwigstr. 2.

1897. **Börsch**, A., Dr., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam, Saarmunderstr. 15.

1897. **Böttcher**, E., Dr., Oberstudienrat, Professor, Rektor d. Realgymnas., Leipzig, Zeitzerstr. 10.

1895. **Bohlmann**, G., Dr., Professor, Mathematiker der New York Life Insurance Company, Wilmersdorf-Berlin, Naussauische Str. 16a.

1901. **Bolke**, G., Dr., Lehrer am Realgymnasium, Charlottenburg.

1892. **Bolza**, O., Dr., Professor an der Universität, Chicago Ill. (*U. S. A.*), Woodlawn avenue 5810.

1901. **Bouton**, Ch. L., Dr., Professor an der Harvard Universität, Cambridge, Mass. (*U. S. A.*), Craigie Hall 503.

60\. 1891. **Braunmühl**, A. v., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, München, Blütenstr. 17.

1897. **Brendel**, M., Dr., Professor an der Handelsakademie, Frankfurt a. M., Grüneburgweg 34.

1906. **Brenke**, W. C., Instruktor an der Harvard Universität, Cambridge, Mass. (*U. S. A.*), Eustis Str. 35.

1897. **Bretschneider**, W., Dr., Professor an der Friedrich-Eugen-Realschule Dozent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Militärstr. 26.

1891. **Brill**, A. v., Dr., Professor an der Universität, Tübingen, Eugenstr. 3.

1897. **Brix**, W., Dr., *R.R.*, Berlin-Steglitz, Hohenzollernstr. 1.

1906. **Broggi**, U., Rom (*Italien*), Via Nomentana 209.

1902. **Bromwich**, Th., Professor am Queen's College, Galway, (*Irland*).

1907. **Broszat**, W., Dr., Kand. d. höh. Lehramts, Stettin, Birkenallee 22b.

1893. **Brückner**, M., Dr., Professor am Gymnasium, Bautzen, Bismarckstr. 13.

70\. 1891. **Brunn**, H., Dr., Professor an der Universität, Bibliothekar an der Technischen Hochschule, München, Arcisstr. 32.

1891. **Bruns**, H., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, Leipzig, Stephanstr. 3.

1907. **Buchholz**, H., Dr., Professor an der Universität, Halle a. S., Gartenstr. 5.

1900. **Bullard**, W., Professor an der Universität, Syracuse, N. Y. (*U. S. A.*), South Crouse Avenue 613.

1902. **Bungers**, E., Dr., Gymnasialoberlehrer, Strehlen (Schlesien), Gr. Fischergasse 3/4.

1906. **Bunitzky**, E., Odessa (*Rußland*), Universität.

1899. **Burger**, R., Professor a. d. Oberrealschule, Freiburg i. B., Sternwaldstr. 43.

1891. **Burkhardt**, H., Dr., Professor an der Universität, Zürich V (*Schweiz*), Kreuzplatz 1.

1891. **Burmester**, L., Dr., Dr. Ing., Prof. an der Techn. Hochschule, München, Kaulbachstr. 83.

1904. **Burnside**, W., Professor am R. Naval College Greenwich, London (*England*), The Croft, Bromley Road, Catford.

80\. 1891. **Busche**, E., Dr., Professor an der Einsbüttler Oberrealschule, Hamburg, Alardusstr. 1.

1900. **Cajori**, F., Professor am Colorado College, Colorado Springs, Co. (*U. S. A.*), Wood Avenue 1119.

1891. **Cantor**, G., Dr., Professor an der Universität, Halle a. S., Händelstr. 13.

1891. **Cantor**, M., Dr., *G.H.R.*, Professor a. d. Univ., Heidelberg, Gaisbergstr. 15.

1903. **Carathéodory**, C., Dr., Professor an der Universität, Bonn.

1901. **Carda**, K., Dr., Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Prag, Smichow bei Prag (*Österreich*), Ferdinandskai 14.

Jahr des Eintritts

1897. Cardinaal, J., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Delft (*Holland*), Oude Delft 47.

1900. Certo, L., Professor am R. Liceo Terenzio Mamiani, Rom (*Italien*).

1900. Chaux, A. de la, Professor am Gymnasium, Stade, Harburgerstr. 121b.

1903. Compter, G., Dr., *H.R.*, Prof., Direktor der Realschule, Apolda, Dornburgerstr. 47.

90. 1905. Costanzi, G., Dr., Lehrer am Liceo M. T. Varrone, Rieti (*Italien*), Via Garibaldi 66.

1897. Cranz, C., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Militärtechnischen Akademie, Charlottenburg, Fasanenstr. 87.

1906. Crawley, E. S., Professor an der Universität, Philadelphia Pa. (*U. S. A.*).

1898. Crayen, W., Verlagsbuchhändler (G. J. Göschensche Verlagshandlung), Leipzig, Salomonstr. 10.

1892. Czuber, E., *H.R.*, Prof. a. d. Techn. Hochsch., Wien XIII (*Österreich*), Neuhofstr. 34.

1893. Dalwigk, F. v., Dr., Professor an der Universität, Marburg, Haspelstr. 26.

1905. Dannmeyer, F., Dr., Hamburg 19, Eppendorferweg 37.

1891. Dantscher v. Kollesberg, V., Dr., Professor an der Universität, Graz (*Österreich*), Rechbauerstr. 31.

1892. Dedekind, R., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Straße 87.

1900. Dehn, A., Oberlehrer am Realgymnasium, Schwerin i. M., Moltkeplatz 6.

100. 1900. Dehn, M., Dr., Professor an der Universität, Münster i. W., Nordstr.

1902. Deinzer, H., Reallehrer, Nürnberg, Schonhoverstr. 15.

1898. Denizot, A., Dr., Dozent an der Technischen Hochschule, Lemberg (*Österreich*).

1893. Dickstein, S., Professor, Warschau (*Rußland*), Marszalkowskastr. 117.

1903. Diestel, F., Dr., Bibliothekar a. d. Univ.-Bibl., Göttingen, Friedländerweg 17.

1891. Dingeldey, F., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Hoffmannstr. 41.

1903. Dingler, H., Dr., Assistent an der Technischen Hochschule, München, Arcisstr. 44.

1903. Dintzl, E., Dr., Gymnasialprofessor, Wien VIII, 1 (*Österreich*), Tulpengasse 6.

1901. Disteli, M., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden-A., Hübnerstr. 1b.

1891. Döhlemann, K., Dr., Professor an der Univers., München, Franz-Josef-Str. 33.

110. 1905. Dohmen, F. J., Dr., Austin, Texas (*U. S. A.*), Whitis Ave 1913.

1897 Doležal, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien (*Österreich*).

1898. Domsch, P., Dr., Professor an der Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Reichstr. 34.

1898. Dorotheenstädtisches Realgymnasium, Berlin NW., Georgenstr. 30—31.

1899. Drygalski, E. v., Dr., Professor an der Universität, München, Giselastr. 28.

1891. Dyck, W. v., Dr., *G.H.R.*, Professor a. d. Techn. Hochsch., München, Hildegardstr. 1½.

1907. Dygnas, R., stud. phil., Lemberg 2 (*Österreich*), Na Bloniegasse 4.

1891. Dziobek, O., Dr., Professor an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule, Dozent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Schillerstraße 19.

1891. Eberhard, V., Dr., Professor an der Universität, Halle a. S., Wilhelmstr. 7.

1899. Edalji, J., Professor am Gujarat College, Ahmedabad (*Brit. Indien*).

120. 1897. Ellemann, F., Lehrer am Landes-Seminar, Cöthen, Ringstr. 125.

1899. Eneström, G., Bibliothekar an der Königl. Bibliothek, Stockholm (*Schweden*), Grefturegatan 77.

Jahr des Eintritts

1891. Engel, F., Dr., Professor an der Universität, Greifswald, Arndtstr. 11.
1902. Epsteen, S., Dr., Professor an der Colorado Universität, Boulder Co. (*U. S. A.*)
1900. Epstein, P., Dr., Privatdozent an der Universität u. Oberlehrer an der Kaiserl. Technischen Schule, Straßburg i. E., Sternwartstr. 15.
1893. Escherich, G. v., Dr., *H.R.*, Professor a. d. Univers., Wien I (*Österreich*), Doblhoffgasse 7.
1905. Evang. Realschule I, Breslau.

1901. Faber, G., Dr., Privatdozent a. d. Technischen Hochschule, Karlsruhe, Tullastr. 78.
1892. Färber, C., Dr., Professor an der Luisenstädt. Oberrealschule, Berlin S. 53, Wilmsstr. 13.
1902. Fano, G., Dr., Professor an der Universität, Turin (*Italien*), Piazza Castello 18.
130. 1902. Fanta, E., Dr., Chefmathematiker der städtischen Versicherungsanstalt, Wien XIII, 2 (*Österreich*), Penzingerstr. 21.
1897. Fehr, H., Dr., Professor an der Universität, Genf (*Schweiz*), Route de Florissant 72.
1906. Fejér, L., Dr., Privatdozent an der Universität, Klausenburg (*Ungarn*).
1893. Fiedler, E., Dr., Rektor der Industrieschule, Zürich (*Schweiz*), Englisch Viertelstr. 57.
1897. Fiedler, W., Dr., Professor am Polytechnikum, Zürich V (*Schweiz*), Klosbachstr. 79.
1892. Finger, J., Dr., *H.R.*, Professor an der Techn. Hochschule, Wien IV (*Österreich*), Alleegasse 35.
1902. Finsterbusch, J., Professor am Gymnasium, Zwickau i. S., Äuß. Schneebergerstr. 26.
1891. Finsterwalder, S., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, München, Franz Josefstr. 6.
1903. Fischer, E., Dr., Privatdozent an der deutschen Techn. Hochschule, Brünn (*Österreich*).
1893. Fischer, K., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Solln b. München, Albrecht Dürerstr. 1.
140. 1897. Fischer, K., Dr., Mitarbeiter an der preuß. Landesanstalt f. Gewässerkunde, Friedenau bei Berlin, Beckerstr. 6a.
1901. Fischer, O., Dr., Professor an der Universität, Leipzig, Plagwitzerstr. 15.
1899. Fisher, G. E., Professor an der Universität, Philadelphia Pa (*U.S.A.*).
1896. Flatt, R., Dr., Rektor d. oberen Realschule u. Privatdozent an der Universität, Basel (*Schweiz*), Margarethenstr. 77.
1901. Fleischer, H., Dr., Königsberg i. Pr., Hintertragheim 49.
1897. Föppl, A., Dr., Professor an der Techn. Hochschule, München, Rambergstr. 2.
1903. Förster, E., Dr., Behördl. autor. Versicherungstechniker, Wien 18/1 (*Österreich*), Cottagestraße 44.
1907. Föthke, E., Dr., Königsberg i. Pr., Hökerstr. 21.
1891. Franz, J., Dr., Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, Breslau.
1897. Frege, G., Dr., *H.R.*, Professor an der Universität, Jena, Forstweg 29.
150. 1891. Fricke, R., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Straße 17.
1906. Friedrich Eugens-Realschule, Stuttgart.
1905. Friedrichs-Gymnasium, Kgl., Breslau.
1896. Friesendorff, Th., Professor am Elektrot. Institut, St. Petersburg (*Rußland*), Elektrot. Inst. Qu. 16.
1905. Frischauf, J., Dr., Professor an der Universität, Graz (*Österreich*), Burgring 12.

Jahr des Eintritts

1906. Frizell, A., Instruktor an der Harvard-Universität, z. Z. Göttingen, Hainholzweg 46.

1891. Frobenius, G., Dr., Professor a. d. Universität, Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 83.

1902. Fuchs, R., Dr., Oberlehrer am Gymnasium und Privatdozent an der Technischen Hochschule, Halensee bei Berlin, Ringbahnstr. 128.

1902. Fueter, R., Dr., Privatdozent an der Universität, Marburg, Bismarckstr. 32. z. Z. an der Bergakademie Clausthal; vom 1. 4. 1908 ab Professor an der Universität Basel (*Schweiz*), Kannenfeldstr. 11.

1902. Furtwängler, Ph., Dr., Professor an der Techn. Hochschule, Aachen, Theresienstr. 22.

160. 1900. Gale, A. S., Professor an der Universität, Rochester NY. (*U.S.A.*).

1897. Garcia de Galdeano y Yanguas Z., Dr., Professor an der Universität, Zaragoza (*Spanien*), Cóso 99.

1904. Garthe, E., Dr., Professor an der Realschule, Eschwege (Hess.-Nass.), Luisenstr. 10.

1900. Gauthier-Villars, A., Verlagsbuchhändler, Paris (*Frankreich*), Quai des Grands-Augustins 55.

1897. Geer, P. van, Regierungsrat, Haag (*Holland*), Hoogeweg 4.

1897. Gerbaldi, F., Dr., Professor an der Universität, Palermo, (*Italien*), Via XX settembre 66.

1901. Gernet, N. v., Frl. Dr., Frauen-Universität, St. Petersburg (*Rußland*), Wassiliew Ostrow, 10. Linie 33.

1903. Geys, A. F., wissenschaftlicher Lehrer an der Deutschen Schule, Porto (*Portugal*), Rua da Restauração 410.

1902. Gibson, G. A., Professor am Glasgow and West of Scotland technical College, Glasgow W. (*Schottland*), Sandyford Pl. 8.

1906. Giebel, K., Dr., Kand. d. höh. Schulamts, Zeitz.

170. 1903. Gigli, D., Dr., Lehrer am R. Liceo, Sassari, (*Italien*), Piazza d'Italia 6.

1905. Giorgi, G., Cons. Elektroingenieur, Professor an der Universität, Rom (*Italien*), Via Nazionale 114, Palazzo Capranica.

1901. Glage, F., Dr., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg 13, Sierichstr. 96.

1905. Gmeiner, J A., Dr., Professor an der Universität, Innsbruck (*Österreich*), Speckbacherstr. 18.

1902. Godefroy, M., Dr., Bibliothekar der Faculté des sciences, Marseille (*Frankreich*), Allée des Capucines 40.

1895. Godt, W., Dr., Professor am Katharineum, Lübeck, Geninerstr. 29.

1899. Görges, H., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden-Plauen, Bernhardstr. 96.

1892. Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen, Wöhlerstr. 8.

1900. Goettler, J., Reallehrer, München, Nordendstr. 22a.

1906. Goldzieher, K., Dr., Professor, Budapest VII (*Ungarn*), Halló utcza 4.

180. 1891. Gordan, P., Dr., *G. R.*, Professor an der Universität, Erlangen, Goethestr. 4.

1891. Graefe, F., Dr., Professor an der Techn. Hochschule, Darmstadt, Heinrichstraße 114.

1895. Graf, J. H., Dr., Professor an der Universität, Bern (*Schweiz*), Wylerstr. 10.

1899. Graham, W. P., Professor an der Universität, Syracuse, N. Y. (*U.S.A.*).

1891. Graßmann, H., Dr., Professor an der Universität, Gießen, Frankfurterstr. 53.

1893. Greenhill, A. G., Professor am Ordnance College Woolwich, London WC. (*England*), Staple Inn 1.

1901. Greiner, R., Dr., Davos-Platz (*Schweiz*), Villa Viola.

1906. Grober, M., Kand. des höh. Lehramts, Halle a. S., Albrechtstr. 45.

Jahr des Eintritts

1903. Großmann, M., Dr., Professor am Eidgen. Polytechnikum, Zürich V (*Schweiz*), Voltastr. 29.

1892. Grübler, M., *St.R.*, Professor an der Techn. Hochschule, Dresden-A. 27. Bernhardstr. 98.

190. 1902. Grünwald, A., Dr., Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Prag (*Österreich*), Dejwitz 226.

1900. Grünwald, J., Dr., Professor an der Universität, Prag (*Österreich*), Dejwitz 226.

1904. Gruhn, P., Lehrer am Technikum, Ilmenau, Schwanitzstr. 1.

1901. Gubler, E., Dr., Privatdozent a. d. Universität und Lehrer am Lehrerinnenseminar und Mädchengymnasium, Zürich IV (*Schweiz*), Universitätsstr. 65.

1903. Guccia, Nob. G. B., Dr., Professor a. d. Universität Palermo (*Italien*), Via Ruggiero Settimo 30.

1891. Günther, S., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, München, Akademiestr. 5.

1899. Guldberg, A., Dr., Professor a. d. Univ., Kristiania (*Norwegen*), Thomas Heftyesgade 37.

1891. Gundelfinger, S., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 37.

1900. Guradze, H., Dr., Berlin W. 50, Augsburgerstr. 48.

1891. Gutzmer, A., Dr., Professor an der Universität, Halle a. S., Wettinerstr. 17.

200. 1897. Gysel, J., Dr., Direktor d. Kantonschule, Schaffhausen (*Schweiz*), Tannerberg 47.

1893. Haas, K., Dr., Gymnasialprofessor, Wien VI (*Österreich*), Matrosengasse 8.

1897. Haberland, M., Professor an der Realschule, Neustrelitz.

1897. Haebler, Th., Dr., Professor an der Fürstenschule, Grimma i. S.

1897. Haenlein, J., Professor am Humboldt-Gymn., Berlin NW 52, Spenerstr. 34.

1891. Haentzschel, E., Dr., Professor an der Technischen Hochschule und am Köllnischen Gymnasinm, Berlin W. 30, Gleditschstr. 43.

1895. Hagen, J. G., Direktor der vatikanischen Sternwarte, Rom (*Italien*).

1903. Hahn, H., Dr., Privatdozent an der Universität, Wien XVIII (*Österreich*), Gymnasiumstr. 39.

1897. Halsted, G. B., Professor am Colorado College, Greeley, Co. (*U.S.A.*), Box 68.

1901. Hamel, G., Dr., Professor an der deutschen Techn. Hochschule, Brünn (*Österreich*), Scheffelgasse 5.

210. 1896. Hancock, H., Dr., Professor an der Universität, Cincinnati, Ohio (*U.S.A.*), Auburn Avenue 2415.

1904. Hartogs, F., Dr., Privatdozent an der Universität, München, Ainmillerstr. 19.

1892. Hartwig, E., Dr., Professor, Direktor der Sternwarte, Bamberg.

1901. Harzer, P., Dr., Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, Kiel.

1902. Haskell, M. W., Dr., Professor an der Universität, Berkeley, Cal. (*U.S.A.*) P. O. Box 3.

1899. Hatzidakis, N., Dr., Professor a. d. Universität, Athen (*Griechenland*), Anagnostopulustr. 31.

1896. Hausdorff, F., Dr., Professor an der Universität, Leipzig, Lortzingstr. 13.

1896. Haußner, R., Dr., Professor an der Universität, Jena, Mozartstr. 1.

1899. Hawkes, H. E., Professor an der Yale Universität, New Haven, Conn. (*U.S.A.*), Huntington Str. 45.

1901. Hayashi, T., Professor an der Kōtō Shihan Gakkō, Tokyo (*Japan*), Tsukudomaechō 18, Ushigome.

220. 1892. Hecht, W., Dr., Professor, La Croix, Dép. Var (*Frankreich*).

1903. Hedrick, R., Dr., Professor an der Universität, Columbia, Mo. (*U.S.A.*)

1902. Heegaard, P., Dr., Lehrer an den Militärakademien, Vedbaek bei Kopenhagen (*Dänemark*), Olgasvej.

Jahr des Eintritts

1891. **Hefftер**, L., Dr., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 90a.
1907. **Heinecke**, G., cand. math., Magdeburg, Fürstenufer 19.
1907. **Hellinger**, E., Dr., Assist. an der math. Sammlung, Göttingen, Bühlstr. 42.
1891. **Helm**, G., Dr., *G.H.R.*, Professor a. d. Techn. Hochsch., Dresden, Lindenaustr. 1a.
1891. **Helmert**, F. R., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Berlin; Direktor des Geodätischen Instituts, Potsdam, Telegraphenberg.
1891. **Henneberg**, L., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Roquetteweg 51.
1893. **Hennecke**, Professor am Gymnasium, Preußisch-Friedland.
230. 1893. **Henrici**, O., Dr., Professor am City and Guilds Central Technical College, London W. (*England*), Clarendon Road, Holland Park Avenue 34.
1891. **Hensel**, K., Dr., Professor an der Universität, Marburg, Breiter Weg. 7.
1899. **Herberich**, G., Dr., Rektor der städt. höh. Mädchenschule, Nürnberg, Am Maxfeld 11.
1906. **Herglotz**, G., Dr., Professor an der Universität, Göttingen, Steingraben 3.
1902. **Hermann**, A., Verlagsbuchhändler, Paris (*Frankreich*), rue de la Sorbonne 8.
1891. **Hermes**, J., Dr., Direktor des Realgymnasiums, Osnabrück, Lotterstr. 112.
1897. **Hermes**, O., Dr., Professor an der Artillerieschule, Berlin; Steglitz, Lindenstr. 35.
1891. **Hertzer**, H., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin, Halensee, Kurfürstendamm 137.
1900. **Herzog**, J., Oberingenieur, Budapest V (*Ungarn*), Lipótkösút 8.
1904. **Hessenberg**, G., Dr., Professor an der Landw. Akademie Bonn, Lessingstr. 30.
240. 1891. **Hettner**, G., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W. 10, Kaiserin. Augusta-Str. 58.
1895. **Heun**, K., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Klauprechtstr. 33.
1905. **Heyl**, K., Dozent an der Gewerbeakademie, Friedberg i. Hessen.
1898. **Heymann**, W., Dr., Professor an der Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Andréstr. 1.
1899. **Heyse**, M., Dr., Oberlehrer am Realgymnasium, Wilmersdorf-Berlin, Pfalzburgerstr. 56.
1906. **Hilb**, E., Dr., Assistent an der Universität, Erlangen, Löwenichstr. 33.
1891. **Hilbert**, D., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Str. 29.
1906. **Hilbert**, S., Dr., Privatgelehrter, München, Königinstr. 81.
1897. **Hirsch**, A., Dr., Professor am eidgen. Polytechnicum, Zürich V (*Schweiz*), Reinacherstr. 8.
1900. **Hočevar**, F., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Graz (*Österreich*), Beethovenstr. 7.
250. 1891. **Hölder**, O., Dr., Professor an der Universität, Leipzig, Schenkendorffstr. 8.
1905. **Hoffmann**, C., Dr., Oberlehrer, Schorndorf i. Württemberg.
1905. **Holgate**, Th. F., Professor an der Universität, Evanston Ill. (*U. S. A.*), Librarystr. 617.
1892. **Hollaender**, E., Dr., Professor am Gymnasium, Hildesheim, Lucienvörderstr. 22.
1897. **Holzmüller**, G., Dr., Professor, Direktor a. D., Hagen i. W. Bergstr. 47.
1899. **Hoppe**, E., Dr., Professor am Wilhelmsgymnasium, Hamburg 13, Fröbelstr. 5.
1891. **Horn**, J., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Darmstadt, Wittmannstr. 27.
1903. **Hort**, W., Dr., Dipl.-Ing., Direktor der Firma Voigtländer & Sohn, Braunschweig.

Jahr des Eintritts

1901. Hossenfelder, E., Professor am Gymnasium, Thorn, Friedrichstr. 2.

1893. Hoßfeld, C., Dr., Professor am Gymnasium, Eisenach, Friedrichstr. 5.

260. 1900. Hovestadt, H., Professor am Realgymnasium, Münster i. W., Hochstr. 5.

1901. Huntington, E., Dr., Professor an der Harvard Universität, Cambridge Mass. (*U. S. A.*), Fairfax Hall 35.

1891. Hurwitz, A., Dr., Professor am Polytechnikum, Zürich (*Schweiz*), Bächtoldstr. 11.

1895. Hurwitz, J., Dr., Luzern (*Schweiz*), Reckenbühlstr. 14.

1903. Industrieschule, Kgl., Augsburg.

1902. Industrieschule, Kgl., Nürnberg.

1900. Jaccottet, Ch., Dr., Professor am Gymnasium, Lutry bei Lausanne (*Schweiz*).

1907. Jackson, C. S., Instruktor an der Militär-Akademie, Woolwich (***England***).

1906. Jacobsthal, E., Dr., Berlin SW. 13, Alte Jacobstr. 128.

1900. Jacobsthal, W., Dr., Oberlehrer an der Oberrealschule, Straßburg i. E., Illwallstr. 1.

270. 1891. Järisch, P., Dr., Professor an der Oberrealschule, Hamburg 37, Isestr. 26.

1893. Jahnke, E., Dr., Professor a. d. Bergakademie, Berlin W. 15, Pariserstr. 36.

1902. Janisch, E., Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Prag (*Österreich*), Smichow, Zizkagasse 7.

1902. Jensen, J. L. W. V., Oberingenieur, Kopenhagen (*Dänemark*), Frederiksberg Allé 68.

1904. Jentzsch, Cand. math., Berlin W., Eislebenerstr. 14.

1901. Jirgensen, N., Mag. sc., Fuldmagtig in Nord. Livsforsikrings A. S. af 1897, Kopenhagen (*Dänemark*), Kongens Nytorv 8.

1906. Johansson, S., Dr., Dozent an der Universität, Helsingfors (***Finland***), Villagatan 27.

1896. Jolles, St., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Halensee bei Berlin, Kurfürstendamm 130.

1893. Joukovsky, N., Dr., Professor an der Universität und der Technischen Hochschule, Moskau (***Rußland***).

1902. Juel, C., Dr., Dozent a. d. polytechn. Schule, Kopenhagen N. (***Dänemark***), Dosseringen 36.

280. 1902. Jung, F., Dr., Privatdozent an der Technischen Hochschule, Wien IV (*Österreich*), Mittersteig 3a.

1905. Jung, H., Dr., Privatdozent an der Universität, Marburg, Wettergasse 38.

1906. Jung, X., wiss. Hilfslehrer an der Realschule, Schramberg i. Württ., Moltkestr. 8.

1891. Junker, F., Dr., Professor am Karlsgymnasium, Stuttgart, Cottastr. 63.

1900. Kagan, B., Privatdozent an der Universität, Odessa (***Rußland***).

1907. Kaiser, J., cand. math., Halle a. S., Große Wallstr. 11.

1903. Kapteyn, W., Dr., Professor an der Universität, Utrecht (*Holland*), Wilhelminapark 34.

1903. Karpinski, L., Dr., Instruktor an der Michigan Universität, Ann Arbor, Mich. (*U. S. A.*), 735 South 12. Str.

1904. Kautzner, A., Professor an der Landes-Oberrealschule, Graz (*Österreich*), Radetzkystr. 9.

1899. Kawalki, W., Dr., Oberlehrer an der Hauptschule der Franckeschen Stiftungen, Halle a. S., Franckeplatz 1.

290. 1901. Kempe, H., Dr., Oberlehrer am Realgymnasium, Remscheid, Viktoriastr. 6.

1892. Kepiński, St., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Lemberg (*Österreich*).

Jahr des Eintritts

1892. Kerschensteiner, G., Dr., Studienrat, Stadtschulrat, München, Möhlstr. 39.
1891. Kiepert, L., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Herrenhäuser Kirchweg 20.
1899. Kikuchi, D., Baron, Professor, Tōkyō (*Japan*).
1900. Killermann, A., Dr., Rektor der Realschule, Ingolstadt, Kasernstr. 6.
1891. Killing, W., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Münster i. W., Gartenstr. 63.
1906. Kiseljak, M., Dr., Gymnasiallehrer, Fiume (*Ungarn*), Corso 2.
1893. Kleiber, J., Reallehrer an der Handelsschule, München, Thierschstr. 21.
1891. Klein, F., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Straße 3.
300. 1903. Klinkhart, G., Professor am Gymnasium, Görlitz, Landeskronstr. 36.
1897. Klug, L., Dr., Professor an der Universität, Klausenburg (*Ungarn*).
1900. Kluyver, J. C., Dr., Professor an der Universität, Leiden (*Holland*).
1892. Kneser, A., Dr., Professor an der Universität, Breslau XVI, Tiergartenstr. 106.
1900. Knoblauch, E., Dr., Oberlehrer an der Humboldtschule, Hannover-Linden, Egestorffstr. 1.
1892. Knoblauch, J., Dr., Professor an der Universität, Berlin W. 35, Karlsbad 12.
1907. Knopp, K., Dr., Großlichterfelde W., Steglitzerstr. 38.
1902. Knopf, O., Dr., Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, Jena.
1897. Kobald, E., Dr., Professor an der Montan. Hochschule, Leoben (*Österreich*), Erzherzog Johannstr. 148.
1900. Koch, H. v., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Stockholm (*Schweden*), Djursholm.
310. 1898. Koch, K., Reallehrer, Nürnberg, Wiesenstr. 145.
1906. Koebe, P., Dr., Privatdozent an der Universität, Göttingen, Planckstr. 17.
1891. Köhler, C., Dr., Professor an der Universität, Heidelberg, Treitschkestr. 3.
1899. Kölmel, F., Dr., Professor an der Oberrealschule, Baden-Baden, Stephanienstr. 7.
1893. König, J., Dr., Ministerialrat, Professor an der Techn. Hochschule, Budapest (*Ungarn*), Vámházkörút 5.
1907. König, R., Dr., Göttingen, Bertheaustr. 2.
1891. Koenigsberger, L., Dr., *G.R.*, Professor an der Universität, Heidelberg, Kaiserstr. 2a.
1891. Köpcke, A., Dr., Professor an der Oberrealschule, Altona-Ottensen, Tresckowallee 14.
1902. Köstlin, E., Professor, Heilbronn, Wollhausstr. 58.
1891. Kötter, E., Dr., Professor an der Techn. Hochschule, Aachen, Nizza Allee 41.
320. 1891. Kötter, F., Dr., Professor a. d. Techn. Hochsch., Charlottenburg, Oranienstr. 16.
1891. Kohn, G., Dr., Professor a. d. Universität, Wien III (*Österreich*), Reisnerstr. 34.
1898. Kollert, J., Dr., Professor an der Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Kaiserstr. 40.
1900. Kollros, L., Dr., Professor am Gymnasium, La Chaux-de-Fonds (*Schweiz*), Tourelles 23.
1907. Korn, A., Dr., Professor an der Universität, München, Hohenzollernstr. 1.
1901. Korselt, A., Dr., Oberlehrer am Realgymnasium, Plauen i. V., Windmühlenstr. 14.
1891. Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg, Albrechtstr. 5.
1899. Kowalewski, G., Dr., Professor an der Universität, Bonn, Kirchstr. 7.
1904. Kraft, A., Dr., Schleswig, Bismarckstr. 18.
1891. Kraft, F., Dr., Zürich IV (*Schweiz*), Zweierstr. 38.
330. 1904. Kragh, O., Dr., Adjunkt an der Kathedralschule, Nykøbing-Falster (*Dänemark*).
1900. Kraus, J., Oberlehrer an der Oberrealschule, Darmstadt, Irenestr. 87.

Jahr des Eintritts

1891. Krause, M., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Friedrich Wilhelmstr. 82.

1891. Krazer, A., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Karlsruhe, Westendstr. 57.

1897. Krüger, L., Dr., Abteilungsvorsteher am Geodätischen Institut, Potsdam; Groß-Lichterfelde, Mommsenstr. 6.

1902. Krüger, Th., Dozent an der höheren Bergschule, Ekaterinoslaw (*Rußland*).

1900. Kučera, O., Dr., Professor a. d. Universität, Agram (*Ungarn*), Jurjevska ulica 14.

1902. Kühnemann, F., Professor am Friedrichs-Kollegium, Königsberg i. Pr., Wilhelmstr. 12.

1893. Kürschák, J., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest II (*Ungarn*), Erzherzog Albrechtstr. 14.

1892. Kullrich, E., Dr., Direktor des Realgymnasiums und der Realschule, Gera i. Reuß, Blücherstr. 14.

340. 1895. Kutta, W., Privatdozent a. d. Techn. Hochschule, München, Zieblandstr. 33.

1897. Lacombe, M., Professor am Polytechnikum, Zürich (*Schweiz*), Seefeldstr. 115.

1905. Lalive, A., Professor an der Uhrmacherschule und am Gymnasium, La Chaux de Fonds (*Schweiz*).

1891. Lampe, E., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W. 15., Fasanenstr. 64.

1899. Landau, E., Dr., Professor an der Universität Berlin, Charlottenburg, Hardenbergstr. 13.

1894. Landsberg, G., Dr., Professor an der Universität, Kiel.

1907. Langenkamp, O., Dr., Kandidat des höheren Lehramts, Gelsenkirchen, Kaiserstr. 32.

1902. Laubert, K., Oberlehrer, Cassel, Ständeplatz 19.

1896. Laugel, L., Villa Ensoleillée, Beaulieu, Alpes Maritimes (*Frankreich*).

1897. Leitzmann, H., Dr., Regierungsrat beim Kais. Aufsichtsamt für Privatversicherungen, Großlichterfelde W., Sternstraße 22.

350. 1891. Lerch, M., Professor an der Böhm. Techn. Hochschule, Brünn (*Österreich*), Erzherzog Rainerstr. 62.

1898. Levi-Civita, T., Dr., Professor an der Universität, Padua (*Italien*), Via Altinate 14.

1906. Lewent, L., Oberlehrer, Berlin W. 30, Motzstr. 87.

1897. Liebmann, H., Dr., Professor a. d. Universität, Leipzig-Reudnitz, Brommestr. 7.

1896. Lilienthal, R. v., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Münster i. W., Erphostraße 16.

1900. Lindelöf, E., Dr., Professor an der Universität, Helsingfors (*Finland*), Sandvikskajen 15.

1893. Lindemann, F., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, München, Franz Joseph-Str. 12.

1898. Linsenbarth, H., Dr., Oberlehrer a. d. I. Realsch., Berlin N., Lothringerstr. 76.

1897. Loewy, A., Dr., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Thurnseestr. 20.

1891. London, F., Dr., Professor an der Universität, Bonn, Goethestr. 19.

360. 1898. Lorenz, F., Dr., *R.R.*, Professor an der Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Reichsstr. 33.

1897. Lorenz, H., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Danzig-Langfuhr, Johannesberg 7.

1896. Lorey, W., Dr., Oberlehrer am Gymnasium, Görlitz, Blumenstr. 56.

1896. Loria, G., Dr., Professor an der Universität, Genua (*Italien*), Passo Caffaro 1.

1899. Lovett, E. O., Professor an der Universität, Princeton, N. J. (*U. S. A.*).

1899. Ludwig, W., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, An der Paulikirche 1.

Jahr des Eintritts

1891. Lüroth, J., Dr., *G.R.*, Professor a. d. Universität, Freiburg i. B., Mozartstr. 10.
1900. Lukat, M., Oberlehrer, Danzig, Pfefferstadt 28.

1902. Macfarlane, A., Professor an der Universität, South Bethlehem; Gowrie Grove, Chatham, Ontario (*Canada*).
1897. Mackay, J. S., Edinburgh (*Schottland*), Northumberland Street 69.
370. 1903. Maillet, E., Répétiteur à l'École Polytechnique, Bourg-la-Reine, Dép. Seine (*Frankreich*), rue de Fontenay 11.
1905. Majcen, G., Dr., Professor, Universitätsdozent, Agram (*Ungarn*), Zapadni perivoj 16.
1894. Mandl, M., Dr., Professor an der Staatsoberrealschule, Laibach (*Österreich*), Bleiweißstr. 4.
1891. Mangoldt, H. v., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Danzig-Langfuhr, Hermannsdörfer Weg 8.
1898. Mansion, P., Dr., Professor an der Universität, Gent (*Belgien*), Quai des Dominicains 6.
1900. Marco, G., Sekretär des Wiener Schachklubs, Wien IX, 3 (*Österreich*), Schwarzspanierstr. 15.
1898. Marcuse, A., Dr., Professor an der Universität Berlin; Groß-Lichterfelde, Wilhelmstr. 5.
1899. Martin, A., Dr., U. S. Coast and Geodetic Survey Office, Washington, D. C. (*U. S. A.*), N. W. Columbiastr. 1535.
1897. Marxsen, S., Dr., Oberlehrer, Schleswig, Bismarckstr. 18.
1897. Maschke, H., Dr., Professor an der Universität, Chicago Ill. (*U. S. A.*), Woodlawn Av. 5549.
380. 1906. Máška, O., Professor, Telč (*Mähren*).
1902. Mason, M., Dr., Instruktor a. d. Yale Universität, New Haven, Conn. (*U. S. A.*), Dwightstr. 20.
1904. Massachusetts Institute of Technology, Boston, Mass. (*U. S. A.*).
1902. Mathematical Library of the University of Chicago, Chicago Ill. (*U. S. A.*).
1897. Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, München.
1902. Mathematisches Institut der Universität, Freiburg i. Br.
1904. Mathematisches Kabinet der Universität Gießen.
1906. Mathematisches Seminar der Universität, Bonn.
1906. Mathematisches Seminar der Universität, Kiel.
1901. Mathematisches Seminar der Universität, München.
390. 1906. Mathematisches Seminar der Universität, Münster i. W.
1903. Mathematisches Seminar der Universität, Würzburg.
1897. Mathematischer Verein der Universität, Berlin NW., Dorotheenstr. 6.
1896. Mathematischer Verein der Universität, Göttingen.
1899. Mathematischer Verein der Universität, Halle a. S., Poststr. 5.
1905. Mathematischer Verein, Heidelberg.
1900. Mathematischer Verein der Universität, München.
1891. Maurer, L., Dr., Professor an der Universität, Tübingen, Christophstr. 3.
1891. Mayer, A., Dr., Professor an der Universität, Leipzig, Roßplatz 14.
1899. Mehling, A., Dr., Gymnasiallehrer, Fürth, Amalienstr. 13.
400. 1904. Mehliß, O., Dr., Oberlehrer an der Realschule, Oschersleben, Kaiserstr. 26.
1891. Mehmke, R., Dr., Professor an der Techn. Hochsch., Stuttgart, Degerloch.
1905. Meißner, O., Hilfsrechner am geodät. Institut, Potsdam, Viktoriastr. 70b.
1904. Merrill, Miss H. A., Wellesley College, Wellesley, Mass. (*U. S. A.*).
1897. Metzler, W., Professor an der Universität, Syracuse, N. Y. (*U. S. A.*), Comstock Ave. 724.
1900. Mewes, H., Oberlehrer a. d. Großen Stadtschule, Wismar, Mecklenburgerstr. 10.

Jahr des Eintritts

1898. Meyer, E., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg.
1904. Meyer, E., Dr., Oberlehrer am Realgymnasium und Privatdozent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Goethestr. 6.
1891. Meyer, F., Dr., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Villenkolonie Maraunenhof, Herzog Albrechtsallee 27.
1903. Mikami, Y., Shibota, Ōhara in Kazusa, Tokyo (*Japan*).
410. 1900. Miller, G. A., Professor an der Universität, Urbana Ill. (*U. S. A.*), W. Nevadastr. 907.
1891. Minkowski, H., Dr., Professor an der Universität, Göttingen, Planckstr. 15.
1907. Mises, R. Edler v., Assistent an der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn (*Österreich*), Lessingstr 7.
1898. Mittag-Leffler, G., Dr., Professor an der Universität, Stockholm-Djursholm (*Schweden*).
1907. Moeller, J., Dr., Oberlehrer an der Navigationsschule, Elsfleth.
1899. Molien, Th., Professor am Polytechnikum, Tomsk (*Sibirien*).
1900. Molk, J., Dr., Professor a. d. Universität, Nancy (*Frankreich*), rue d'Alliance 8.
1906. Mollerup, J., Dr., Assistent am Polytechnikum, Kopenhagen (*Dänemark*).
1896. Moore, E. H., Dr., Professor an der Universität, Chicago Ill. (*U. S. A.*), Monroe Avenue 5607.
1907. Morgenstern, A., Dr., wissenschaftlicher Hilfslehrer am Luisengymnasium, Berlin N.W., Stephanstr. 51.
420. 1905. Müller, Conrad H., Dr., Assistent an der Universitäts-Bibliothek, Göttingen, Hanssenstr. 4.
1896. Müller, Emil, Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Wien IV (*Österreich*) Preßgasse 17.
1902. Müller, Eugen, Dr., Professor a. d. Oberrealschule, Konstanz, Bahnhofplatz 4.
1891. Müller, Felix, Dr., Professor, Friedenau-Berlin, Rönnebergstr. 16.
1904. Müller, Franz, k. Obergeometer, Augsburg, Moltkestraße.
1900. Müller, Johann O., Dr., Paris V. l. (*Frankreich*), 19 rue de la Clef.
1902. Müller, Heinrich, Professor am Kaiserin Augusta-Gymnasium, Charlottenburg, Grolmanstr. 15.
1891. Müller, Reinhold, Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Wittmannstr. 38.
1892. Müller, Richard, Dr., Professor, Oberrealschuldirektor, Schöneberg bei Berlin, Grunewaldstr. 27.
1898. Muth, P., Dr., Professor, Osthofen (Rheinhessen), Wormserstr. 23.

430. 1897. Naetsch, E., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden-Blasewitz, Striesenerstr. 5.
1898. Nagaoka, H., Professor an der Universität, Tōkyō (*Japan*).
1897. Nath, M., Dr., Professor, Direktor des Realgymnasiums, Pankow-Berlin.
1891. Netto, E., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Gießen, Südanlage 13.
1893. Neuberg, J., Professor an der Universität, Lüttich (*Belgien*), Rue Sclessin 11.
1907. Neuendorff, R., Oberlehrer an der höheren Schiffs- und Maschinenbauschule, Kiel, Lornsenstr. 67.
1891. Neumann, C., Dr., *G.H.R.*, Professor a. d. Univers., Leipzig, Querstr. 10—12.
1899. Neumann, E., Dr., Professor an der Universität, Marburg, Barfüßertor 25.
1902. Newkirk, B., Dr., Professor an der Minnesota Universität, Minneapolis Minn. (*U. S. A.*).
1901. Newson, H., Professor an der Universität, Lawrence, Kansas (*U. S. A.*).
440. 1900. Nielsen, N., Dr., Privatdozent a. d. Universität, Kopenhagen N. (*Dänemark*), Nörrebrogade 57.
1900. Niklas, P., Oberlehrer am Gymnasium, Lyck, Ostpreußen.

Jahr des Eintritts

1905. Nitz, K., Dr., Oberlehrer an der Oberrealschule, Königsberg i. Pr., Gerberstraße 21 a.
1891. Noether, M., Dr., Professor a. d. Universität, Erlangen, Nürnbergerstr. 30/32.
1899. Nordmann, M., Dr., Professor am Realgymnasium, Halberstadt, Gleimstr. 17.

1900. Öffentliche Landesbibliothek, Kgl., Stuttgart, Neckarstr. 8.
1897. Oettingen, A. v., Dr., Professor an der Universität, Leipzig, Mozartstr. 1.
1903. Ondracek, J., Professor an der Staatsgewerbeschule, Wien IX (*Österreich*), Pramergasse 10.
1900. Opitz, H., Dr., Oberlehrer am Königstädtischen Realgymnasium, Johannisthal bei Berlin, Parkstr. 6.
1906. Oseen, C. W., Dr., Lund (*Schweden*), Ö. Vallgatan 19.
450. 1899. Osgood, W., Dr., Professor an der Harvard Universität, Cambridge, Mass. (*U. S. A.*), Avon Hill Str. 74.

1891. Papperitz, E., Dr., Oberbergrat, Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S., Weisbachstr. 5.
1891. Pasch, M., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Gießen, Alicestr. 31.
1891. Pelz, K., *H.R.*, Professor an der Böhmischen Technischen Hochschule, Prag (*Österreich*), Dittrichgasse 1773.
1904. Perron, O., Dr., Privatdozent an der Universität, München, Konradstr. 7.
1907. Petrovitch, M., Professor an der Universität, Belgrad (*Serbien*), Kossantch Venac 26.
1906. Pexider, J., Dr, Dozent an der Universität Bern, z. Z. München, Türkenstr. 92.
1892. Pick, G., Dr., Professor an der Deutschen Universität Prag (*Österreich*), Kgl. Weinberge 754.
1903. Pierce, A., Dr., Instruktor an der Universität, Ann Arbor, Mich. (*U. S. A.*), Packard Str. 732.
1897. Pierpont, J., Professor an der Yale Universität, New Haven, Conn. (*U. S. A.*), Mansfieldstr. 42.
460. 1897. Pietzker, F., Professor am Gymnasium, Nordhausen, Mittelstr. 14.
1891. Piltz, A., Dr., Sulza i. Th.
1902. Pincherle, S., Dr., Professor an der Universität, Bologna (*Italien*), Via Galliera 62.
1905. Pisati, L., Dr., Lehrerin an der Technischen Schule „Marianna Dionigi", Rom (*Italien*), Via Vittorino da Feltre 1.
1898. Planck, M., Dr., Professor an der Universität, Berlin-Grunewald, Wangenheimstr. 21.
1906. Plemelj, J., Dr., Professor an der Universität, Czernowitz (*Österreich*).
1891. Pochhammer, L., Dr., *G.R.R.*, Professor a. d. Univers., Kiel, Beseler Allee 2.
1892. Pockels, F., Dr., Professor an der Universität, Heidelberg, Bergstr. 3.
1906. Pöschl, Th., Ingenieur, Graz (*Österreich*), Klosterwiesgasse 19.
1906. Ponkka, K. A., cand. phil., Helsingfors (*Finland*).
470. 1901. Pórszász, J., Dr., Direktor, Professor am Zeichenlehrerseminar, Budapest III (*Ungarn*), Szemlöhegy Józsefhegyi-ut. 3.
1902. Porter, B. M., Professor an der Texas Universität; Austin, Texas (*U. S. A.*).
1904. Powel, A., Professor an der Realschule, Gumbinnen.
1903. Prandtl, L., Dr., Professor an der Universität, Göttingen, Kirchweg 1a.
1903. Prasad, G., Professor am Queen's College, Benares (*Brit. Indien*), Old Cantonments 28.
1891. Pringsheim, A., Dr., Professor an der Universität, München, Arcisstr. 12.
1906. Progymnasium, Berg.-Gladbach.
1899. Protopapadakis, P., Privatgelehrter, Athen (*Griechenland*), Rue Valaoritis 15.

Jahr des Eintritts

1897. Prümm, E., Dr., wiss. Hilfsarbeiter bei Voigtländer u. Sohn, Braunschweig, Riedestr. 14.

1891. Prym, F., *G.R.*, Professor an der Univ., Würzburg, Schweinfurterstr. $3^1/_4$.

480. 1900. Ptaszycki, J., Prof. an der Univ., St. Petersburg (*Rußland*), Nadiezdinska 11, log. 20.

1899. Pund, O., Dr., Oberlehrer, Charlottenburg, Bismarckstr. 61.

1905. Quelle, R., Verlagsbuchhändler (i. Fa. Quelle u. Meyer), Leipzig, Liebigstr. 6.

1902. Radaković, M., Dr., Professor an der Universität, Czernowitz (*Österreich*).

1893. Rados, G., Professor a. d. Techn. Hochschule, Budapest IX (*Ungarn*), Ferenczkörút 38.

1901. Rahts, J., Dr., Professor, Direktor des städt. Statistischen Amtes, Charlottenburg, Lützowstr. 3.

1902. Rau, R., Professor an der Universität, Jena.

1896. Rausenberger, O., Dr., Professor an der Musterschule, Frankfurt a. M., Heisterstr. 8.

1905. Realschule, Großh., Heppenheim a. d. B.

1905. Rebmann, E., Dr., Oberschulrat, Karlsruhe i. B., Vorholzstr. 9.

490. 1893. Recknagel, G., Dr., Rektor a. D. des Realgymnasiums, Augsburg.

1894. Reich, K., Professor am Technologischen Gewerbe-Museum, Dozent an der Technischen Hochschule, Wien IX (*Österreich*), Michelbeurngasse 2.

1907. Reichel, W., Dr., Seminarkandidat am Realgymnasium, Görlitz, Hospitalstr. 27.

1891. Reinhardt, C., Dr., Professor, Konrektor am Realgymnasium, Zittau, Bahnhofstr. 6.

1906. Rektorat der Kreisrealschule I, Nürnberg.

1893. Réthy, M., Professor an der Techn. Hochschule, Budapest VIII (*Ungarn*), Muzeumkörút.

1891. Reuschle, C., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Stuttgart, Hegelstr. 44.

1891. Reye, Th., Dr., Professor an der Universität, Straßburg i. E., Dietrichstaden 6.

1899. Ricci, G., Dr., Professor an der Universität, Padua (*Italien*), Piazza Vittorio Emanuele II 29.

1904. Richardson, R. G. D., Instruktor an der Yale Univers., New Haven, Conn. (*U.S.A.*), Yale St. 120.

500. 1891. Richarz, F., Dr., Professor an der Universität, Marburg.

1892. Richter, P., Professor am Gymnasium, Quedlinburg, Bahnhofstr. 6.

1907. Riebesell, P., Dr., Berlin SW., Blücherstr. 13.

1905. Rieß, F., Dr., Professor an der Oberrealschule, Györ (*Ungarn*), Kazinczyut. 20.

1897. Rinecker, F., Dr., Gymnasialprofessor, Regensburg, Domplatz.

1891. Ritter, A., *G.R.R.*, Professor, Lüneburg, Obere Schrangenstr. 18.

1902. Rius y Casas, J., Professor an der Universität, Zaragoza (*Spanien*), Sainz de Varanda 8, barrio de las Acacias, Torrero.

1891. Rodenberg, C., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Hannover, Körnerstr. 19 A.

1899. Roe, E., Dr., Professor a. d. Univ., Syracuse N.Y. (*U.S.A.*), Ostrander Avenue 105.

1907. Roelcke, O., Dr., Görlitz, Jochmannstr. 5.

510. 1891. Rogel, F., Ingenieur, Lehrer an der höh. Techn. Lehranstalt, Limbach bei Chemnitz, Wiesenstr. 2.

1891. Rohn, K., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Leipzig, Beethovenstr. 31.

1891. Rosanes, J., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Breslau V, Schweidnitzer Stadtgraben 16 b.

1891. Rosenow, H., Dr., Direktor des Sophien-Realgymnasiums, Berlin C. 54, Weinmeisterstr. 15.

Jahr des Eintritts

1899. Rost, G., Dr., Professor an der Universität, Würzburg, Mergentheimerstr. 6.
1902. Rothe, R., Dr., Privatdozent an der Techn. Hochschule, Techn. Hilfsarbeiter bei der Phys.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg, Schlüterstr. 78.
1901. Rothrock, D., Dr., Professor an der Universität, Bloomington, Ind. (*U.S.A.*), Atwater Ave. 1000.
1892. Rudel, K., Professor in Nürnberg, Ludwig Feuerbachstr. 13.
1891. Rudio, F., Dr., Professor am Polytechnicum, Zürich V (*Schweiz*), Feldeggstr. 64.
1901. Rudolf, K., Ingenieur, Bochum, Brückstr. 51.
520. 1891. Runge, C., Dr., Professor an der Universität, Göttingen, Goldgraben 20.

1891. Saalschütz, L., Dr., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Tragheimer Pulverstr. 47.
1904. Salkowski, E., Dr., Privatdozent an der Techn. Hochschule, Oberlehrer am Kaiser Wilhelm-Realgymnasium, Berlin S., Zossenerstr. 17.
1902. Saxelby, F. M., Professor am Municipal Technical Institute, Belfast (*Irland*), College Square North.
1904. Schaffstein, K., Dr., Göttingen, Roßdorferweg 6.
1900. Schafheitlin, P., Dr., Professor am Sophien-Realgymnasium, Berlin W. 15, Schaperstr. 17.
1899. Schaper, H. v., Dr., Oberlehrer a. d. Seefahrtschule, Bremen, Rheinstr. 76.
1905. Schapper, H., Professor an der Universität, Fayetteville Ark. (*U.S.A.*), Hillstr.
1892. Scheffers, G., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Steglitz bei Berlin, Schloßstr. 42.
1891. Scheibner, W., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Leipzig, Schletterstraße 8.
530. 1899. Scheller, A., Dr., Adjunkt der Sternwarte, Prag I (*Österreich*), Clementinum.
1891. Schilling, C., Dr., Direktor der Seefahrtschule, Bremen, Neustadt-Wall 1.
1893. Schilling, F., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.
1904. Schimmack, R., Kandidat des höheren Schulamts, Göttingen, Friedländerweg 51.
1892. Schleiermacher, L., Dr., Professor a. d. forstlichen Hochschule, Aschaffenburg, Grünewaldstr. 19.
1900. Schlepps, F., Hauptmann u. Kompagniechef im Hohenzollernschen Fuß-Artillerie Regt. Nr. 13, Breisach.
1891. Schlesinger, L., Dr., Professor an der Universität, Klausenburg (*Ungarn*), Fellegvári útcza 112.
1901. Schlick, O., Konsul a. D., Direktor des Germanischen Lloyd, Hamburg, Bellevue 2.
1903. Schlink, W., Dr., Professor a. d. Technischen Hochschule, Braunschweig.
1902. Schmid, Th., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV (*Österreich*), Apfelgasse 4.
540. 1901. Schmidt, A., Dr., Professor an der Universität, Abteilungsvorsteher am meteorologischen Observatorium, Potsdam, Telegrafenberg.
1907. Schmidt, J., Professor an der Staatsrealschule, Wien (*Österreich*), Grüne Torgasse 11.
1891. Schmidt, M., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, München II, Kaulbachstr. 35.
1904. Schmidt, W., Professor am Realgymnasium, Düren, Marienstr. 43.
1905. Schniederjost, J., Dr., Oberlehrer, Attendorn, Westf.
1891. Schoenflies, A., Dr., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr. IX, Haarbrückerstr. 12.

Jahr des Eintritts

1893. Scholz, P. G., Professor am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin-Steglitz, Fichtestr. 34.

1899. Schorer, K., Oberlehrer an der Oberrealschule, Metz, Theobaldswall 11.

1897. Schorr, R., Dr., Professor, Direktor der Sternwarte, Hamburg.

1902. Schott, O., Dr., Leiter der Glaswerke Schott u. Gen., Jena.

550. 1897. Schotten, H., Dr., Direktor der städt. Oberrealschule, Halle a. S., Reichardtstraße 19.

1891. Schottky, F., Dr., Professor an der Universität, Berlin-Steglitz, Fichtestr. 12a.

1900. Schoute, P. H., Dr., Professor an der Universität, Groningen (*Holland*), Westersingel 22.

1899. Schrader, C., Dr., *G.R.R.*, Reichsinspektor für die Seeschiffer- und Seesteuermannsprüfungen, Berlin NW. 6, Luisenstr. 33.

1899. Schröder, J., Dr., Oberlehrer a. d. Oberrealschule, Hamburg, Wagnerstr. 72.

1901. Schröder, R., Oberlehrer an der Oberrealschule, Cassel, Wörthstr. 12.

1892. Schröder, Th., Professor a. D., Nürnberg, Sulzbacherstr. 7.

1906. Schrutka, L., Edler von Rechtenstamm, Dr., Assistent an der Technischen Hochschule, Wien XIX (*Österreich*), Cottagegasse 56.

1891. Schubert, H., Dr., Professor am Johanneum, Hamburg-Borgfelde, Borgfelderstr. 85.

1896. Schülke, A., Dr., Prof. a. d. Oberrealschule, Königsberg i. Pr., Haydnstr. 5.

560. 1906. Schütz, E. H., Dr., Oberlehrer an der Seefahrtschule, Bremen, Feldstr. 42.

1901. Schütz, H., Dr., Professor, Frankfurt a. M., Elsheimerstr. 4.

1892. Schultz, E., Dr., Professor a. Schillergymnasium, Stettin, Kaiser Wilhelmstr. 93.

1907. Schulze, E., Kandidat des höh. Schulamts, Braunschweig, Fasanenstr. 15.

1891. Schumacher, H., Dr., Professor an den Militärbildungsanstalten, München, Elvirastr. 1

1891. Schumacher, R., Dr., Professor an der Industrieschule, Augsburg, Bismarckstr. 11.

1891. Schur, F., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Beiertheimerallee 2.

1901. Schur, I., Dr., Privatdozent an der Universität, Berlin NW., Thomasiusstr. 2.

1902. Schwab, G., Gymnasiallehrer, München, Pettenkoferstr. 10a.

1894. Schwarz, H. A., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Berlin; Villenkolonie Grunewald, Humboldtstr. 33.

570. 1903. Schwarzschild, K., Dr., Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, Göttingen, Geismar Chaussee 11.

1896. Schwatt, J., Professor an der Universität, Philadelphia, Pa. (*U.S.A.*).

1891. Schwering, K., Dr., Professor, Direktor des Apostel-Gymnasiums, Cöln, Arndtstr. 8.

1898. Scott, Miss Ch. A., Professor am College, Bryn Mawr Pa. (*U.S.A.*).

1902. See, Th., Dr., Professor am U. S. Naval Observatory, Mare Island Cal. (*U.S.A.*).

1891. Seeliger, H. v., Dr., Professor an der Universität, Direktor der Sternwarte, München-Bogenhausen.

1897. Segre, C., Dr., Professor an der Universität, Turin (*Italien*), Corso Vittorio Emanuele 85

1896. Selivanoff, D., Dr., Professor an der Universität und an den höheren Frauenkursen, St. Petersburg (*Rußland*), Fontanka 116, log. 16.

1897. Selling, E., Dr., Professor a. D., München, Linprunstr. 62.

1891. Servus, H., Dr., Professor am Friedrichs-Realgymnasium und Privatdozent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Spandauerstr. 9.

580. 1891. Siebert, A., Dr., Professor an der Kadettenanstalt, Groß-Lichterfelde W., Bellevuestr. 30.

1892. Sievert, H., Dr., Professor am Gymnasium, Bayreuth.

Jahr des Eintritts

1891. Simon, M., Dr., Professor an der Universität und am Lyceum, Straßburg i. E., Schiffmattweg 10.

1897. Sintzow, D., Dr., Staatsrat, Professor an der Universität, Charkow (*Rußland*), Tschernyschewskaja 74.

1905. Sisam, Ch. H., Officer's Mess, Annapolis Md. (*U. S. A.*).

1897. Smith, D. E., Professor a. d Columbia Universität, New York City (*U. S. A.*).

1901. Smith, O. A., Dr., Oberlehrer am Gymnasium, Rungstedt (*Dänemark*), Ole Suhrsgade 8.

1900. Smith, P., Professor an der Yale Universität, New Haven, Conn. (*U. S. A.*). Willonstr. 330.

1903. Snyder, V., Dr., Professor an der Cornell Universität, Ithaca, N. Y. (*U. S. A.*), University Avenue 214.

1900. Sobotka, J., Professor an der Böhm. Universität, Prag-Smichow (*Österreich*), Ferdinandskai 26.

590. 1902. Soisson, W., Dr., Professor am Athenäum, Luxemburg (*Luxemburg*), Athenäumstr. 1.

1899. Sommer, J., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.

1895. Sommerfeld, A., Dr., Professor an der Universität, München, Leopoldstr. 87.

1897. Sonin, N. v., Dr., *G.H.R.*, Präsident im Ministerium für Volksaufklärung, St. Petersburg (*Rußland*), Englischer Prospekt 38.

1893. Souslow, G., Dr., wirkl. Staatsrat, Professor an der Universität, Kiew (*Rußland*), Timofeievskaja 6.

1900. Spitz, A., Versicherungsmathematiker, Wien II (*Österreich*), Lilienbrungasse 18.

1891. Sprung, A., Professor am Meteorologischen Institut, Potsdam.

1891. Stäckel, P., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Hannover, Alleestr. 21.

1891. Stahl, H. v., Dr., Professor an der Universität, Tübingen, Hirschauerstr. 3.

1891. Staude, O., Dr., Professor an der Universität, Rostock, St. Georg-Str. 38.

600. 1902. Stecker, H. F., Professor am State College, Pennsylvania Pa. (*U. S. A.*), Loch Box 305

1902. Steininger, K., Dr., Fachlehrer, Wien III (*Österreich*), Reisnerstr. 23.

1897. Steinitz, E., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Berlin W. 50, Nachodstr. 38.

1897. Stephanos, K., Dr., Professor an der Universität, Athen (*Griechenland*), Rue de Solon 20.

1894. Sterneck, R. Daublebsky v., Dr., Professor an der Universität, Graz (*Österreich*), Merangasse 35.

1907. Sternwarte, Herzogl., Gotha.

1902. Stetson O. S., Professor an der Syracuse Classical School, Worcester, Mass. (*U. S. A.*).

1891. Stickelberger, L., Dr., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Zasiusstraße 73.

1901. Störmer, C., Professor an der Universität, Kristiania (*Norwegen*), Daaesgade 14.

1900. Straubel, R., Professor an der Universität, Jena, Botzstr. 6.

610. 1891. Study, E., Dr., Professor an der Universität, Bonn, Göbenstr. 28.

1906. Stübler, E., Dr., Privatdozent an der Techn. Hochschule, Stuttgart, Alexanderstr. 13.

1900. Sturm, A., Professor am Obergymnasium, Seitenstetten (*Österreich*).

1891. Sturm, R., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Breslau X, Werderstr. 9.

1898. Suták, J., Dr., Gymnasialprofessor und Privatdozent an der Universität, Budapest IV (*Ungarn*), Városháztér 4.

Jahr des Eintritts

1906. Taber, H., Professor an der Clark-Universität, Worcester Mass. (*U. S. A.*).
1894. Tauber, A., Privatdozent an der Universität, Wien VI (*Österreich*), Gumpendorferstr. 63
1905. Technische Hochschule, Kgl., Danzig-Langfuhr.
1903. Tedone, O., Dr., Professor an der Universität, Genua (*Italien*).
1903. Tesař, L., Professor an der Staatsoberrealschule, Olmütz (*Österreich*).
620. 1906. Thaer, C., Dr., Assistent an der Universität, Jena, Bachstr. 7.
1901. Thiersch, F., Assistent am Gymnasium, Regensburg, Reichsstr. 5.
1891. Thomae, J., Dr., *G.H.R.*, Professor an der Universität, Jena, Kasernenstr. 9.
1902. Thomé, W., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Greifswald, Mühlenstr. 30.
1904. Tietze, H., Dr., Wien III. (*Österreich*), Seidlgasse 30,
1897. Timerding, H. E., Dr., Professor an der Universität, Straßburg i. E., Zornstaden 15.
1906. Timpe, A., Dr., Assistent an der Techn. Hochschule, Danzig-Langfuhr, Friedenstr. 31
1897. Toeplitz, E., Dr., Professor am Johannes-Gymnasium, Breslau VIII, Ohlauer Stadtgraben 3.
1906. Toeplitz, O., Dr., Privatdozent a. d. Universität, Göttingen, Kirchweg 4.
1901. Torka, J., Mitarbeiter am K. Patentamt, Friedenau-Berlin, Friedrich Wilhelmplatz 2.
630. 1893. Tötössy, B. v., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest (*Ungarn*).
1901. Tränkner, Th, Privatgelehrter, Burkersdorf, Bez. Dresden.
1903. Treutlein, P., *G.H.R.*, Direktor des Real- und Reform-Gymnasiums, Karlsruhe, Waldhornstr. 15.
1902. Trommsdorff, H., Dr., Gymnasiallehrer, Hildesheim.
1905. Tropfke, J, Dr., Professor am Dorotheenstädt. Realgymnasium, Berlin NW. 6, Marienstr. 14.
1903. Tyler, H. W., Dr., Professor am Massachusetts Institute of Technology, Boston, Mass. (*U. S. A.*), Boyletonstr. 491.

1899. Umlauf, K., Dr, Oberlehrer an der Lehrerbildungsanstalt, Hamburg, Eppendorferbaun 13.
1905. Universitäts-Bibliothek, Heidelberg.
1901. Universitäts-Bibliothek, Kristiania (*Norwegen*).
1895. Universitäts-Bibliothek, Utrecht (*Holland*).
640. 1897. Universitäts- und Landesbibliothek, Straßburg i. E.

1897. Vahlen, Th., Dr., Professor an der Universität, Greiswald, Papenstr. 7.
1891. Valentin, G., Dr., Oberbibliothekar an der Kgl. Bibliothek, Berlin W. 62, Burggrafenstr. 6.
1898. Vályi, J., Dr., Professor an der Universität, Klausenburg (*Ungarn*), Majátis-Gasse 3.
1902. Van Vleck, E. B., Dr., Professor an der Wisconsin-Universität, Madison Wisc. (*U. S. A.*).
1901. Varićak, V., Dr., Professor an der Universität, Agram (*Ungarn*), Franz-Josephsplatz 6.
1906. Velten, W., Dr., Kreuznach.
1893. Veronese, G., Dr., Professor an der Universität, Padua (*Italien*), Via S. Sofia 17.
1898. Vieth, J. v., Dr., Professor am Gymnasium, Dresden-N., Arndtstr. 9.
1906. Viterbi, A., Dr., Privatdozent an der Universität, Pavia (*Italien*), Via Foscolo 23.
650. 1893. Vogel, P., Dr., Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule, München, Linprunnstr. 63.

Jahr des Eintritts

1907. Vogt, W., Dr., Assistent an der Techn. Hochschule, Karlsruhe, Kurvenstr. 21.
1892. Voigt, W., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Göttingen, Grüner Weg 1.
1903. Volterra, V., Dr., Professor a. d. Universität, Rom (*Italien*), Via in Lucina 17.
1891. Von der Mühll, K., Dr., Professor an der Universität, Basel (*Schweiz*), Rittergasse 10
1891. Voß, A., Dr., Professor an der Universität, München, Habsburgerstr. 1.
1900. Vries, H. de, Dr., Professor an der Universität, Amsterdam (*Holland*), Nicolaas Witsenkade 33.
1898. Vries, J. de, Dr., Professor an der Universität, Utrecht (*Holland*), Nieuwegracht 12.

1892. Waelsch, E., Dr., Professor a. d. Technischen Hochschule, Brünn (*Österreich*).
1907. Walker, B. M., Direktor des Agricultural-College, Starkville Miss. (*U. S. A.*).
660. 1895. Wallenberg, G., Dr., Professor, Privatdozent an der Techn. Hochschule, Charlottenburg, Grolmanstr. 21.
1898. Walter, A., Dr., Professor an der Staats-Oberrealschule, Graz (*Österreich*), Grazbachgasse 15.
1900. Walter, Th., Dr., Geh. Schulrat, Direktor der Oberrealschule und höh. Handelsschule. Mainz, Schulstr. 35.
1891. Wangerin, A., Dr., *G.R.R.*, Professor a. d. Univ., Halle a. S., Wilhelmstr. 37.
1893. Wassiliew, A., Dr., Professor an der Universität, Kasan (*Rußland*).
1895. Weber, E. v., Dr., Professor an der Universität, Würzburg.
1891. Weber, H., Dr., Professor a. d. Universität, Straßburg i. E., Taulerstr. 33.
1897. Weber, M., Professor an der Techn. Hochschule, Hannover, Baumstr. 19.
1900. Webster, A., Dr., Professor an der Clark-Universität, Worcester, Mass. (*U. S. A.*), Weststr. 66.
1900. Weder, O., Dr., Gymnasialoberlehrer, Zittau, Hansenstr. 3.
670. 1891. Weiler, A., Dr., Professor an der Universität, Zürich (*Schweiz*).
1891. Weingarten, J., Dr., *G.R.R.*, Professor an der Universität, Freiburg i. B., Schillerstr. 22.
1891. Weinmeister, P., Dr., Professor an der Forstakademie, Tharandt, Badetal 171 B.
1905 Weinnoldt, E., Dr., Professor an der Marine-Akademie und -Schule, Privatdozent an der Universität, Kiel, Beselerallee 60.
1902. Weiß, F., Dr., Oberlehrer an der Oberrealschule, Gr.-Lichterfelde O., Parallelstr. 10.
1898. Wellstein, J., Dr., Professor an der Universität, Straßburg i. E., Mannheimerstr. 3, ab 1. 4. 08 Kölner Ring 5.
1891. Weltzien, C., Dr., Professor an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin-Zehlendorf, Prinz Handjery-Str. 3.
1898. Wend, O., Dr., Professor an der Gewerbe-Akademie, Chemnitz, Andréstr. 6.
1899. Wendler, A., Dr., Gymnasialoberlehrer am Theresiengymnasium, München, Mozartstr. 13.
1903. Wendt, E., Dr., Oberlehrer an der Seefahrtschule, Bremen, Am Deich 88.
680. 1897. Wernicke, A., Dr., Oberrealschuldirektor, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hintern Brüdern 30.
1903. Wernicke, P., Dr., Professor an der Washington-Universität, St. Louis Mo. (*U. S. A.*).
1903. Westfall, W., Dr., Professor an der Missouri-Universität, z. Z. Göttingen, Nikolausbergerweg 35a.
1900. Westlund, J., Professor an der Purdue-Universität, La Fayette, Ind. (*U. S. A.*). Main Street 222.

Jahr des Eintritts

1897. White, H., Dr., Professor am Vassar College, Poughkeepsie N. Y. (*U. S. A.*), Academystr. 102.

1898. Wiechert, E., Dr., Professor an der Universität, Göttingen.

1901. Wieghardt, K., Dr., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr 9.

1900. Wieleitner, H., Dr., Gymnasiallehrer, Speyer, Hilgardstr. 3a.

1897. Wien, W., Dr., Professor an der Universität, Würzburg, Pleicherring 8.

1891. Wiener, H., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 28.

690. 1900. Willgrod, H., Dr., Oberlehrer der Handelslehranstalt, Chemnitz, Weststr. 60.

1902. Wilson, E. B., Professor an der Yale Universität, New Haven, Conn. (*U. S. A.*).

1904. Wilson, R. E., Instruktor an der Northwestern Universität, Evanston, Ill., (*U. S. A.*), Sherman Avenue 1939.

1906. Winkelmann, M., Dr., Privatdozent an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Augustastr. 20.

1902. Winkler, W., Dr., Privatgelehrter, Jena, Oberer Philosophenweg 11. (Privatsternwarte).

1891. Wirtinger, W., Dr., Professor an der Universität, Wien XVIII (*Österreich*), Edelhofgasse 19.

1893. Witting, A., Dr., Professor am Gymnasium, Dresden-Strehlen, Waterloostr. 13.

1891. Wölffing, E., Dr., Professor a. d. Techn. Hochschule, Stuttgart, Hackländerstr. 38.

1891. Wolf, M., Dr., *G.H.R.*, Professor a. d. Universität, Direktor des Astrophysikalischen Instituts, Heidelberg, Königstuhl.

1900. Wolf, W., Dr., Professor am Realgymnasium, Leipzig, Stephanstr. 22.

700. 1904. Wolletz, K., Gymnasialprofessor, Wien XVIII (*Österreich*), Währingergürtel 101.

1903. Worm, H., Dr., Gymnasialoberlehrer an der Fürstenschule, Meißen, Freiheit 16.

1905. Young, A. E., Instruktor an der Purdue Universität, La Fayette, Ind. (*U. S. A.*).

1903. Young, J. W., Professor an der Universität, Princeton N.J., (*U. S. A.*), Madison Street 23.

1899. Young, W. H., M. A., Sc. D., Lecturer in Higher Analysis at the University of Liverpool, Lecturer at Girton College, Cambridge, z. Z Göttingen, Wilhelm Weberstr. 44a.

1903. Zacharias, M., Dr., Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium, Berlin N.W. 52, Melanchthonstr. 5.

1893. Zahradnik, K., Professor an der tschechischen Technischen Hochschule, Brünn (*Österreich*).

1899. Zermelo, E., Dr., Professor a. d. Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Str. 24

1893. Zindler, K., Dr., Professor an der Universität, Innsbruck (*Österreich*), Pichlerstr. 8.

1892. Ziwet, A., Prof. a. d. Universität, Ann Arbor, Mich. (*U. S. A.*), South Ingallo Street 644.

710. 1892. Zorawski, K. v., Dr., Professor an der Universität, Krakau (*Österreich*), Maty Rynek 8.

1894. Zsigmondy, K., Dr., Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Prag II (*Österreich*), Palacký Quai 1981.

1902. Zühlke, P., Dr., Oberlehrer am Realgymnasium Grunewald, Halensee bei Berlin, Joachim Friedrichstr. 13.

Im Jahre 1907 verstorbene Mitglieder.

E. Jürgens, Aachen, † 5. Januar 1907.
A. Fuhrmann, Dresden, † 23. April 1907.
H. Kühne, Dortmund, † 21. Mai 1907.
E. v. Oppolzer, Innsbruck, † 15. Juni 1907.
H. Kreutz, Kiel, † 13. Juli 1907.
G. Sidler, Bern, † 9. November 1907.

Verzeichnis der Vorsitzenden der Deutschen Mathematiker-Vereinigung seit ihrer Begründung.

1890, 1891, 1892, 1893 G. Cantor.
1894. P. Gordan.
1895. H. Weber.
1896. A. v. Brill.
1897. F. Klein.
1898. A. Voß.
1899. M. Nöther.
1900. D. Hilbert.
1901. W. v. Dyck.
1902. Fr. Meyer.
1903. F. Klein.
1904. H. Weber.
1905. P. Stäckel.
1906. A. Pringsheim.
1907. A. v. Brill.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 1. Dezember 1907.

Einnahmen.	M	Pf
Kassenbestand am 1. Dezember 1906 . . .	659	47
Jahresbeiträge der Mitglieder:		
1 Beitrag für 1900	2	—
1 " " 1901	2	—
1 " " 1902	2	—
1 " " 1903	2	—
4 Beiträge " 1904	8	—
20 " " 1905	40	—
43 " " 1906	86	—
145 " " 1907	290	—
18 " " 1908	36	—
4 " " 1909	8	—
1 Beitrag " 1910	2	—
2 Ablösungen d. Jahresbeiträge à 20.— M	40	—
6 " " " à 30.— "	180	—
1 Jahr Zinsen v. 18000 M 3% Reichsanleihe	540	—
1 " " v. 1000 M 3½% Lp. Stadtanl.	35	—
1 " " v. Sparbuch pro 1906 . . .	3	50
Summe	1935	97

Ausgaben.	M	Pf
Verschiedenes (Adressen, Steuern u. Amtsgerichtsgebühren in Vereinssachen), Effektenaufbewahrungsspesen	142	55
Drucksachen	708	25
Postspesen	137	18
Angekauft:		
M 1000.—, 3½% Leipziger Stadtanleihe à 93.76 inkl. Spesen	937	60
Barbestand	10	39
Summe	1935	97

Vermögensbestand: nom. 18000 M 3% D. Reichsanleihe, Ankaufswert: M 16573.55.
" 2000 " 3½% Leipzig. Stadtanl. Ankaufsw.: " 1928.75.
Barer Kassenbestand (inkl. M 3.50 auf Sparbuch): " 10.39.

A. Ackermann-Teubner, als Kassenführer.

Gegen den vorstehenden Kassenbericht nichts zu erinnern gefunden:

Leipzig, den 21. Dez. 1907. gez. O. Hölder, H. Bruns.

Zur Statistik des mathematischen Studiums.

Von A. Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Im letzten Sommersemester ist die Zahl der deutschen mathematischen Studierenden an den preußischen Universitäten zum erstenmal erheblicher gefallen. Sie hatte sich fünfzehn Jahre hindurch in steigender Richtung bewegt und war im Jahre 1906 bis auf 1600 angewachsen. Dagegen weist das Jahr 1893 einen Tiefstand von weniger als 200 auf, nachdem die Frequenz zehn Jahre vorher eine relative Maximalziffer von rund 1000 erreicht hatte. Das sind Schwankungen, die weder für die Studierenden, noch für die Berufszweige, in die sie eintreten, erwünscht sind.

Bereits 1904 hatte der Andrang zum mathematischen Studium etwas nachgelassen; vielleicht — aber auch nur vielleicht — infolge der leisen Warnung, die damals an dieser Stelle erhoben wurde. Im Jahre 1903/04 fiel nämlich die Zahl der Neuimmatrikulierten erheblich; meinen Rechnungen zufolge sank sie auf 260, nachdem sie noch im Jahr vorher 360 betragen hatte. Aber für 1904/05 und 1905/06 ist schon wieder ein Anwachsen auf 300 und 370 zu konstatieren. Jetzt endlich ist der Rückschlag mit voller Kraft eingetreten, denn im Jahre 1906/07 ist die Zahl der Neuimmatrikulierten unter 200 gesunken.

Sicherlich stellt dieser Rückschlag eine höchst willkommene Tatsache vor. Aber man fragt unwillkürlich, ob er nicht schon früher hätte einsetzen müssen, und ob nicht das Publikum wieder einmal die Rechnungen der Statistik so lange außer acht gelassen hat, bis es längst zu spät ist. Man ist auch begierig, ob die rückläufige Tendenz diesmal von Dauer sein wird, und wird es für geboten halten, die früher erhobenen Warnungen heute in schärferer Form zu wiederholen. Aber dies könnte auch leicht über das Ziel hinausschießen. Freilich besteht die Pflicht des Statistikers vielmals darin, die Masse vor ihren unzureichenden Auffassungen zu schützen. Ist doch der Einzelne geneigt, seine eigenen eng umgrenzten Beobachtungen oder gar den Einzelfall zum Gesetz zu erheben, während das statistische Gesetz in den Erfahrungen der Gesamtheit wurzelt. Aber doch soll nicht verschwiegen werden, daß auch die Behauptungen des Statistikers teilweise auf Schätzungen und Mutmaßungen beruhen. Insbesondere gilt dies von

allen Prognosen und Wahrscheinlichkeitsziffern, die die Zukunft betreffen; lehrt doch die mathematische Theorie, daß in alle derartigen Wahrscheinlichkeitsgrößen subjektiv bewertete Faktoren oder Koeffizienten eingehen.

Es wäre deshalb an sich keineswegs ausgeschlossen, daß das Publikum einmal der Statistik gegenüber recht hätte, und es wäre immerhin möglich, daß hier ein solcher Fall vorläge. Wenn die Gesamtheit ihr Verhalten mit bewußter Hartnäckigkeit festhält, so sollte dies jedenfalls die Wirkung haben, den Statistiker zur Selbstkritik anzuregen. Nirgends scheint mir die Skepsis gegen die eigenen Resultate so notwendig zu sein wie für die Voraussagungen der Statistik.

In einem Punkt bin ich selbst geneigt, mich auf die Seite des Publikums zu stellen. Statistische Prognosen leiden leicht an einem methodischen Fehler. Sie schätzen die Berufsaussichten der kommenden Jahre nach dem Bedarf der vergangenen, und da zwischen den beiden Zeitpunkten, auf die sich die Schätzung und das vorhandene Zahlenmaterial beziehen, acht bis zehn Jahre liegen können, so kann die Schätzung leicht fehlerhaft sein. Beispielsweise ist dieser Artikel für diejenigen bestimmt, die 1908 ihr Studium beginnen wollen. Sie kommen im Durchschnitt nicht vor 1915 zur Anstellungsfähigkeit; dagegen stammt das Material, auf das sich die Beurteilung der Chancen für 1915 aufbaut, wesentlich aus der Zeit vor 1907. Hierin kann eine Quelle erheblicherer Fehlschlüsse enthalten sein; bewegt sich doch augenblicklich das gesamte Kulturniveau mit erhöhter Geschwindigkeit in aufsteigender Richtung. Die außerordentlichen Fortschritte in Industrie und Technik absorbieren gerade auf den Gebieten, die der gelehrten Mitarbeiter bedürfen, eine wachsende Menge von Anwärtern. Dazu kommt, daß sich immer weitere Berufszweige von der Erkenntnis durchdringen lassen, daß die mathematische Vorbildung eine wesentliche Bedingung für die bestmögliche Betätigung bildet. Endlich muß die steigende Forderung höherer beruflicher Vorbildung die höheren Schulen in stärkerem Maße wachsen lassen, als es der Vermehrung der Bevölkerung entspricht. Dies wird durch das vorhandene Zahlenmaterial vollauf bestätigt. So betrug in Preußen die Zahl der höheren Schulen und die Zahl der Lehrerstellen, einschließlich der Direktoren in den Jahren:

	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
Schulen	564	568	573	596	612	635	651	677
Vermehrung		4	5	23	16	23	16	26
Stellen	6751	?	7277	7615	7895	8165	8471	8852
Vermehrung			526	338	280	270	306	381.

Es sind also die Schulen in diesen sieben Jahren um 113 und die Stellen um 2101 gestiegen. Dies bedeutet eine jährliche Durchschnittsvermehrung um 2,8 und 4,5 %, während die analog berechnete jährliche Bevölkerungszunahme nur 1,5 % beträgt. Ähnliche Zahlen würden sich zweifellos auch für die Zunahme der mathematischen Stellen ergeben.

Wie lange dieser Prozeß in der jetzigen Stärke andauern mag, entzieht sich freilich sicherer Beurteilung. Wenn es wahr ist, daß die wesentliche Aufgabe des gesamten Unterrichts in der Erziehung zum Verständnis der vorhandenen Kultur und in der besten Vorbereitung zu ihrer Weiterentwicklung zu erblicken ist, so dürfte die Bevorzugung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Durchbildung für das erste nicht zum Stillstand kommen. Auch ist nicht anzunehmen, daß die in Vorbereitung befindliche allgemeine Unterrichtsreform ihn wesentlich ungünstig beeinflussen wird. Doch ist es nicht meine Absicht, den treibenden Kräften, die hier in die Erscheinung treten, und ihrem Spiel näher nachzugehen. Mir lag wesentlich daran, auf den geschilderten Tatbestand hinzuweisen. Möglich, daß ich seine Bedeutung und seine Dauer etwas überschätze; belanglos ist er jedenfalls nicht. Auf alle Fälle mahnt er zur Vorsicht.

Ich lasse zunächst einige Tabellen folgen. Das Zahlenmaterial, das mir zur Verfügung steht, umfaßt wesentlich die letzten sieben Jahre. Es hat nicht die Zuverlässigkeit, die der Statistiker von Beruf für das seinige zu verlangen pflegt. Die daran geknüpften Folgerungen können deshalb nur einen vorläufigen Charakter haben. Aber die „Fixigkeit“ verdient hier einmal vor der absoluten „Richtigkeit“ den Vorrang; man möchte sich in erster Linie *möglichst schnell* ein *ungefähres* Urteil bilden können. Selbst ein Fehler von 10 % würde, wie sich zeigen wird, kaum erheblich ins Gewicht fallen.

Tabelle I.

Nach den Ermittlungen der deutschen Mathematiker-Vereinigung betrug die Zahl der mathematischen Studenten an den preußischen Universitäten ausschließlich der Ausländer in den Sommersemestern[1]):

1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
760	960	1160	1370	1440	1510	1600	1480.

1) Die ersten vier Zahlen lauteten in den früheren Mitteilungen 804, 1003, 1225, 1420. Seit 1904 werden aber die Ziffern, die sich durch Auszählung der Personalverzeichnisse ergeben, um ungefähr 5 % gekürzt, um die Studierenden, die nicht Angehörige des Deutschen Reiches sind, auszuschließen. Eine analoge

Tabelle II.

Nach den statistischen Mitteilungen, die jährlich als Beihefte zum Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen erscheinen, betrug die Zahl *aller* Studierenden der Mathematik *und der Naturwissenschaften* in den Sommersemestern ausschließlich der Ausländer:

1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
1767	2109	2455	2615	2626	2568	?	?

Von 1905 an werden die Studierenden der Chemie besonders gezählt; es betrugen die Mathematiker *und Naturwissenschaftler* einerseits und die Chemiker andrerseits, ausschließlich der Ausländer

$$1900 + 668 = 2568.$$[1])

Tabelle III.

Derselben Quelle entnehme ich eine Übersicht über die Zahl der Prüfungen. Sie unterscheidet zwei Gattungen von Prüfungen; einerseits erste Prüfungen, Ergänzungs- und Wiederholungsprüfungen (Er.) und andrerseits Erweiterungsprüfungen (Ew.). Außerdem wird auch die Zahl der nicht bestandenen Prüfungen angegeben.[2]) Diese Übersicht enthält zwar *keine fachlichen* Unterscheidungen, doch will ich die Zahlen hierher setzen. Es gab für die Jahre[3]):

Kürzung mußte daher auch mit den Ziffern der ersten vier Jahre vorgenommen werden.

In der Annahme von 5 % liegt natürlich eine Willkür. Für 1907 ist die Zahl der Ausländer durch wirkliche Zählung ermittelt worden; dies soll auch in Zukunft stets geschehen. Sie stellt sich insgesamt auf 72, wovon rund 50 allein in Göttingen. Dies macht in der Tat ungefähr 5 % aus.

1) Die amtliche Statistik enthält außerdem die Zahlen der in jedem Semester an den einzelnen Universitäten Immatrikulierten. Für unsere Zwecke wäre es besser, die Zahl der *Neu*immatrikulierten („Füchse") zu kennen. Aus der in der amtlichen Statistik mitgeteilten Zahl läßt sich meines Erachtens wenig erkennen; selbst wie stark der Wechsel der Universitäten ist, geht aus ihr nicht hervor.

2) Die Erweiterungsprüfung dient jeder Ergänzung oder Erweiterung eines *zur Anstellung befähigenden* Zeugnisses, die Ergänzungsprüfung der eines *noch nicht* zur Anstellung befähigenden.

3) Für die Zeit von 1895 bis 1900 lauten diese Zahlen:

95/96	96/97	97/98	98/99	99/00
224	251	207	264	276
194	176	208	199	132
49	17	11	64	76
3	5	4	2	8

Die große Zahl der Erweiterungsprüfungen und die geringe Zahl der nicht bestandenen Prüfungen lassen den damaligen Mangel an Lehrkräften deutlich er-

		00/01	01/02	02/03	03/04	04/05	05/06
Bestandene	Er.	275	377	469	527	636	756
	Ew.	107	108	93	110	112	162
Nicht best.	Er.	112	136	136	205	276	310
	Ew.	13	18	17	9	20	14.

Fachlich erscheinen die Prüfungen in der Weise nach dem *Hauptfach* geordnet, daß Mathematik und Physik, sowie Chemie und beschreibende Naturwissenschaften je ein besonderes Hauptfach bilden. Hier wird nur die Gesamtzahl der bestandenen Prüfungen angegeben, und zwar abgesehen von den Erweiterungsprüfungen. Für uns kommen nur die Prüfungen in Mathematik und Physik in Frage. Ihre Zahl betrug für die Jahre:

99/00	00/01	01/02	02/03	03/04	04/05	05/06	06/07
25	21	61	89	111	135	175	254.[1])

Tabelle IV.

Für die Veränderungen im höheren Lehrfach kann ich wieder Zahlenmaterial mitteilen, das durch die deutsche Mathematiker-Vereinigung ermittelt ist; die in ihm vorgenommene Zerlegung in je zwei Einzelziffern stützt sich allerdings teilweise auf eine Schätzung. Die Zahlengruppen der folgenden Tabelle sind nämlich so zu verstehen, daß die erste Ziffer die Kandidaten betrifft, die Mathematik als Hauptfach haben; und zwar ist die Mathematik auch dann als Hauptfach gerechnet worden, wenn zwar eine Lehrbefähigung für die erste Stufe fehlt, aber die anderen Fächer die Annahme begründen, daß die Mathematik das eigentliche Hauptstudienfach gewesen ist.[2]) Die zweite Ziffer bezieht sich auf die, die ein anderes Fach als Hauptfach besitzen, so daß die Mathematik deutlich als Nebenfach zu erkennen ist. Gezählt sind die Seminaristen (S), die Probanden (P) und die anstellungsfähigen

kennen. Daß eine solche Befriedigung des Bedarfs kein Ziel ist, „aufs innigste zu wünschen", bedarf keiner Begründung. Um so notwendiger ist die Vermeidung einer Wiederkehr derartiger Zustände.

1) Das Heft, daß die Zahl für 1906/07 bringt, ist noch nicht erschienen. Ich verdanke ihre Kenntnis einer persönlichen Mitteilung, für die ich auch an dieser Stelle meinen Dank sage.

2) Zeugnisse mit Erdkunde I, Mathematik und Physik II, oder Physik, Botanik, Zoologie I, Mathematik II sind z. B. hier gerechnet worden. Der erste Fall wird kaum Zweifel aufkommen lassen, der zweite schon eher; doch sind derartige subjektive Momente nicht zu umgehen. Wie dem auch sei, so bin ich auf das vorhandene Material angewiesen.

Kandidaten (K) nach dem Stande vom 1. Mai jedes Jahres; außerdem die Neuanstellungen (N) und die Ausscheidungen aus dem Amt (A) für das *vorhergehende* Schuljahr. Die Zahlen lauten:

	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
S.	25; 5	32; 10	41; 4	82; 17	107; 29	141; 23	161; 30	195; 22
P.	17; 1	20; 4	32; 11	42; 4	78; 26	112; 25	144; 14	167; 30
K.	53; 14	21; 6	16; 5	12; 3	16; 5	23; 6	27; 7	41; 3
N.	64; 16	64; 14	39; 19	61; 16	49; 14	91; 21	123; 18	131; 21
A.	31	36	40; 4	26; 13	43; 9	39; 7	37; 13	52; 10.

Der Überschuß der Ziffern der vorletzten Zeile über die der letzten gibt ein Bild von der Zahl der neugegründeten Stellen. Rechnerisch betrugen sie insgesamt für die Jahre

99/00	00/01	01/02	02/03	03/04	04/05	05/06	06/07
49	44	— 1; 15	35; 3	6; 5	52; 14	86; 5	79; 11.

Möglicherweise sind die niedrigen Ziffern der mittleren Jahre eine Folge des damals noch nicht ganz überwundenen Mangels an Lehrkräften. Sollte dies zutreffen, so würde die Höhe der letzten Ziffern kaum als bleibend zu betrachten sein. Doch enthalte ich mich einer bestimmten Prognose. Auf die große Unbestimmtheit der Faktoren, die die zukünftige Gestaltung dieser Dinge bedingen, habe ich bereits oben hingewiesen.

Das vorstehende Zahlenmaterial leidet an verschiedenen Mängeln; es ist weder einheitlich noch auch kritisch gereinigt. Für die Tabelle I sind nur die Ausländer ausgeschlossen worden; preußische und nichtpreußische Angehörige des deutschen Reiches werden nicht weiter geschieden. Dagegen fassen die Tabellen III und IV nur preußische Verhältnisse ins Auge. Dem unmittelbaren Vergleich der Ziffern würde also die Annahme zugrunde liegen, daß zwischen den Preußen, die auf einer nichtpreußischen Universität studieren, und den Nichtpreußen, die in Preußen studieren, ein ziffernmäßiger Ausgleich stattfindet. Dies trifft jedoch keineswegs zu; zumal für die Sommersemester ist die erste Zahl erheblich größer als die zweite.[1]) Doch ist dies nur auf die am Ende vorgenommene Schätzung des „Ballastes" von Einfluß. Aber auch die von der Unterrichtsverwaltung veröffentlichten Zahlen leiden an einem methodischen Übelstand. Die neuerdings vollzogene Scheidung

1) Für die Wintersemester wird sie eher zutreffen. In Zukunft sollen daher die Ziffern der Tabelle I für die Wintersemester ermittelt werden.

aller mathematisch-naturwissenschaftlichen Studenten zählt zur einen Abteilung die Chemiker, zur andern die sämtlichen übrigen Naturwissenschaftler und die Mathematiker, während bei den Prüfungen die Mathematiker mit den Physikern und die Chemiker mit den beschreibenden Naturwissenschaftlern je eine besondere Gruppe bilden. Genaue Vergleichziffern sind also wiederum nicht vorhanden; man ist auch hier teilweise auf Schätzungen angewiesen.[1])

Gemäß der Tabelle IV betrugen die Neuanstellungen in den Kolonnen 1901 bis 1907, d. h. also in den Schuljahren 1900 bis 1906 insgesamt 558; 123, während sich die Gesamtzahl der am 1. Mai dieser Jahre vorhandenen Probanden in denselben Kolonnen nur auf 445; 85 stellt; sie bleibt also um 113; 38 zurück. Die in diesen Jahren vorhandenen Probanden würden also bei weitem nicht ausgereicht haben, um den Bedarf an Lehrkräften zu decken. Selbst die Seminaristen erreichen für die nämlichen Jahre nur die Zahl 589; 118, übertreffen also die Neuanstellungen nur um 31; —4. Auch die Prüfungen, die in den Jahren 1899 bis 1905 stattfanden, übertrafen die Neuanstellungen nur unerheblich; die Prüfungen beliefen sich in diesen Jahren auf 617 und sind daher nur um 59 höher als die Zahl 558. Um aber diese Verhältnisse richtig zu beurteilen, hat man die Prüfungen und die Neuanstellungen für *entsprechende* Jahrgänge zu vergleichen. Dazu hat man die Prüfungen für die Jahre 1899 bis 1904 und die Neuanstellungen für die Jahre 1901 bis 1906 heranzuziehen, also diejenigen, die in Tabelle IV unter 1902 bis 1907 stehen. Dies ergibt

Prüfungen . . $25 + 21 + 61 + 89 + 111 + 135 = 442$,

Neuanstellungen $39 + 61 + 49 + 91 + 123 + 131 = 494$,

so daß sich ein Defizit von 52 ergibt. Die Ausfüllung wird wesentlich durch Eintritt außerpreußischer Lehrkräfte und durch Zugang von Schulen anderer Art erfolgt sein, außerdem wohl auch durch Ablegung von Erweiterungsprüfungen, die in dem fachlichen Teil der Tabelle nicht mitgezählt sind. Daß auf diese Weise nicht immer der richtige Mann an den richtigen Platz kommen kann, ist offenbar; jede derartige Notlage erzeugt die Notwendigkeit, auf minderwertige Lehrkräfte zurückgreifen und sie im Schuldienst *behalten* zu müssen. Um so größer ist das Interesse, der Wiederkehr eines solchen Zwanges beizeiten vorzubeugen.

---

1) Die gleiche Unterscheidung findet sich in der amtlichen Statistik auch bei den Seminaristen und Probanden. Eine andere Anordnung der Statistik wäre daher sehr wünschenswert.

Die geringe Zahl der am 1. Mai 1907 vorhandenen 41; 3 anstellungsfähigen Kandidaten zeigt, daß die Situation im höheren Lehrfach noch bis zu diesem Termin eine für die Kandidaten ganz ausgezeichnete gewesen ist. Allerdings wird sie sich allem Anschein nach bald ungünstig verschieben. Die wachsende Zahl der Prüfungen beweist, daß eine nicht bloß durch etwaige Sparsamkeit der Behörden bedingte Wartezeit bald eine Naturnotwendigkeit sein wird. Doch aber habe ich nicht die Befürchtung, daß den Kandidaten so unerfreuliche Verhältnisse bevorstehen, wie vor ein bis zwei Jahrzehnten.

Um dies darzutun, lege ich eine Tatsache zugrunde, die ich der bekannten Denkschrift von W. Lexis entnehme.[1]) Nach ihr beträgt die durchschnittliche Studiendauer für die Studierenden der Mathematik und der Naturwissenschaften gegen fünf Jahre. Diese Zahl dürfte auch den allgemeinen Erfahrungen der Universitätslehrer entsprechen. Bei Lexis stützt sie sich auf die Ermittlung des Semesters, in dem sich die einzelnen Studierenden an den preußischen Universitäten in der Zeit vom Winter 1886/87 bis Ostern 1888 im Durchschnitt befunden haben. Seine Zahlen sind:

Studienjahre	1	2	3	4	5	mehr als 5[2])
Studierende	255	232	254	214	135	141.

Da unter den Studierenden mit höheren Semestern gerade die Ausländer in stärkerem Prozentsatz vertreten sein dürften, wird man die Lexissche Feststellung um so mehr als berechtigt anerkennen dürfen. *Wir nehmen daher an, daß jede der in Tabelle I enthaltenen Gesamtzahlen in zehn Semester oder fünf Jahrgänge zerfällt.*[3])

---

1) Denkschrift über die dem Bedarf Preußens entsprechende Normalzahl der Studierenden der verschiedenen Fakultäten. Zweite Bearbeitung.

2) Darunter 23, die mehr als 18 Semester hatten.

3) Seit mehreren Jahren enthalten die statistischen Mitteilungen der Unterrichtsverwaltung Zahlengruppen, die die Länge des Studiums betreffen und sich auf sämtliche Kandidaten beziehen. Da sie mit der obigen Annahme nicht harmonieren, setze ich sie hierher. Es handelt sich um die Zeit vom Abiturientenexamen bis zur ersten Lehramtsprüfung und bis zur Erwerbung der vollen Anstellungsfähigkeit. Sie betrug in Jahren und Monaten für die in den Jahren 1899/1900 bis 1904/05 fest angestellten Lehrkräfte:

1899/1900	1900/01	1901/02	1902/03	1903/04	1904/05
6; 8	7; 0	6; 11	6; 9	7; 2	6; 5
7; 4	7; 6	7; 5	7; 3	7; 5	6; 8

Außerdem werden noch diejenigen besonders berücksichtigt, bei denen „eine durch persönliche Gründe veranlaßte Verzögerung“ nicht eingetreten ist. Die auf sie bezüglichen Zahlen lauten:

Diese Gesamtziffern sollen nun in je fünf Summanden gespalten werden, die den Studierenden im ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Studienjahr entsprechen. Für das Jahr 1900 muß diese Spaltung schätzungsweise vollzogen werden; für die übrigen Jahre ist sie dann rechnerisch bestimmt. Die Studierenden von 1900 entstammen den Jahrgängen

1896, 1897, 1898, 1899, 1900;

ich setze die Zahl der Neuimmatrikulierten für diese Jahrgänge auf

80, 110, 150, 190, 230

an; dann ergeben sich für die Jahre

1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
280	310	360	260	300	370	190

Neuimmatrikulierte. Dies sind die in der Einleitung erwähnten Zahlen.[1])

Die unsichere Grundlage, auf die sich die Berechnung dieser Zahlen stützt, macht eine kritische Nachprüfung höchst wünschenswert. Für eine von ihnen ist es mir möglich. Gemäß einer Mitteilung von M. Nath haben Michaelis 1901 und Ostern 1902 insgesamt 276 Abiturienten der preußischen höheren Schulen die Mathematik als Studienfach angegeben.[2]) Diese Zahl bleibt hinter der obigen Ziffer von 310 ziemlich zurück. Es ist aber zu beachten, daß sich die Nathsche Ziffer nur auf die *preußischen* Abiturienten bezieht, während die preußischen *Universitäten* auch eine Reihe kleinerer Staaten mit Lehrkräften versorgen müssen, die eine eigene Universität nicht besitzen, und deren Studierende wesentlich auf die benachbarten preußischen Universitäten angewiesen sind. Dies gilt besonders von Braunschweig, Oldenburg, Anhalt und den Hansestädten. In ihnen beträgt die Zahl der höheren Schulen ungefähr 10 % von der in Preußen. Wir haben daher zu der Nathschen Ziffer von 276 noch 27 hinzuzufügen und gelangen so zur

---

1899/1900	1900/01	1901/02	1902/03	1903/04	1904/05
5; 3	5; 2	4; 7	4; 6	4; 8	4; 6
5; 3	5; 2	4; 11	4; 8	4; 8	4; 8

Ich glaube jedoch, bei der Lexisschen Annahme von fünf Jahren stehen bleiben zu können, habe aber mit Rücksicht auf die vorstehenden Zahlen oben bei den weiteren Ausführungen auch die Annahme von 9 und 11 Semestern berücksichtigt.

1) Einige private Anfragen lassen freilich die Zahl 190 als etwas zu niedrig erscheinen; ich hoffe alsbald die genaue direkt ermittelte Ziffer mitteilen zu können.

2) Vgl. dies. Jahresber. Bd. 12 (1903), S. 69.

Gesamtzahl 303, die mit der berechneten Zahl von 310 im ganzen harmoniert.[1])

Für die Beurteilung der zukünftigen Situation ist noch der Prozentsatz der Studierenden zu ermitteln, die überhaupt eine Prüfung für das höhere Lehramt bestehen und in das höhere Lehrfach eintreten. Dabei haben wir uns auf das Lexissche Resultat zu stützen und die Tabellen I und III zu vergleichen. Für diesen Vergleich liegt allerdings ein Übelstand vor. Soll er in einwandfreier Weise ausgeführt werden, so müßte die Zahl der Studierenden für die *Wintersemester* und nicht die für die *Sommersemester* herangezogen werden. Beispielsweise stehen die Studierenden des Wintersemesters 1900/01 unserer Annahme gemäß im ersten bis einschließlich zehnten Semester und kommen nach derselben Annahme in der Zeit vom 1. April 1901 bis zum 1. April 1906 zum Examen. Sie sind daher mit denen zu vergleichen, die in den Jahren 1901/02 bis 1906/07 ihre Prüfung abgelegt haben. Um diesem Übelstand zu begegnen, habe ich von den Zahlen der Tabelle III die mittleren Werte genommen, so daß sich die Vergleichszahlen

80, 110, 150, 190, 230, 280; Summe 1030
41, 75, 100, 123, 155, 215; Summe 709

gegenüberstehen; dies liefert die Prozentzahlen

0,51, 0,68, 0,67, 0,65, 0,67, 0,77; 0,69.

Würde man dagegen die Zahlen der Tabelle III unmittelbar mit denen der Tabelle I vergleichen, so erhielte man die Prozentzahlen

0,87, 0,81, 0,74, 0,71, 0,76, 0,91; 0,80
0,30, 0,55, 0,59, 0,58, 0,59, 0,63; 0,57,

und zwar würde die erste Reihe der Annahme eines neunsemestrigen Studiums und die zweite der eines elfsemestrigen entsprechen.[2])

1) Die Zahl 310 muß einerseits größer sein als unsere Zahl 303, weil in Tabelle I auch Studierende gezählt sind, die Mathematik als Nebenfach angeben. Umgekehrt wirkt die Tatsache, daß mehr Preußen außerhalb Preußens studieren, als Nichtpreußen bei uns. Daher wird man das obige Urteil als zutreffend ansehen dürfen.

2) Die Besonderheit der ersten Zahl hat nichts auffallendes an sich; sie ist eine Folge der ungenauen Schätzung der Jahrgänge von 1896 bis 1900 (S. 31). Dagegen muß die Höhe der letzten Prozentzahl mit Recht auffallen und zu kritischer Prüfung herausfordern. Sie beruht auf der Zahl 254 von Tabelle III. Diese Zahl könnte durch ganz besondere Umstände verursacht sein; sie könnte aber auch auf einem Versehen beruhen. Das letzte anzunehmen, würde deshalb nahe liegen, weil die Zahl der Seminaristen am 1. Mai 1907 laut Tabelle IV nur 195 be-

Allem Anschein nach haben die zuerst berechneten Prozentzahlen die größere Wahrscheinlichkeit für sich; *ich lege daher der weiteren Rechnung die Annahme von 70 % zugrunde.* Dann sind gemäß Tabelle I für die Jahre 1907/08 bis 1912/13

$$217 + 252 + 182 + 210 + 259 + 133 = 1253$$

Prüfungen zu erwarten. Da am 1. Mai 1907 die Zahl der Seminaristen, Probanden und anstellungsfähigen Kandidaten 403 betrug, so macht dies zusammen die Gesamtzahl 1656. Davon ist der Bedarf der nächsten sechs Jahre abzuziehen. In den letzten drei Jahren betrugen die Neuanstellungen insgesamt 345, also jährlich durchschnittlich 115. Dazu kommt der obenerwähnte Bedarf der außerpreußischen höheren Schulen, den ich auf rund 10 ansetze. Endlich der Bedarf der Nebenberufe, in die man entweder auf Grund einer Promotion oder auf Grund der Lehramtsprüfung einzutreten pflegt.[1]) Hier kommen Hochschulen und wissenschaftliche Institute, Techniken und Fachschulen aller Art, sowie auch die Bedürfnisse der privaten Institute und die sonstigen Berufe in Frage. Gemäß einer früher von mir angestellten ausführlichen Rechnung möchte ich sie auf 35 mindestens annehmen;[2]) wir erhalten also eine jährliche Bedarfszahl von $115 + 10 + 35 = 160$.

Die sechs Jahre von 1907/08 bis 1912/13 würden demgemäß 960 Kandidaten absorbieren; für den 1. Mai 1913 ergibt sich also ein rechnerischer Überschuß von $1656 - 960 = 696$. Ihm gehören aber auch die am 1. Mai vorhandenen Seminaristen und Probanden an, die ich auf 296 ansetzen will; dann bleiben $696 - 296 = 400$ Kandidaten. Endlich sind auch die am 1. Mai 1907 vorhandenen *voll* beschäftigten *Kandidaten* und *Seminaristen* rechnerisch in Abzug zu bringen; solcher gab es insgesamt gegen 100, so daß 300 überflüssige Kandidaten resultieren. *In ihnen würde der dann wirklich vorhandene Überschuß seinen Ausdruck finden.*[3]) Mit Rücksicht auf die Bedarfszahl von 160 würde er eine Wartezeit von ungefähr zwei Jahren bedeuten.

---

trug. Schließlich könnte auch die Vergleichszahl 280, die den Neuimmatrikulierten des Jahrgangs 1901 entspricht, zu niedrig sein. Eine Aufklärung wird hoffentlich in der nächsten Mitteilung gegeben werden können.

1) Die Zahl der Kandidaten mit Promotion und ohne Staatsexamen ist so gering, daß sie außer Betracht bleiben kann.

2) Vgl. meinen Aufsatz: Die Überfüllung im höheren Lehrfach, Preußische Jahrbücher, Bd. 69 (1892), S. 192.

3) Es existieren zwar einige wenige Kandidaten die in Tabelle IV nicht berücksichtigt sind. Sie bedeuten an sich eine Verringerung der obigen Ziffer, doch ist ihre Zahl so gering, daß sie außer Betracht bleiben kann.

Diese Rechnung würde dem oben erörterten bisherigen Verhalten des Publikums nicht ganz unrecht geben. Freilich kann die ihr zugrunde liegende Zahl von 115 einen zu weitgehenden Optimismus enthalten. Unter 100 möchte ich aber diese Ziffer keineswegs setzen, hat sie doch in den Jahren 1899 und 1900 bereits 64 betragen, und ist doch die Kräftigung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Denkweise eine Forderung, die so bald nicht verstummen und infolgedessen noch längere Zeit bedarfsteigernd wirken wird. Bei der Annahme der Zahl 100 erhöht sich unsere obige Ziffer von 300 auf 390, was eine Erhöhung der Wartezeit um ein Jahr bedeuten würde. Andererseits könnte sich aber die Entwicklung auch noch günstiger gestalten, als es meinen Annahmen entspricht. Eine rechnerisch ermittelte Zahl, die man hier in Betracht ziehen kann, will ich noch anführen. Nach einer brieflichen Mitteilung von E. Toeplitz waren am 1. Mai 1902 insgesamt 1258; 303 Mathematiker im höheren Lehrfach angestellt, wozu noch 52; 16 vollbeschäftigte Kandidaten kommen. Inzwischen sind 258; 38 neue Stellen gegründet worden; dies macht zusammen 1568; 357 Stellen. Nimmt man nun an, daß der normale Ersatz durchschnittlich 3,3 $^0/_0$ beträgt, was einer durchschnittlichen Amtsdauer von 30 Jahren entspricht, so würde dies schon einen jährlichen Bedarf von 52; 13 Lehrkräften entsprechen. Dazu kommen noch die Neugründungen, die, wenn sie nur der Bevölkerungszunahme entsprechen, bereits 23; 5 ausmachen, so daß auf diese Weise ein Gesamtbedarf von 75; 18 resultiert. Angesichts der obenerwähnten allgemeinen Momente scheint deshalb die Bedarfszahl 100 eher zu niedrig als zu hoch gegriffen zu sein.[1])

Wo aber bleibt der Rest der Studierenden? Wenn sich nur 70 $^0/_0$ den staatlichen Prüfungen mit vollem Erfolg unterziehen, so resultiert die betrübende Tatsache, daß 30 $^0/_0$ das gewollte Ziel nicht oder doch nicht ganz erreichen. Von dieser erschreckend hohen Ziffer wird noch ein Teil derer abzuziehen sein, die in Tabelle IV an zweiter Stelle stehen; ich schätze ihn auf ungefähr 5 bis 10 $^0/_0$. Es bleiben dann

1) Nach dem Zentralblatt der Unterrichtsverwaltung betrug die Gesamtzahl der vorhandenen Direktoren, Professoren und Oberlehrer in den Jahren

1900/01	1901/02	1902/03	1903/04	1904/05
6802	7115	7366	7682	7926,

dagegen die Gesamtzahl der Ausscheidungen aus dem Amt

1900/01	1901/02	1902/03	1903/04	1904/05
197	252	263	224	270.

Dies ergibt die durchschnittliche Ziffer von 3,3 $^0/_0$. Ungefähr die gleiche Ziffer ergibt sich auf Grund der Tabelle IV.

immer noch mindestens 20%, die Schiffbruch erleiden. Die große Zahl der nicht bestandenen Prüfungen von Tabelle III kann als Bestätigung betrachtet werden. Die Prozentzahl erhöht sich aber noch dadurch, daß die außerhalb Preußens studierenden Preußen die in Preußen studierenden Nichtpreußen erheblich übertreffen; ich möchte sie deshalb mindestens auf 25% schätzen.[1]) Auf diesen „Ballast" hat schon Lexis in seiner Denkschrift hingewiesen. Dies mit allem Nachdruck auch an dieser Stelle zu tun, erscheint mir eine der ersten Notwendigkeiten zu sein. Dieser Ballast muß überdies den Unterricht und die Höhe der erreichbaren Ziele hemmend und mindernd beeinflußen. Ein gewisser Prozentsatz solcher Existenzen wird sich nach dem eisernen Gesetz der Notwendigkeit stets einstellen; seine Höhe ist nicht allein für den Unterrichtsbetrieb, sondern auch ökonomisch ebenso erschreckend wie schädlich.

Ich möchte daher in erster Linie die schon 1904 ausgesprochene Mahnung wiederholen, daß sich niemand dem Studium der mathematischen Wissenschaften zuwende, den nicht innere *Neigung* und *Befähigung* dazu antreiben. Aber auch außerdem ist vor dem *übermäßigen Zudrang* im Augenblick zu warnen. Der für das letzte Jahr eingetretene Rückschlag entspricht also in der Tat den Verhältnissen. *Dagegen würde ich es kaum für wünschenswert halten, daß die Zahl der Neuimmatrikulierten, die sich zuletzt auf 190 gestellt hat, wesentlich unter diese Ziffer sinke,* und noch weniger wünschenswert ist es, daß die für Mathematik besonders Prädestinierten sich Befürchtungen für ihr späteres Fortkommen überlassen.

Die Grundlagen zu einer vorläufigen sachgemäßen Beurteilung der statistischen Verhältnisse des mathematischen Studiums dürften im vorstehenden enthalten sein. Auf ihre Schwächen habe ich wiederholt hingewiesen; ich werde versuchen, das neu zu sammelnde Zahlenmaterial zu reinigen, zu ergänzen und zu vereinheitlichen. Insbesondere sollen die Studierenden von nun an für die Wintersemester gezählt und die Neuimmatrikulierten, wenn möglich, durch besondere Auszählung ermittelt werden. Auch ist nunmehr die Möglichkeit vorhanden, den jährlichen kurzen Mitteilungen jedesmal eine Abschätzung der künftigen Aussichten beizufügen, und ich möchte hoffen, daß sie mit den zunehmenden Jahren an Zuverlässigkeit und Schärfe wachsen wird.

1) Sollte die in Tabelle III enthaltene Zahl 254 zu groß sein, so würde der Prozentsatz noch höher ausfallen. Meine Königsberger Erfahrungen sprechen leider dafür.

Über eine Biographie L. Eulers vom Jahre 1780 und Zusätze zur Euler-Literatur.

Von Felix Müller in Friedenau.

Der „Éloge de M. Léonard Euler“ von Nic. Fuß ist bisher wohl am häufigsten zu Euler-Biographien benutzt worden. Er wurde am 23. Oktober 1783, also wenige Wochen nach Eulers Tode, in der Petersburger Akademie gelesen. (Siehe Felix Müller, Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler. Diese Jhrsb. **16**, 185—195 u. 423—424. 1907).

Auf eine mir bisher unbekannte Biographie Eulers aus dem Jahre 1780 wurde ich aufmerksam durch das im Museum zu Heiden, Appenzell, entdeckte Buch: „Helvetiens Berühmte Männer in Bildnissen von Heinrich Pfenninger, Mahler, nebst kurzen biographischen Nachrichten von Leonard Meister. 2. Aufl. besorgt von J. C. Fäsi. I. Band, Zürich 1799, Verlag von H. Pfenninger, Mahler.“ Die 1. Auflage habe ich nicht gesehen. Daß die erste Auflage in 3 Bändchen, Zürich und Winterthur, 1782—93 erschienen ist, entnehme ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn F. Rudio in Zürich.

In dem I. Bande der 2. Auflage fand ich biographische Nachrichten über Daniel I Bernoulli (S. 246—251), Leonhard Euler (S. 251—264) und Jakob I Bernoulli (S. 293—299) ihren Bildnissen beigefügt. Das Bild Leonhard Eulers mit der Unterschrift „H. Pfenninger pinxit“ ist dasselbe, welches in der Euler-Festschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft neben S. 60 steht. Als Quelle für die biographischen Notizen über Euler wird in der Fußnote S. 251 angegeben: „Adpendix zu Athen. Raur. 32 flg. und Joh. Bernoulli, Reisen durch Rußland Bd. 4.“ Den „Adpendix“ fand ich in der Universitätsbibliothek zu Basel. Da diese Quelle interessante Daten aus dem Leben Eulers enthält, die Nic. Fuß nicht erwähnt, so möchte ich auf diese, wie mir scheint, weniger bekannte, aus dem Jahre 1780 stammende Euler-Biographie etwas näher eingehen.

Das Werk „*Athenae Rauricae*, sive Catalogus professorum Academiae Basiliensis ab anno 1760 ad annum 1778, cum brevi singulorum biographia. Basileae 1778“ ist, wie der Titel besagt, eine Ehrentafel für die Professoren der Baseler Universität. Aus der Familie der Bernoullis finden wir hier erwähnt Jacob I, Johann I, Johann II, Nicolaus I und Daniel II. L. Eulers Biographie steht in einem Werke aus dem

Jahre 1780, das als Adpendix zu dem eben genannten bezeichnet wird, und dessen vollständiger Titel lautet: „Adumbratio Eruditorum Basiliensium meritis apud exteros olim hodieque celebrium. Adpendicis loco Athenis Rauricis addita. Basileae 1780." Der Anhang ist also eine Ehrentafel für diejenigen Baseler Gelehrten, welche sich außerhalb der Schweiz verdient gemacht haben. Uns interessiert der Artikel X. Leonardus Euler, p. 32—60.

Aus Eulers Kindheit wird hier folgende niedliche Geschichte erzählt. Eines Tages suchten die besorgten Eltern ihr vierjähriges Söhnchen lange vergeblich; endlich fanden sie ihn in einem entlegenen Winkel des Hauses, sitzend auf einem Korbe, in dem mehrere Hühnereier lagen. Gefragt, was er dort mache, antwortete der kleine Leonhard, er wolle nach dem Vorbild der Henne die Eier ausbrüten (se pullos gallineos parturum!).

Unsere Quelle zeichnet sich besonders durch die Angabe genauer Zeitdaten aus dem Leben Eulers aus. Mehrere dieser Zeitangaben, die man bei Nic. Fuß nicht findet, habe ich für einen Aufsatz entlehnt, der kürzlich in der „Leopoldina", Heft 43, Nr. 10, Oktober 1907, erschienen ist. Hier seien einige dieser Daten hervorgehoben. Am 9. Juni 1722 erwarb Euler „primam in philosophia Lauream summo merito". Am 8. Juni 1724 (nicht im Jahre 1723, wie bei Fuß steht) erhielt er mit der „Comparatio philosophiae Cartesianae et Neutonianae" — summos in philosophia honores. Am 27. Dezember 1733 heiratete Euler zum ersten, am 28. Juli 1776 zum zweiten Male. Nicht im Jahre 1727, wie Fuß angibt, sondern erst im Jahre 1728 erhielt Euler das Accessit der Pariser Akademie für die Preisschrift: „Sur la mâture des vaisseaux". Der Preis war erst für 1728 ausgeschrieben. Veröffentlicht wurde Eulers Arbeit erst in dem „Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie Royale des Sciences. Paris" 2, Nr. I, 1752. In dem Hagenschen „Index Operum Leonardi Euleri" ist diese Preisschrift verzeichnet unter 504: Meditationes super problemate nautico (de implantatione malorum).

Eine Durchsicht des genannten „Recueil" ergibt für die übrigen Preisschriften Eulers folgende chronologische Übersicht:

Für 1738: Sur la nature et la propriété du feu. Recueil **4**, Nr. I, 3—21, 1752. Bei Hagen 630: Dissertatio de igne, in qua ejus natura et proprietates explicantur.

Für 1740: Sur le flux et reflux de la mer. Recueil **4**, Nr. IX, 235—350, 1752. Hagen 540: De causa physica fluxus et refluxus maris.

Für 1741 (wiederholt von 1739): Sur la meilleure construction du cabestan. Recueil **5**, Nr. II, 31—87, 1752. Hagen 568.

Für 1743: Sur l'inclinaison de l'aiman. Recueil **5**, IX, 63—96, 1752. Hagen 680: De observatione inclinationis magneticae dissertatio etc.

Für 1744: Théorie nouvelle de l'aiman. Recueil **5**, X, 1—47, 1752. Hagen 679: Dissertatio de magnete.

Für 1747: 2 Arbeiten Eulers über dieselbe Frage. 1) Meditations in quaestionem: Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quam noctu, itemque durante crepusculo, verum temporis momentum commodissime et certissime determinari queat? Recueil **6**, II, 111—166, 1752. Hagen 701.

2) Sur la meilleure manière de trouver l'heure en mer par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, et surtout dans la nuit, quand on ne voit pas l'horizon. Recueil **6**, IV, 169—216. Fehlt bei Hagen. Für die erste Arbeit erhielt Euler, zugleich mit Daniel Bernoulli, die Hälfte des verdoppelten Preises, für die zweite eine lobende Erwähnung.

Für 1752 (wiederholt von 1748): Doppeltitel: 1) Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne. 2) Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne. Recueil **7**, II, 1769. 84 S. Auch Paris, Delatour 1749. Hagen 748 Titel 2.

Für 1753: Mémoire sur la manière la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux. 2. Titel: De promotione navium sine vi venti. Recueil **8**, I, 1771. 47 S. Hagen 509 Titel 2.

Für 1756: Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur. [Die Frage lautete: Théorie des inégalités de la terre.] Recueil **8**, III, 1771. 138 S. Hagen 749. — (Eine für die Theorie der Störungen bahnbrechende Arbeit).

Für 1759: Examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un vaisseau dans le roulis et dans le tangage, ou Recherches sur la diminution de ces mouvements. Recueil **8**, V, 1771. 47 S. Hagen 510.

Für 1760: Meditationes in quaestionem: utrum motus medius planetarum semper maneat aeque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur? et quaenam sit ejus causa? Recueil **8**, VI, 1771. 47 S. Als Verfasser dieser Arbeit, die Hagen unter 750 anführt, wird im Recueil Charles Euler genannt. Mädler, Geschichte der Himmelskunde, I, 445, 1873, meint, die Arbeit sei wahrscheinlich vom Vater herausgegeben. In unserer Euler-Biographie von 1780, die auf S. 41—60 die „Scripta" verzeichnet, wird sie nicht genannt.

Für 1768: Sur la théorie de la lune et spécialement sur l'équation séculaire. Recueil **9**, VII, 1777. Hagen 721 (mit unvollständigem Titel).

Für 1772: Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune. Recueil **9**, VIII, 1777. Hagen 722.

Diese Zusammenstellung der Literatur der Eulerschen Preisschriften schien uns geboten, da man in den einschlägigen Zitaten häufig Ungenauigkeiten findet. Wir kehren nun wieder zu dem Pfenninger-Meisterschen Buche zurück. Als zweite Quelle war angegeben: „Joh. Bernoullis Reisen durch Rußland". Wie mir Herr F. Rudio kürzlich freundlichst mitteilte, hat dieses Werk den Titel: „Johann Bernoullis Reisen durch Brandenburg, Pommern, Preußen, Curland, Rußland und Pohlen (sic!) in den Jahren 1777 und 1778. Leipzig. 6 Bde. 1779—1785". Johann III Bernoulli schildert im 4. Bande, S. 10—41, seinen Aufenthalt in Petersburg und die Petersburger Akademie und spricht S. 10—15 speziell von L. Euler. Neues Bemerkenswertes für die Euler-Biographie kommt nicht vor.

In meinem eingangs angeführten Aufsatze über Euler bitte ich zu verbessern S. 186, Z. 18 v. o. Steichen und S. 191, Z. 19 v. o. 300 Seiten. Herr W. Ahrens teilt mir mit, daß drei Briefe L. Eulers vom 19. Januar, 24. Januar und 19. Oktober 1843 an Friedrich den Großen sich in den „Œuvres de Frédéric le Grand", Deckersche Ausgabe, Berlin 1852, 199—200, 201, 202—203 finden. Eine Reihe anderer Briefe habe ich damals nicht erwähnt, weil sie bereits in dem Aufsatze von G. Valentin (s. l. c. S. 187) angeführt sind.

Schließlich möchte ich auf einen Aufsatz in den Hist. Mém. Ac. sc. Paris, a. 1781, 264—268 [1784] hinweisen, in dem die interessanten Berechnungen über den Luftballon wiedergegeben sind, welche L. Euler an seinem Todestage, d. 7./18. Sept. 1783, ausgeführt hat. Man fand sie nach seinem Tode auf seiner Schiefertafel mit Kreide geschrieben.

Eulers Turbinentheorie.

Von E. Brauer in Karlsruhe.

Als Vertreter der theoretischen Maschinenlehre habe ich es übernommen, ein Blatt beizutragen zu dem Lorbeerkranz, der in diesen Tagen dem großen Mathematiker L. Euler dargebracht wird, indem ich über seine Arbeiten zur Begründung der Theorie der Turbinen berichte.

Im Kreise der Techniker ist es heute ziemlich allgemein bekannt, daß Euler der erste war, der eine Theorie der Turbinen ausgearbeitet hat. Wenig bekannt aber dürfte es sein, mit welcher Geistesschärfe und erschöpfenden Gründlichkeit er dieses Problem vor bereits mehr als $1\frac{1}{2}$ Jahrhunderten behandelt, und wie wenig Arbeit er seinen Nachfolgern auf diesem Gebiet übrig gelassen hat.

Die Theorie Eulers ist so vollständig, daß ein gebildeter Ingenieur unserer Tage wohl imstande sein würde, eine Turbine darnach richtig zu berechnen. Die Techniker seiner Zeit waren aber nicht oder nicht genügend mathematisch gebildet, um eine solche Arbeit zu verstehen, während den Mathematikern wohl meist die Fähigkeit oder die Neigung fehlte, den mathematischen Gedanken in Stahl und Eisen zu übersetzen. Nur so ist es zu begreifen, daß noch $^3/_4$ Jahrhunderte vergehen konnten, ehe die Turbine zu der brauchbaren und vielbenutzten Maschine heranreifte, als welche wir sie heute kennen, und daß bei der endlich stattfindenden Lösung des Problems die Arbeiten Eulers anscheinend fast unbenutzt geblieben sind. Nicht ganz ohne Einfluß dürfte dabei der Umstand gewesen sein, daß sie in französischer Sprache, der damaligen Berliner Hofsprache, abgefaßt sind.

In der späteren Fachliteratur des In- und Auslandes hat man sich meist darauf beschränkt, die auf die Turbine bezüglichen Arbeiten Eulers zu erwähnen, und erst Zeuner hat in seinen 1899 erschienenen Vorlesungen über Theorie der Turbinen durch eine kurze Wiedergabe der Eulerschen Hauptgedanken die Bedeutung derselben deutlich hervortreten lassen.

Die unmittelbare Anregung zur Beschäftigung mit dem Turbinenproblem empfing Euler durch die unter dem Namen des Segnerschen Wasserrades bekannt gewordene Erfindung des Göttinger (später in Halle tätigen) Professor Segner.

Zwei Abhandlungen Eulers beziehen sich unmittelbar auf diese Maschine, nämlich:

1. Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par M. Segner à Göttingue. Histoire de l'Académie Royale, Berlin 1750.
2. Application de la machine hydraulique de M. Segner. Histoire etc. 1751.

Eine dritte Arbeit, betitelt:

3. Théorie plus complète des machines, qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau. Histoire etc. 1754.

faßt das Problem allgemeiner und verfolgt das Ziel, alle einzelnen Umstände, die bei diesen Maschinen eine Rolle spielen, so genau und so vollständig wie möglich zu behandeln, damit die Materie durchsichtiger werde und man klar erkennen könne, wie jeder einzelne Umstand an dem Effekt der ganzen Maschine beteiligt ist.

Von dieser 70 Seiten umfassenden Arbeit möchte ich versuchen, ein Bild zu geben, soweit es in den wenigen Minuten möglich ist, die mir hier zugemessen sind.

Gegenstand der Untersuchung ist zunächst ein röhrenförmiger Laufkanal einer Turbine (Fig. 1), dessen Mittellinie eine beliebige Raum-

kurve ist, und dessen Querschnitt hinreichend klein gedacht ist, um annehmen zu dürfen, daß alle in einem Querschnitt befindlichen Wasserteilchen gleiche und gleich gerichtete Geschwindigkeit haben. Der Kanal dreht sich mit gleicher oder veränderlicher Geschwindigkeit um die beliebig gerichtete[1]) Drehachse *OO*, während das Triebwasser hindurchfließt.

An diesem Kanal ermittelt nun Euler zunächst das Drehmoment der Reaktion des Wassers unter der Voraussetzung, daß sowohl die gleichförmige oder ungleichförmige Bewegung des Rohres wie des Wassers bekannt ist, sodann aber die Bedingungen, von denen die Bewegung des Wassers abhängt,

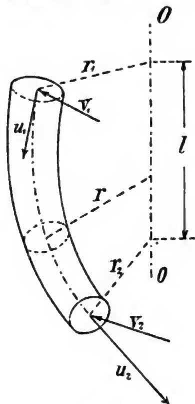


Fig. 1.

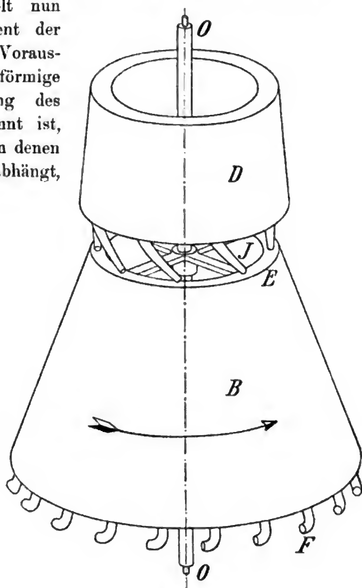


Fig. 2.

insbesondere den Einfluß der Höhe des Kanals und des Druckes in den Endquerschnitten. Der Gedankengang kommt sehr deutlich zum Ausdruck in den Überschriften der zwölf sogenannten *Probleme*, in welche der Gesamtinhalt der Abhandlung zerlegt ist. Ich werde diese Überschriften in möglichst sinngetreuer Übersetzung mitteilen. Da aber hierbei auf ein eigenes Turbinenprojekt Eulers Bezug genommen wird, so will ich zunächst auf Fig. 2 hinweisen, welche einer Eulerschen

1) In unserer Figur ist die Achse zur Erleichterung der Anschauung, abweichend von Euler, senkrecht gezeichnet.

Figur mit unwesentlichen graphischen Verbesserungen nachgebildet ist, und seine eigene Beschreibung in freier Übersetzung hinzufügen, welche sich bei der Behandlung des Problems IX findet.

„*O O* sei die senkrechte Achse, um welche sich die Maschine gleichmäßig drehen soll. Sie wird bestehen aus einer Anzahl gleicher Röhren, durch deren untere Mündungen *F* das Wasser entweicht, während die oberen Öffnungen in dem ringförmigen Raume *E* vereinigt sind. Es wird gut sein, alle diese Röhren in eine Trommel *B* einzuschließen, welche außen gut geebnet und poliert ist, damit der Widerstand der Luft nicht zu groß wird. Diese Trommel, die zur Gewichtsverminderung innen hohl ist, wird durh Arme mit der Achse verbunden, so daß sie mit ihr rotiert.

Über dieser beweglichen Trommel befindet sich der Behälter *D*, der ebenfalls trommelförmig aber unbeweglich und nicht mit der Achse *O O* verbunden ist, die in der Mitte hindurchgeht. Am Boden dieses Behälters befinden sich mehrere Kanäle *J*, durch welche das Wasser in das untere Gefäß geführt wird, unter einem Winkel, welcher in dem vorigen Problem berechnet[1]) wurde. Wenn nun der Behälter in das Gefäß ebensoviel Wasser liefert, wie durch die unteren Rohrenden *F* entweicht, so werden die Röhren des Gefäßes immer bis an den oberen Rand gefüllt bleiben, und die Bewegung des Wassers wird bald gleichförmig werden, vorausgesetzt, daß die Rotation, wie schon gesagt, mit gleicher Geschwindigkeit erfolgt, auch wird sie den Formeln entsprechend verlaufen, die vorstehend gefunden wurden“.

Ich komme nun zu den Problemüberschriften, in denen zunächst auf Fig. 1 Bezug genommen wird.

Problem I. Das Rohr drehe sich mit bekannter Geschwindigkeit um eine feste Achse, auch sei die relative Geschwindigkeit des Wassers in einem bestimmten Querschnitt des Rohres gegeben. Wie groß ist die relative und wie groß die absolute Geschwindigkeit des Wassers in irgendeinem anderen Querschnitt des Rohres?

Problem II. Die relative Geschwindigkeit des Wassers in dem Rohre und die Geschwindigkeit des Rohres selbst mögen irgendwie geändert werden. Welche Bewegungsänderung erfährt hierbei ein jedes Wasserteilchen, und welche Kräfte (Kraftkomponenten nach den Achsen eines festen rechtwinkligen Koordinatensystems) sind erforderlich, um diese Änderungen zu bewirken?

Problem III. Wie groß ist das gesamte Moment der im vorhergehenden Problem gesuchten Kräfte inbezug auf die Drehachse?

1) Nach der Bedingung stoßfreien Überganges aus den Leitkanälen in das Laufrad.

Problem IV. Die Drehachse sei senkrecht, die Bewegung des Rohres und des Wassers beliebig. Wie groß ist die Reaktionskraft, welche das Wasser auf das Rohr ausübt?

Problem V. Wie groß ist die auf ein Flüssigkeitsteilchen wirkende Kraft in Richtung der Rohrmittellinie, welche sich aus den im Problem II gesuchten Kräften ergibt, wenn der Widerstand der Rohrwand normal zur Rohrmittellinie stattfindet (d. h. die Reibung vernachlässigt wird)?

Problem VI. Die Drehbewegung des Rohres und die Bewegung des Wassers durch das Rohr sei bekannt, die Drehachse sei senkrecht. Welcher Druck findet in jedem Querschnitt des Rohres im Wasser statt?

Problem VII. Der Bewegungszustand der Drehung des Rohres um die senkrechte Achse sei gegeben. Mit welcher Geschwindigkeit wird das Wasser durch den unteren Rohrquerschnitt ausströmen?

Problem VIII. Das Rohr drehe sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit um die senkrechte Achse und werde beständig gefüllt erhalten. Mit welcher Geschwindigkeit wird das Wasser durch den unteren Rohrquerschnitt in jedem Augenblick ausströmen, nachdem dieser (plötzlich) geöffnet worden ist?

Problem IX. Denselben Zustand wie im vorigen Problem vorausgesetzt, wieviel Wasser ist in der Sekunde erforderlich, und mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung ist dasselbe zuzuführen?

Problem X. Sowohl die Gefällhöhe wie die Wassermenge, welche man zum Betrieb der Maschine verwenden kann, seien gegeben. Wie findet man die zur Konstruktion einer solchen hydraulischen Maschine erforderlichen Abmessungen?

Problem XI. Eine solche hydraulische Maschine sei für ein bestimmtes Gefälle und einen bestimmten Wasserverbrauch konstruiert. Wie findet man die Kraftleistung der Maschine, wenn sie mit einer bestimmten Geschwindigkeit in Umlauf gebracht wird?

Problem XII. Die Voraussetzung sei dieselbe wie beim vorigen Problem. Unter welchen Bedingungen wird man den größtmöglichen Effekt der Maschine erreichen?

Nachdem wir hiermit die Disposition der ganzen Abhandlung kennen gelernt haben, welche mit wenig Zutat auch heute noch recht wohl für eine ähnliche Arbeit zu brauchen wäre, will ich noch kurz auf die Durchführung der Untersuchungen und auf die Ergebnisse eingehen.

Beim Studium muß man sich zunächst mit den für den Leser von heute ungewohnten Größenbezeichnungen und Einheiten vertraut machen.

Euler bezeichnet sowohl Kraft wie Masse durch das Gewicht, und zwar benutzt er als Gewichtseinheit das Gewicht von 1 cbf Wasser.

Um nun in der Formel

$$\text{Kraft} = \alpha \times \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

für α die ihm bequeme Zahl 2 zu erhalten, bezieht er die Beschleunigung nicht auf 1 Sek. sondern auf die Zeiteinheit $\frac{1}{2\sqrt{g}}$ [1]), unter g die *halbe* Fallbeschleunigung, d. h. den Weg in der ersten Sekunde ($g = 15\frac{5}{8}$ rheinische Fuß) verstanden. Infolgedessen sind die Eulerschen Geschwindigkeiten $\frac{1}{2\sqrt{g}}$ mal, seine Beschleunigungen $\frac{1}{4g}$ mal so groß wie diejenigen für 1 Sek. Für diese Einheiten bedeutet $\frac{c^2}{4g}$ (g im Eulerschen Sinne) nicht die Geschwindigkeitshöhe h, sondern nur $\frac{h}{4g}$, wonach $\frac{c^2}{4g} = \frac{h}{4g}$, also $c = \sqrt{h}$ wird. Euler drückt nun alle Geschwindigkeiten durch die Quadratwurzel der Geschwindigkeitshöhe aus, auch wenn diese Höhe als geometrische Größe nicht vorkommt, z. B. die Umfangsgeschwindigkeit eines Punktes der Turbine durch $\sqrt{u}$, wonach der Weg pro Sekunde $2\sqrt{gu}$ wird.

Von den Resultaten ist eines der wichtigsten im Absatz L enthalten, nämlich der Ausdruck für das Drehkraftmoment des Wassers im Beharrungszustand, d. h. die Lösung des Problems III. Wie schon Zeuner hervorhebt, braucht dieser Ausdruck nur mit der Winkelgeschwindigkeit multipliziert zu werden, um die hydraulische Arbeit pro Sekunde zu erhalten. Unter Benutzung der jetzt üblichen Einheiten ergibt sich dann nach geringer Umformung die sehr bekannte Formel

$$A = \frac{1}{g}\left(v_2 c_2 \cos\alpha_2 - v_1 c_1 \cos\alpha_1\right), \tag{1}$$

in welcher bedeutet:

A die Arbeit von 1 kg/sek Wasser in kgm,

g die Beschleunigung des freien Falles,

v_1 und v_2 die mittleren Radgeschwindigkeiten des Eintritts- und des Austrittsquerschnitts,

c_1 und c_2 die absolute Wassergeschwindigkeit daselbst,

α_1 und α_2 die Winkel zwischen c_1 und v_1 und zwischen c_2 und v_2.

Aus dieser Gleichung erkannte Euler, daß für die Arbeitsleistung nur das erste und letzte Rohrelement und die daselbst stattfindende

1) Gleichbedeutend mit $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, wenn g die Fallbeschleunigung selbst bedeutet.

Wassergeschwindigkeit maßgebend ist, daß also die Gestalt des Rohres im übrigen hierbei nicht in Betracht kommt (Abs. LII). Er übersieht aber nicht (Abs. LVI), daß im Hinblick auf die Reibung und das erforderliche Gefälle die Form keineswegs gleichgültig ist, ohne jedoch mit der Rechnung darauf einzugehen.

Auf das Gefälle bezieht sich eine zweite Hauptgleichung, die Lösung des Problems VIII, welche im Absatz LXXXII entwickelt wird, und welche in den jetzt üblichen Einheiten lautet:

$$l = \frac{1}{2g}\left(u_2^2 - u_1^2 + v_1^2 - v_2^2\right). \tag{2}$$

Hier bedeutet:

l die Höhe des Laufrades in Metern,

u_1 und u_2 die relative Geschwindigkeit des Wassers in dem Eintritts- und in dem Austrittsquerschnitt.

Gleichung (2) gilt unter der hier zutreffenden Voraussetzung, daß in beiden Endquerschnitten der Laufkanäle gleicher Druck herrscht, also für sogenannte Druckturbinen. Für Überdruckturbinen würde an die Stelle von l die Summe aus der Laufradhöhe und der sogenannten Überdruckhöhe zu setzen sein. Hervorzuheben ist jedoch, daß der Gedanke der Überdruckturbine in der Eulerschen Arbeit noch nicht erkennbar ist, also wohl ihm selbst noch unbekannt war. Auch der Reibungswiderstand findet in dieser Formel noch nicht die Berücksichtigung, wie es heute nach dem Vorgang Weisbachs üblich ist. Im Abschnitt XCVI wird für die Leitkanäle ein Richtungswinkel berechnet, welcher der Bedingung stoßfreien Übergangs entspricht und zwar mit der Begründung „pour ne point troubler le mouvement de l'eau". Auch empfiehlt Euler bereits, die getrennten Leitkanäle durch die jetzt üblichen Schaufelkanäle zu ersetzen. Der Eintrittswinkel des Laufkanals wird dabei zu 90° angenommen, was Euler nach Abschnitt LXII (irrtümlicherweise) für *notwendig* hält.

Im Abschnitt CXVI endlich findet sich ausgeführt, daß das Wasser das Laufrad in senkrechter Richtung verlassen soll.

Für den praktischen Sinn Eulers und das praktische Ziel, welches er verfolgte, spricht der Umstand, daß er zum Schluß fünf Zahlenbeispiele berechnet.

Zur Verfolgung der algebraischen Entwicklungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden muß, gehört nichts weiter als etwas Geduld. Muß auch der Leser von heute manches für ihn Selbstverständliche dabei in Eulerscher Darstellung hinnehmen, wie z. B. im Eingang die Definitionen der Reaktion und der übrigen vorkommenden Kräfte, so

wird er dadurch angenehm berührt, daß sich nirgends ein Sprung im Gedankengang findet.

Um die Arbeit voll zu würdigen, muß man sich klar machen, daß dem Verfasser das Bild der Wirklichkeit vollständig fehlte, daß es sich nur um geistig Erarbeitetes handelt, dabei aber um eine Materie, die mit Eulers übrigen Arbeitsgebieten nur lose zusammenhing. Den Zusammenhang bildete freilich die *Mechanik*, die aus den Sternen abgelesene hohe Kunst, die Euler mit unvergleichlicher Meisterschaft beherrschte.

Ich möchte die Skizze nicht schließen, ohne noch erwähnt zu haben, daß die Versenkung in die Geheimnisse der Bewegung des Wassers in der Turbine der Weg war, der Euler dazu führte, ein Jahr später, 1755, die berühmte Arbeit „Principes généraux du mouvement des fluides“ in der Histoire de l'Académie Royale erscheinen zu lassen, durch welche er zum Begründer der theoretischen Hydraulik geworden ist.

Über Differentiierbarkeit stetiger Funktionen.

Von Georg Landsberg in Kiel.

Das Beispiel einer stetigen, nirgends differentiierbaren Funktion, das Herr G. Faber jüngst in diesem Jahresberichte veröffentlichte, hat mir eine Konstruktion ähnlicher Art in Erinnerung gebracht, die ich mir vor längerer Zeit, ebenfalls hauptsächlich zu Vorlesungszwecken, entwickelt hatte, und die wegen ihrer Einfachheit und Durchsichtigkeit vielleicht auch jetzt noch einiges Interesse finden kann.

Die Funktionen, die wir betrachten wollen, werden geometrisch auf folgendem Wege erzeugt. Wir beschränken die Variable x auf das Intervall von Null bis Eins und verbinden zunächst den Anfangspunkt des Koordinatensystemes mit dem Punkte $(1, h_0)$ durch eine Gerade L_0. Den Mittelpunkt dieser Geraden verschieben wir um die Strecke h_1 in vertikaler Richtung und verbinden ihn alsdann mit den Endpunkten von L_0 durch Gerade, so daß wir eine gebrochene Linie L_1 erhalten. Die Mittelpunkte der beiden geradlinigen Stücke von L_1 werden wiederum um die Strecke h_2 parallel der Ordinatenrichtung verschoben und sodann mit den End- und Eckpunkten von L_1 durch gerade Linien verbunden, so daß eine aus vier geraden Teilen bestehende gebrochene Linie L_2 entsteht. Aus dieser geht durch eine neue Verschiebung der Mittelpunkte um die Länge h_3 eine aus acht Teilstrecken bestehende

gebrochene Linie L_3 hervor. So fortgehend gelangen wir, nachdem die „Verschiebungsgrößen"

(1) $$h_0,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4, \ldots$$

fixiert sind, zu einer Folge gebrochener Linien

(2) $$L_0,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4, \ldots,$$

die der Reihe nach aus 1, 2, 4, 8, 16,... geraden Teilstrecken bestehen. Wir betrachten alsdann eingehender den Fall, in welchem die Verschiebungen (1) so gewählt sind, daß die Linien (2) gegen eine *stetige* Grenzkurve L gleichmäßig konvergieren.

Um die hierdurch bestimmten Funktionen analytisch darzustellen, bilden wir für unbeschränkt veränderliches x die stetige Funktion $g(x)$, welche die Periode 2 besitzt und im Intervalle von -1 bis $+1$ gleich $|x|$ ist. Dann ist

(3) $$y_r = g(2^r x)$$

diejenige Funktion, die sich ergibt, wenn in der Reihe (1) die Größe $h_r = 1$, alle übrigen Verschiebungsgrößen $= 0$ angenommen werden; die zugehörige Kurve besteht aus 2^r geraden Strecken, deren Eckpunkte die Punkte sind:

$$\left(\frac{\lambda}{2^r},\ \frac{1-(-1)^\lambda}{2}\right),\quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots 2^r).$$

Bei beliebiger Wahl dieser Verschiebungsgrößen gehört zur Linie L_n die stetige Funktion

(4) $$f_n(x) = h_0 y_0 + h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots + h_n y_n.$$

Treffen wir daher noch die weitere, durchweg im folgenden festgehaltene Voraussetzung, daß die Reihe

(5) $$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$$

absolut konvergiert, so konvergiert auch die Funktionsreihe

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x), \ldots$$

gleichmäßig gegen die Grenzfunktion:

(6) $$f(x) = h_0 y_0 + h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots$$

und stellt im Intervalle $0 \ldots 1$ die Kurve L dar. Zufolge der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (6) ist die Funktion $f(x)$ in diesem Intervalle kontinuierlich.

Die Funktion $f(x)$ läßt sich auch leicht durch eine Fouriersche Reihe darstellen. Es ist nämlich

$$y_0 = g(x) = \tfrac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\nu} \frac{\cos(\nu \pi x)}{\nu^2}, \tag{7}$$

wobei ν die Reihe der positiven ungeraden Zahlen durchläuft. Folglich ist

$$y_r = \tfrac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\nu} \frac{\cos(\nu 2^r \pi x)}{\nu^2} \qquad (\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots) \tag{8}$$

und

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \sum_{r} h_r - \frac{4}{\pi^2} \sum_{r,\nu} \frac{h_r \cos(\nu 2^r \pi x)}{\nu^2} \qquad \left(\begin{matrix} \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots \\ r = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}\right); \tag{9}$$

hierbei treten in der Doppelsumme rechts als Argument des Kosinus alle positiven ganzzahligen Vielfachen von πx und jedes nur einmal auf, und die Reihenfolge der Glieder ist wegen der absoluten Konvergenz der Reihe völlig gleichgültig. Übrigens ist die Darstellung der Funktion $f(x)$ durch die Fouriersche Reihe für das folgende nirgends erforderlich; sie kann gelegentlich für das Studium der Eigenschaften der Funktion mit Vorteil herangezogen werden und stellt die Verbindung mit den Differentiierbarkeitsuntersuchungen her, die von den in trigonometrische Reihen entwickelbaren Funktionen ausgehen, bildet aber nirgends einen integrierenden Bestandteil der Beweisführung.

Eine andere und ganz elementare Darstellung der Funktionen y_r und damit auch der Funktion $f(x)$ erhält man, wenn man die Variabele x im dyadischen System schreibt. Es sei $c_i = 0$ oder 1 und

$$x = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{8} + \cdots$$

oder

$$x = 0, c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots$$

Bildet man nun für den Wert x die Funktion $y_r = g(2^r x)$, so findet man leicht:

$$y_r = \begin{cases} 0, \; c_{r+1} \;\; c_{r+2} \;\; c_{r+3} \cdots \\ \text{oder} \\ 0, \; 1 - c_{r+1} \;\; 1 - c_{r+2} \;\; 1 - c_{r+3} \cdots, \end{cases} \tag{10}$$

je nachdem $c_r = 0$ oder $= 1$ ist; ist nämlich die größte in $2^r x$ enthaltene ganze Zahl gerade, so ist

$$y_r = g(2^r x) = 2^r x - [2^r x],$$

im entgegengesetzten Fall ist

$$g(2^r x) = 2^r(1-x) - [2^r(1-x)].$$

Wir berechnen nun die Änderung, welche die Funktion erfährt, wenn man das Argument um $\frac{1}{2^n}$ vermehrt, und bezeichnen diese mit $\Delta_n f(x)$, indem allgemein gesetzt wird:

$$\Delta_n \varphi(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{2^n}\right) - \varphi(x).$$

Es werde zunächst angenommen, daß in

$$x = 0,\ c_1\ c_2 \ldots\ c_{n-1}\ c_n\ c_{n+1} \ldots$$

$c_n = 0$ sei, so ist

$$x + \frac{1}{2^n} = 0,\ c_1\ c_2 \ldots\ c_{n-1}\ 1\ c_{n+1} \ldots$$

Alsdann ergibt sich aus der Gleichung (10) ohne weiteres:

$$\Delta_n y_0 = \frac{1}{2^n},\quad \Delta_n y_1 = \frac{(-1)^{c_1}}{2^{n-1}},\quad \Delta_n y_2 = \frac{(-1)^{c_2}}{2^{n-2}}, \ldots\quad \Delta_n y_{n-1} = \frac{(-1)^{c_{n-1}}}{2},$$

während

$$\Delta_n y_n = 1 - 2y_n$$

ist und alle $\Delta_n y_h$ für $h > n$ verschwinden, weil die Funktionen y_{n+1}, $y_{n+2}, \ldots$ die Periode 2^{-n} haben. Hiernach ist, wenn $c_n = 0$:

$$(11)\qquad \Delta_n f(x) = \frac{h_0}{2^n} + (-1)^{c_1}\frac{h_1}{2^{n-1}} + (-1)^{c_2}\frac{h_2}{2^{n-2}} + \cdots + (-1)^{c_{n-1}}\frac{h_{n-1}}{2}$$
$$+ h_n(1 - 2y_n).$$

Ist also x ein *endlicher* dyadischer Bruch mit weniger als n Ziffern, so ist $y_n = 0$ und der Differenzenquotient:

$$(12)\qquad \frac{f\left(x + \frac{1}{2^n}\right) - f(x)}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \Delta_n f(x) = h_0 + (-1)^{c_1} 2h_1 + (-1)^{c_2} 2^2 h_2 + \cdots$$
$$+ (-1)^{c_{n-1}} h_{n-1} 2^{n-1} + h_n 2^n.$$

Soll also für jeden solchen Wert von x mit unbegrenzt wachsendem n ein Grenzwert eintreten, so ist es notwendig und hinreichend, daß die Reihe

$$(13)\qquad h_0 + 2h_1 + 2^2 h_2 + 2^3 h_3 + \cdots$$

konvergent ist; diese Bedingung fordert aber erheblich mehr als die Bedingung der Konvergenz der Reihe (5), welche für die Existenz der Grenzfunktion $f(x)$ ausreichend war. Divergiert also die Reihe, so besitzt die Funktion $f(x)$ für keinen Wert x, der als Bruch mit dem Nenner 2^n dargestellt werden kann, einen endlichen Differentialquotienten. Um auch das Auftreten unendlich großer Differentialquotienten auszuschließen, braucht man nur dafür Sorge zu tragen, daß die Reihe (13) in oszillierender Weise divergiert, was z. B. dann eintritt, wenn

$$h_r = (-1)^r \left(\frac{\alpha}{2}\right)^r$$

und $1 \leq \alpha < 2$ angenommen wird.

Dieselbe Bedingung genügt aber auch, um die Existenz von Differentialquotienten in einem beliebigen Punkte des Intervalles von 0 bis 1 als unmöglich zu erweisen. Nimmt man nämlich in der Gleichung (11), was statthaft ist, $y_n = 0$, $c_{n+1}\ c_{n+2} \cdots = 1$, also

$$x = 0,\ c_1 c_2 \cdots c_{n-1}\, 011 \cdots = 0,\ c_1 \cdots c_{n-1}\, 1,$$

so folgt nunmehr für jeden dyadischen Bruch

$$\frac{l}{2^n} = 0,\ c_1 c_2 \cdots c_{n-1} c_n$$

mit n oder weniger als n Ziffern:

$$(14) \quad 2^n\left(f\left(\frac{l+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{l}{2^n}\right)\right) = h_0 + (-1)^{c_1} 2h_1 + (-1)^{c_2} 2^2 h_2 + \cdots + (-1)^{c_n} 2^n h_n.$$

Ist also $\alpha = 0, c_1 c_2 \ldots$ ein unendlicher dyadischer Bruch und $\frac{l_n}{2^n}$ der mit den ersten n Ziffern von α gebildete n-stellige Bruch, so ist

$$\frac{l_n}{2^n} < \alpha < \frac{l_n + 1}{2^n};$$

wenn nun die stetige Funktion $f(x)$ bei $x = \alpha$ eine Ableitung $f'(\alpha)$ besäße, so müßte gegen denselben Wert auch der Ausdruck

$$2^n\left(f\left(\frac{l_n+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{l_n}{2^n}\right)\right)$$

für $n = \infty$ konvergieren, was zufolge der Gleichung (14) und der Voraussetzung der Divergenz der Reihe (13) nicht der Fall ist. (s. d. Anm.)

Wenn andererseits die Reihe (13) absolut konvergiert, so besitzt die Funktion $f(x)$ in jedem Punkte einen bestimmten vorderen und einen bestimmten hinteren Differentialquotienten, die im allgemeinen

nicht gleich zu sein brauchen. Denn die durch die Funktion y_r dargestellte gebrochene Linie besitzt abwechselnd die Steigung $+2^r$ und -2^r, wobei das Vorzeichen für einen gegebenen Punkt und eine gegebene Richtung des Fortschreitens völlig bestimmt ist. Also ergibt sich für die Funktion $f(x)$

$$\lim_{\alpha=0} \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} = h_0 \pm 2h_1 \pm 2^2 h_2 \pm \cdots,$$

wobei die Vorzeichen der Reihe rechts durch die Wahl von x und das Vorzeichen von α eindeutig bestimmt sind. Z. B. ergibt sich für $x = \frac{1}{2}$ und positives α die Reihe

$$h_0 - 2h_1 + 2^2 h_2 + 2^3 h_3 + 2^4 h_4 \cdots,$$

während bei negativem α die Reihe

$$h_0 + 2h_1 - 2^2 h_2 - 2^3 h_3 - 2^4 h_4 - \cdots$$

auftritt. Beide Differentialquotienten sind also nur dann einander gleich, wenn

$$h_1 = 2h_2 + 2^2 h_3 + \cdots$$

ist.

Anmerkung. In der obigen Deduktion wurde der Satz benutzt: wenn eine stetige Funktion $f(x)$ bei $x = \alpha$ einen bestimmten Differentialquotienten $C = f'(\alpha)$ hat, und es ist

$a_1 \; a_2 \; a_3 \ldots$ eine wachsende,

$b_1 \; b_2 \; b_3 \ldots$ eine abnehmende Folge von Zahlen

mit dem Grenzwert α, so ist auch

$$(Q) \lim_{n=\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n - a_n}$$

vorhanden und gleich C. Setzt man nämlich

$$\frac{f(a_n)-f(\alpha)}{a_n-\alpha} = A_n, \qquad \frac{f(b_n)-f(\alpha)}{b_n-\alpha} = B_n,$$

so ist

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{(b_n-\alpha)B_n + (\alpha-a_n)A_n}{b_n-a_n},$$

also da $b_n - \alpha$ und $\alpha - a_n$ positiv sind, ein Mittelwert zwischen A_n und B_n. Konvergiert also A_n und B_n gegen den Grenzwert C, so tut auch der Quotient (Q) das gleiche. Die Deduktion würde unzulässig sein, falls die obigen Zahlenfolgen a_n und b_n beide von *derselben* Seite her an α heranrücken würden.

Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen.

Von G. Frege in Jena.

Der formalen Arithmetik gegenüber steht die inhaltliche. Sie unterscheiden sich, wie folgt. In der inhaltlichen Arithmetik sind die Zahlzeichen wirklich Zeichen, bloße Hilfsmittel der Forschung, dazu bestimmt, Zahlen zu bezeichnen, wobei diese die unsinnlichen Gegenstände der Wissenschaft sind. In der formalen Arithmetik sind die Zahlzeichen selbst die Zahlen, nicht bloße Hilfsmittel, sondern Gegenstände der Forschung.

Der Grundgedanke der Thomaeschen formalen Arithmetik wird in der Kürze so wiederzugeben sein.

Herr Thomae vergleicht die formale Arithmetik mit dem Schachspiele. Den Schachfiguren, deren Handhabung durch die Regeln dieses Spieles beherrscht wird, entsprechen gewisse durch Schreiben oder Drucken hergestellte räumliche, sichtbare Gebilde, die Herr Thomae Zeichen nennt. Auch über deren Behandlung sollen Regeln aufgestellt werden, die Spielregeln des Rechenspiels. Nun stoßen wir aber gleich auf eine Schwierigkeit. Der Anfänger im Schachspiele wird zunächst mit dem Schachbrette und den Schachfiguren bekannt gemacht, als den Dingen, an und mit denen die Spielhandlungen vorgenommen werden. Solche Dinge mögen Spielgegenstände heißen. Nun ist die erste Frage: welche Spielgegenstände haben wir im Rechenspiele? Herr Thomae schreibt[1]):

„Das Zeichensystem des Rechenspiels wird aus den Zeichen

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

in bekannter Weise hergestellt."

Wenn er einfach sagte, das Rechenspiel habe als Spielgegenstände jene Ziffern, so wären wir zufrieden. Nun scheint er aber sagen zu wollen, daß die Spielgegenstände aus diesen Ziffern erst hergestellt werden, und zwar in bekannter Weise. Wie soll uns die Sache bekannt sein, da wir das Rechenspiel doch erst kennen lernen wollen? Herr Thomae macht hier den immer bei ihm wiederkehrenden Fehler, das als bekannt vorauszusetzen, wozu er erst den Grund legen will. Man kann doch wirklich nicht wissen, ob er »23«, »$\frac{2}{3}$«, »$2 - 3$«, »$2 : (5 + 3)$«, »$\sqrt{3}$«, »$3 > 2$«, »$2 \cdot 2 = 4$«, »$\int_0^1 \frac{d\xi}{1 + \xi^2}$«,

1) Dieser Jahresbericht XV, S. 435.

»2 · a«, »1 — $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{7}$ · · ·«[1]) zu den Zeichen rechnet, von denen er hier spricht, die also den Schachfiguren zu vergleichen sind. Wer die Arithmetik kennt, weiß ja wohl, daß solche Gruppen vorkommen. Insofern kann man sagen, daß sie aus jenen Ziffern in bekannter Weise hergestellt sind. Aber damit weiß man doch noch nicht, ob Herr Thomae sie als Spielgegenstände ansieht. Es kommen ja außer den Ziffern noch andere Gebilde darin vor: Bruchstrich, Divisionsdoppelpunkt, Wurzelzeichen, Gleichheitszeichen, Klammern, Pünktchen, Buchstaben usw.; sollen nun etwa diese Gebilde im Rechenspiele überhaupt nicht vorkommen? oder sollen sie ebenfalls Spielgegenstände sein? oder sollen nur gewisse Gruppen, in denen sie mit Ziffern zusammen vorkommen, den Schachfiguren vergleichbar sein? Wir wissen es nicht. Und dabei sagt Herr Thomae „in bekannter Weise"! Diese Ungewißheit, in der wir gelassen werden, ist der blaue Dunst, der dem Gedeihen des Rechenspiels augenscheinlich sehr günstig ist. Trösten wir uns zunächst damit, daß wir ja die Regeln des Rechenspiels kennen lernen werden. Dabei werden wir ja voraussichtlich sehen, von welchen Dingen diese handeln.

Die zweite Frage ist die nach den Spielhandlungen. Welcher Art die Spielhandlungen beim Schach sind, ist bekannt. Es wird eine Figur von einem Felde des Schachbretts auf ein anderes versetzt oder ganz vom Brette entfernt usw. Auf diese Handlungen beziehen sich die Regeln des Schachspiels. Schwieriger ist die Frage zu beantworten, welcher Art die Spielhandlungen im Rechenspiele seien. Vielleicht bestehen sie darin, daß man gewisse Gebilde durch Schreiben erzeugt, oder schon hingeschriebene wieder auslöscht. Aber, um alles in der Welt, wie kann das zweifelhaft sein? das muß ja aus den Regeln des Rechenspiels deutlich hervorgehen!

Die erste der Formeln, in denen nach Herrn Thomae die Regeln seines Spieles enthalten sein sollen, sieht so aus

$$»a + a' = a' + a«.$$

Diese Formel gehörte, im Sinne der inhaltlichen Arithmetik verstanden, als ein Lehrsatz eben dieser, nicht aber der formalen Arithmetik an. Sie darf aber nicht so verstanden werden, weil die inhaltliche Arithmetik nicht vorausgesetzt werden darf. In der formalen aber ist nirgends vorher dieser Formel ein Sinn beigelegt worden, weder als einem Ganzen, noch dadurch, daß alle Teile einzeln erklärt wären. Das aufrechte Kreuz ist überhaupt noch nicht vorgekommen. Diese Formel ist also in der formalen Arithmetik vollkommen sinnlos, ebenso sinnlos wie eine Gruppe von Schachfiguren, bevor ihr noch irgendwie ein Sinn beigelegt, bevor auch noch irgendeine Regel des Schachspiels aufgestellt worden wäre. Nun soll freilich den Spielgegenständen — „Zeichen" — des Rechenspiels durch die Spielregeln so etwas wie ein Inhalt beigelegt werden. Ob das nun möglich sei oder nicht, jedenfalls ist dieser In-

1) Ich gebrauche hier die Anführungszeichen, weil ich nicht das meine, was in der inhaltlichen Arithmetik mit diesen Gruppen bezeichnet wird, sondern diese selbst, bloß als sichtbare, körperliche Dinge.

halt nicht schon vorhanden, bevor irgendeine Regel aufgestellt worden ist. Regeln sind entweder gebietend, oder verbietend, oder erlaubend. Nirgends ist aber in der formalen Arithmetik ein Zeichen mit gebietender, verbietender oder erlaubender Kraft erklärt worden. So löst sich denn gleich die erste Regel des Rechenspiels in Dunst auf, und damit löst sich das Rechenspiel selber in Dunst auf.

Man möchte vielleicht versuchen, dieser Folgerung dadurch zu entgehen, daß man nicht die ganze Formel, sondern nur einen Teil, z. B. das Gleichheitszeichen, im Sinne der inhaltlichen Arithmetik verstände. Welches ist nun dieser Sinn? Das Gleichheitszeichen kommt nur zwischen Zeichen und Zeichengruppen vor. Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten, wie in

$$»\tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{19}{15}«,$$

steht links ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen, das etwas bezeichnet, und ebenso rechts. Das, was ein Zeichen bezeichnet, nenne ich seine Bedeutung. Das Gleichheitszeichen bezeichnet nun eine gewisse Beziehung und dient uns dazu, auszudrücken, daß diese Beziehung zwischen der Bedeutung des links stehenden und der des rechts stehenden Zeichens stattfinde.

Im andern Falle, wie in

$$»a + b = b + a«,$$

haben wir Buchstaben. Von diesen kann man nicht sagen, daß sie wie die Zahlzeichen »2«, »$\frac{1}{2}$« etwas bezeichnen. Sie haben zwar keine Bedeutung, tragen aber zum Sinne des Satzes etwas bei. Ich sage: sie deuten an, um dem Satze Allgemeinheit des Inhaltes zu verleihen. Es soll damit gesagt werden, daß wir immer etwas Wahres erhalten, welche Zahlen wir auch unter dem Buchstaben verstehen mögen. Damit also unsere Formel in der inhaltlichen Arithmetik einen Sinn habe, müssen wir wieder auf den ersten Fall zurückkommen, wenn wir die Buchstaben durch Zahlzeichen ersetzen.

Wenn aber in Verbindung mit dem Gleichheitszeichen geschriebene oder gedruckte Gebilde vorkommen, die weder in der inhaltlichen Arithmetik einen Sinn haben, noch auch Buchstaben sind, wie in

$$»\S\S = \pounds«,$$

so kann der Sinn, den das Gleichheitszeichen sonst in der inhaltlichen Arithmetik hat, nicht zur Geltung kommen; eine solche Verbindung hat keinen Sinn.

Diesem Falle gleich zu achten ist der Fall, daß alle vorkommenden Zeichen zwar sonst im Sinne der inhaltlichen Arithmetik verstanden werden können, hier aber nicht so verstanden werden sollen, wie wenn in

$$»\tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{3}«$$

»$\frac{2}{3}$« und »$\frac{3}{5}$« nicht als Zahlzeichen im Sinne der inhaltlichen Arithmetik zu verstehen sind, sondern etwa Spielgegenstände des Rechenspiels sein sollen.

Das Gleichheitszeichen kann also nur dann im Sinne der inhaltlichen Arithmetik verstanden werden, wenn die ganze Formel, deren Teil sie ist, im Sinne der inhaltlichen Arithmetik zu verstehen ist. Entweder gehört mithin die Formel

$$»a + a' = a' + a«$$

der inhaltlichen Arithmetik als Lehrsatz an, oder sie ist überhaupt sinnlos. In keinem Falle haben wir eine Regel.

Herr Thomae verfällt dadurch in Irrtum, daß er als Spielgegenstände Gebilde nimmt, die so aussehen wie die Zahlzeichen der inhaltlichen Arithmetik. Wie die Spielgegenstände aussehen, muß ja eigentlich unwesentlich für das Spiel sein, wenn nur diejenigen deutlich verschieden sind, die in den Regeln unterschieden werden, und wenn die Spielhandlungen möglich sind. So könnte man z. B. im Schachspiele statt der Türme, Springer, Läufer, Damen, Könige Figuren nehmen, die Kanonen, Ulanen, Leutnants, Obersten, Generale vorstellen, und könnte mit diesen ebenso gut spielen wie mit den sonst üblichen. Ebenso müßte es möglich sein, das Rechenspiel mit geschriebenen Gebilden zu spielen, die ganz anders aussähen, als die Zeichen der Arithmetik, etwa so

↦ ⌶ ⋗ ⋖ ⋈ § ◡ ◠ ⫑ ⫒ 𝒟 𝒞 £ $[1]).

Aber es geht nicht. Warum geht es nicht? Warum müssen die Spielgegenstände mit den Zeichen der inhaltlichen Arithmetik übereinstimmen? Weil die formale Arithmetik den Sinn nötig hat, den ihre Gegenstände in der inhaltlichen Arithmetik haben. Sie ist einem Schlinggewächse vergleichbar, das sich an der inhaltlichen Arithmetik emporrankt, und das jeden Halt verliert, wenn man ihr diese Stütze und Nahrungsquelle nimmt. Die formale Arithmetik setzt demnach die inhaltliche voraus; ihr Anspruch, diese zu ersetzen, fällt damit zu Boden.

Hinsichtlich des Rechenspiels haben wir demnach festgestellt:

1. Es wird uns nicht vollständig gesagt, mit welchen Spielgegenständen wir es zu tun haben.

2. Es ist völlig im Dunkeln gelassen, worin die Spielhandlungen bestehen.

Über diese beiden Punkte müßte leicht ins klare zu kommen sein, wenn uns die Spielregeln mitgeteilt würden; aber

3. was uns als Spielregeln dargeboten wird, hebt uns über jene Zweifel nicht hinweg. Diese Formeln sind in der formalen Arithmetik sinnlos. Um ihnen einen Sinn zu geben, müßte man die inhaltliche Arithmetik in ihrer Ausdehnung auf negative, gebrochene usw. Zahlen heranziehen, was erstens unstatthaft ist und zweitens keine Regeln ergeben würde.

---

1) Niemand würde dann freilich auf den Gedanken kommen, in

⋖ § 𝒟 ⋈ 𝒟 § ⋖

eine Spielregel zu sehen.

Bemerkung zum Aufsatze des Herrn Frege.

Von J. THOMAE in Jena.

Daß ich in eine Polemik mit Herrn Frege nicht eintreten werde, habe ich bereits mit Angabe von Gründen erklärt. Ich muß aber hier die Ehre von mir ablehnen, eine formale Arithmetik erfunden zu haben. Diese ist mir zuerst bei Hankel in seiner „Theorie der komplexen Zahlensysteme" begegnet. Hankel zitiert als einen Vorgänger Ohm. Ich habe nur mit mehreren anderen versucht, die formale Arithmetik auf irrationale Gebilde anzuwenden.

Schlußbemerkung.

Von G. FREGE in Jena.

In dem oben stehenden Aufsatze habe ich eine Theorie sachlich und ernsthaft bekämpft. Wenn Herr Thomae dagegen etwas einzuwenden weiß, so ist es seine Pflicht, das zu tun. Damit hinter dem Berge zu halten, dafür gibt es überhaupt keinen stichhaltigen Grund, es sei denn andauernde Schwäche. Eine Lehre, die, ernsthaft angegriffen, nicht mehr verteidigt wird, muß nach den allgemeinen Grundsätzen des wissenschaftlichen Betriebes als widerlegt gelten.

Sprechsaal für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Professor Dr. Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.]

In III C 2 sind zwei sinnstörende Druckfehler zu verbessern:

S. 177 Z. 4 des Textes v. u.: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} + 2z = 0$, statt $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} + 2x = 0$.

S. 189 Z. 8 des Textes v. u.: ist *eine* Erzeugende der einen Schar, statt: ist jede Erzeugende der einen Schar. STAUDE.

Populäre Astrophysik.

Von Dr. **J. Scheiner,**

a. o. Professor der Astrophysik an der Universität Berlin,
Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam.

Mit 30 Tafeln und 210 Figuren im Text

[VI u. 718 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—.

Inhalt: Die astrophysikalischen Methoden. Physikalische und physiologische Grundlagen. Die Spektralanalyse. Die Photometrie. Die strahlende Wärme der Sonne. Die Himmelsphotographie. Die Ergebnisse der astrophysikalischen Forschung. Die Sonne. Die Planeten, Monde, Kometen, Meteore, das Zodiakallicht. Die Nebelflecken. Die Fixsterne.

Das Werk, aus einem vom Verfasser an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungszyklus entstanden, versucht, zum ersten Male in allgemeinverständlicher Weise die Instrumente, Theorien und Ergebnisse des Gesamtgebietes der Astrophysik, die in den letzten Jahrzehnten einen außerordentlichen Aufschwung genommen hat, in ausführlicherer Weise, als dies in den populären Astronomien möglich ist, einem gebildeten Leserkreise vorzuführen.

Dieser jüngste Zweig der Astronomie ist aber bereits ein so entwickelter, daß es unmöglich gewesen wäre, in nur einem Bande eine in historischer Beziehung vollständige Darstellung zu geben. Der Verfasser mußte daher aus dem großen Materiale eine Auswahl treffen und somit dem Buche einen subjektiven Charakter geben, der ja für eine allgemeinverständliche Darstellung auch am angemessensten erscheint.

Die Populäre Astrophysik will den zahlreichen Gebildeten, denen der erweiterte Blick ins Weltall als einer der schönsten und reinsten Genüsse erscheint, als Führer in das Gebiet der physikalischen Erforschung der Himmelskörper dienen.

Zahlreiche Reproduktionen von photographischen Himmelsaufnahmen gewähren hierbei eine bessere Anschauung von den verschiedenartigen Welten, als die direkte Beobachtung im Fernrohr dem ungeübten Beobachter zu liefern vermag.

Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums.

Von **Otto Gilbert.**

Von der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften mit dem Zographospreise gekrönt.

Mit 12 Fig. im Text. [V u. 746 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 20.—, in Halbfrz. geb. n. ℳ 22.50.

Nachdem in einem einleitenden Kapitel das Verhältnis der *μετέωρα* und Elemente festgestellt worden ist, gibt der allgemeine Teil eine Elementenlehre der Griechen und behandelt in zehn Kapiteln 1. die Volksanschauung, 2. die Ionier, 3. die Pythagoreer, 4. die Eleaten, 5. Empedokles, 6. die Atomisten, 7. Plato, 8. Aristoteles, 9. Epikur, 10. die Stoiker. Der spezielle Teil legt sodann die meteorologischen Theorien selbst dar. Hier kann die Meteorologie nicht in dem beschränkenden Sinne des Aristoteles, sondern muß in der umfassenderen, allgemeinen Auffassung genommen werden, nach der auch die ätherischen Erscheinungen des Himmels als *μετέωρα* bezeichnet werden. In wieder zehn Kapiteln werden so behandelt 1. der Erdkörper (Erdbeben), 2. das Erdelement, 3. das Wasser, 4. die tellurischen Ausscheidungen, 5. Atmosphäre und atmosphärische Niederschläge, 6. Windgenese, 7. Windsysteme, 8. atmosphärische Spiegelungen, 9. das atmosphärische Feuer, 10. das ätherische Feuer. Was dieses letzte Kapitel betrifft, so kann es sich hier nur um diejenigen Erscheinungen handeln, die (wie Achilles isag. 2 p. [illegible]0 M. im Sinne des Posidonius darlegt) ihrem Wesen nach aus dem Feuerelemente des Himmels, als dem besonders reinen und göttlichen, sich gestalten, während alle astronomischen Fragen ausgeschlossen bleiben.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 2. HEFT. FEBRUAR.
MIT 6 TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 24. MÄRZ 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Das nächste Heft wird Ende April ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Über ein Problem der Diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré.

Von Ludwig Schlesinger in Klausenburg.[1])

Der XI. Band (1830) der „Mémoires de l'Académie impériale de St. Pétersbourg", der den Nebentitel führt „Mémoires de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuß" enthält u. a. drei Abhandlungen Eulers:

1. De insigni promotione Analysis Diophanteae; pag. 1—11; vom 12. Juni 1780;

6. De resolutione huius aequationis:

$$0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2$$

per numeros integros; pag. 58—68; vom 9. Oktober 1780;

7. Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi; pag. 69—91; vom 16. Oktober 1780,

die sich auf den im Titel der dritten Abhandlung (7.) bezeichneten Gegenstand beziehen.

Es handelt sich darum, diejenigen rationalen Zahlen zu finden, die für x in den Ausdruck

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

ist, so muß y eine Lösung der Gleichung

(1) $$Qy^2 + 2Py - R = 0$$

sein, deren linke Seite nach Potenzen von x geordnet mit

$$Sx^2 + Tx + U$$

bezeichnet werden mag, und die Euler die *aequatio canonica* nennt. Ist nun ein rationales Wertepaar $x = \alpha$, $y = \beta$ bekannt, das der kanonischen Gleichung (1) genügt, so findet man auf folgende Weise andere Wertepaare von derselben Beschaffenheit.

Dem $y = \beta$ entspricht vermöge der Gleichung (1) oder

(2) $$Sx^2 + Tx + U = 0$$

außer $x = \alpha$ noch $x = \gamma$, wo

$$\gamma = -\frac{T(\beta)}{S(\beta)} - \alpha.$$

Dem $x = \gamma$ entsprechen $y = \beta$ und $y = \delta$, wo

$$\delta = -\frac{2P(\gamma)}{Q(\gamma)} - \beta;$$

dem $y = \delta$ entsprechen $x = \gamma$ und $x = \varepsilon$, wo

$$\varepsilon = -\frac{T(\delta)}{S(\delta)} - \gamma,$$

usw. — Man hat dann in $\alpha, \gamma, \varepsilon, \cdots$ rationale Werte von x, die den Ausdruck V zu einem Quadrat machen, nämlich:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= (P(\alpha) + \beta Q(\alpha))^2, \\ V(\gamma) &= (P(\gamma) + \beta Q(\gamma))^2 = (P(\gamma) + \delta Q(\gamma))^2, \\ V(\varepsilon) &= (P(\varepsilon) + \delta Q(\varepsilon))^2 = \quad \cdots \quad, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Man kann die Ausgangswerte $x = \alpha$, $y = \beta$ auch miteinander vertauschen und erhält, indem man mit $y = \beta$, $x = \alpha$ beginnt, eine *series retrograda*, deren zweites, viertes, ... Glied dann geeignete x-Werte liefert.

Im allgemeinen erhält man durch dieses Verfahren unendlich viele x-Werte, die V zu einem Quadrat machen; es kann sich aber ereignen, daß die Reihe dieser x-Werte *abbricht*, und zwar entweder dadurch, daß man einmal zu einem unendlich großen Werte kommt[1]) oder aber,

1) Was natürlich bei homogener Schreibweise nicht wesentlich stört. In homogenen Variabeln kommt das von Euler behandelte Problem darauf hinaus, die Gleichung

$$z^2 = Ay^4 + Bxy^3 + Cx^2y^2 + Dx^3y + Ex^4$$

in ganzen Zahlen x, y, z zu lösen.

indem man zu dem Ausgangswerte zurückgeführt wird. Z. B. kann man den Ausdruck $1 + x^3$ nur auf drei verschiedene Arten zu einem Quadrat machen, nämlich mit den Werten

$$x = 0, \quad -1, \quad +2.$$

Daß Ausgangswertepaar $x = \alpha$, $y = \beta$ muß bekannt sein, es heißt ein *primitives*. Man findet es oft durch die kanonische Gleichung, wenn z. B. eine der Gleichungen

$$Q = 0, \quad S = 0, \quad R = 0, \quad U = 0$$

eine rationale Wurzel hat.

Die Aufgabe, V in die Form $P^2 + QR$ zu setzen, kann, wenn man Werte von x kennt, die V zu einem Quadrat machen, durch die folgenden Methoden gelöst werden, die sich übrigens noch auf mannigfache Weise variieren lassen.

1. Es sei $x = a$ ein bekannter Wert, für den

$$V(a) = f^2$$

wird. Man setze

$$x = a + t$$

in V ein; dann wird

$$V = f^2 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4.$$

Nimmt man

$$P = f + \frac{\alpha t}{2f},$$

so ist

$$QR = V - P^2 = t^2\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4f^2} + \gamma t + \delta t^2\right).$$

2. Man kann auch

$$P = f + \frac{\alpha t}{2f} + \theta t^2$$

nehmen und θ so bestimmen, daß in $V - P^2$ auch das Glied mit t^2 wegfällt, also

$$\theta = \frac{\beta}{2f} - \frac{\alpha^2}{8f^3}\,^{1)};$$

dann ist

$$QR = t^3(\gamma' + \delta' t).$$

Kennt man zwei Werte $x = a$, $x = b$, für die V ein Quadrat wird, so kann man es so einrichten, daß QR den Faktor $(x - a)\,(x - b)$

1) Bei Euler (a. a. O. p. 84, erste Zeile) steht für θ irrtümlicher Weise der Wert

$$\frac{\beta}{2f^2} + \frac{\alpha^2}{8f^3}.$$

erhält; kennt man drei solche Werte $x = a, b, c,$ so kann man QR den Faktor

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

verschaffen.

Soweit, im kurzen Auszuge, die Methode von Euler.

* * *

Mit der von Euler behandelten Aufgabe hatte sich auch schon P. Fermat beschäftigt, und zwar enthält der dritte Teil des Traktates:

Doctrinae analyticae inventum novum; Collectum a R. P. Iacobo de Billy, S. I. Sacerdote, ex varijs Epistolis quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus[1]) (36 pagg.)

die auf den gedachten Gegenstand bezüglichen Untersuchungen Fermats.

Fermat beginnt mit dem Falle, wo in dem Ausdrucke[2])

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

entweder das absolute Glied oder der Koeffizient von x^4 eine Quadratzahl ist. Um dann rationale Werte x zu finden, die V zu einem Quadrate machen, hat man z. B. in dem Falle, wo das absolute Glied eine Quadratzahl also

$$V = f^2 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4$$

ist, wie folgt zu verfahren. Man setze

$$P = f + \frac{\alpha}{2f}x + \left(\frac{\beta}{2f} - \frac{\alpha^2}{8f^3}\right)x^2$$

und berechne aus der Gleichung

$$V - P^2 = 0$$

den rationalen Wert von x. — Diese Methode Fermats stimmt also

1) Dieser Traktat ist in der 1670 von Samuel Fermat (dem Sohne) veranstalteten Ausgabe der Arithmetik des Diophant erschienen. Eine vortrefflich lesbare französische Übersetzung von Paul Tannery ist im III. Bande der *Œuvres de Fermat* (Paris MDCCCXCVI), p. 323—398 abgedruckt. Ich zitiere nach dieser Übersetzung, da mir das Original unzugänglich ist. Der hier in Betracht kommende dritte Teil befindet sich a. a. O. p. 376ff. Daß Fermat sich mit der in Rede stehenden Aufgabe beschäftigt hat, bemerkt u. a. Bachmann, Enzyklopädie der math. Wissensch. Art. IC1, Bd. I, p. 572 (erschienen 29. 5. 00); ein genaues Zitat findet sich in der französischen Ausgabe der Enzyklopädie, tome I, vol. 3, p. 34, Fußnote 180) (von P. Tannery) (ausgegeb. 10. 7. 06).

2) Ich benutze bei der Darstellung der Fermatschen Untersuchungen die von Euler gebrauchten Bezeichnungen, um die Vergleichung zu erleichtern. Es ist dies um so unbedenklicher, als Fermat bzw. Billy selbst überhaupt keine Buchstabengleichungen schreibt, sondern die Regeln allgemein in Worten ausspricht und dann an numerischen Beispielen erläutert. Die letzteren reproduziere ich in der von P. Tannery gegebenen Schreibweise.

vollständig mit dem oben (S. 59) unter 2. beschriebenen Verfahren Eulers überein.

Wenn sowohl das absolute Glied als auch der Koeffizient von x^4 Quadratzahlen sind, so kann die Methode auf mannigfache Weise variiert werden. So gibt Fermat für das Beispiel

(3) $$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1$$

sechs verschiedene Methoden, die alle *verschiedene* Lösungen liefern.

Er nennt die so erhaltenen Lösungen *primitive* und geht nun sofort dazu über, allgemein aus einer primitiven Lösung $x = a$ *derivierte* Lösungen zu finden[1]). Zu dem Ende hat man nur

$$x = t \pm a$$

in den Ausdruck V einzusetzen, nach t zu ordnen und dann die für den Fall, wo das absolute Glied eine Quadratzahl ist, angegebene Methode anzuwenden. So ist für das Beispiel (3)

$$x = -3$$

eine Lösung. Bildet man

$$(x-3)^4 + 4(x-3)^3 + 10(x-3)^2 + 20(x-3) + 1$$
$$= x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 40x + 4,$$

so ist nach der vorhin gegebenen Regel

(5) $$P = 2 - 10x - 28x^2$$

zu setzen; wir finden also aus

$$x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 40x + 4 - P^2 = 0$$

die Lösung $-\frac{368}{323}$. Zu dieser ist, um eine Lösung für den ursprünglichen Ausdruck (3) zu erhalten, -3 hinzuzufügen; man erhält so als *derivierte Lösung ersten Grades:* $x = -\frac{1337}{323}$.

Statt P gleich dem Ausdrucke (5) zu wählen, kann man auch

$$P = x^2 - 4x - 2$$

nehmen. Dies gibt als erste derivierte Lösung $x = \frac{1}{2}$. Fermat leitet nun aus dieser eine *derivierte Lösung zweiten Grades* ab, indem er in (4) an Stelle von x den Ausdruck $x + \frac{1}{2}$ einsetzt. Er erhält

$$x^4 + 6x^3 + \tfrac{35}{2}x^2 + \tfrac{67}{2}x + \tfrac{225}{16};$$

setzt man dies gleich dem Quadrate von

$$P = x^2 + 3x + \tfrac{15}{4},$$

1) Die vorausgeschickten Spezialfälle, wo das absolute Glied bzw. der Koeffizient von x^4 Quadratzahlen sind, entsprechen offenbar bei der homogenen Schreibweise

$$z^2 = Ay^4 + Bxy^3 + Cx^2y^2 + Dx^3y + Ex^4$$

den primitiven Lösungen $x = 0$ bzw. $y = 0$

so erhält man die derivierte Lösung zweiten Grades

$$x = -\tfrac{21}{2}.$$

Setzt man wieder

$$x - \tfrac{21}{2}$$

in den ursprünglichen Ausdruck ein, so kommt

$$x^4 - 38x^3 + \tfrac{1091}{2}x^2 - \tfrac{6995}{2}x + \tfrac{134689}{16}.$$

Dies gleich dem Quadrate von

$$P = x^2 - 19x - \tfrac{367}{4}$$

gesetzt liefert $\tfrac{873}{46}$ als Wert von x, also

$$\tfrac{873}{46} - \tfrac{21}{2} = \tfrac{195}{23}$$

als *derivierte Lösung dritten Grades.* Auf diese Weise fortfahrend kann man derivierte Lösungen vierten, fünften, sechsten Grades erhalten usf. ins Unbegrenzte.

Wir sehen also hier bei Fermat den von Euler angegebenen Algorithmus auftreten. Auf den Ausnahmefall, wo die Reihe der Lösungen nicht unendlich viele verschiedene Elemente liefert, kommt Fermat ebenfalls zu sprechen, und zwar bei der Aufgabe, einen Ausdruck *dritten Grades*

$$a + bx + cx^2 + dx^3$$

zu einem *Kubus* zu machen, die er nach analoger Methode behandelt, und der er eine „Reserve sur ce qui vient d'être dit" hinzufügt. In dieser weist er auf den Ausnahmefall hin und zeigt, daß z. B. der Ausdruck

$$1 + 3x + 3x^2 + 4x^3$$

nur für $x = 0$ und der Ausdruck

$$1 + 3x + 2x^2 + x^3$$

nur für $x = 0$, $x = -\tfrac{2}{3}$ gleich einem Kubus wird.

* * *

In seiner Abhandlung:

De usu Theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea, Crelles Journal, Bd. 13 (1834), S. 353—355,

knüpft Jacobi an die damals vor vier Jahren erschienenen Eulerschen Abhandlungen 1), 6), 7) die folgende Bemerkung[1]):

„In quibus commentationibus non adnotavit vir — quod bene est supplere — analysin solutionis ab eo traditae aliam non esse nisi

1) Jacobis Werke, Bd. II (1882), S. 53.

multiplicationis integralium ellipticorum — quamquam utriusque analysis autorem consensum illum memorabilem non fugisse, probabile est."[1])

Wenn nämlich

$$(6)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{V(x)}} = \Pi(x)$$

gesetzt wird, so folgt aus

$$(7)\qquad \Pi(x') = n\,\Pi(x),$$

daß man x' und $\sqrt{V(x')}$ durch x und $\sqrt{V(x)}$ rational darstellen kann. Hat man also einen rationalen Wert x, für den $V(x)$ ein Quadrat d. h. $\sqrt{V(x)}$ ebenfalls rational ist, so ist für jedes positive ganzzahlige n auch das durch die Gleichung (7) definierte x' ein rationaler Wert, für den auch $\sqrt{V(x')}$ rational ist. „Ac reapse" — so fährt Jacobi[2]) fort — „Euleri analysis qua utitur . . . ad solvendum problema Diophanteum, prorsus eadem est atque ea, quam in Institutionibus Calculi Integralis aliisque locis ad aequationem transcendentem

$$\Pi(y) = n\,\Pi(x)$$

algebraïce solvendum proposuit".

* * *

Zur Erläuterung dieser Angaben von Jacobi bemerken wir das Folgende.

Zur algebraischen Lösung der Multiplikationsgleichung (7) dient nach Euler[3]) eine Kette von n Gleichungen

$$f(p,q) = 0,\quad f(q,r) = 0,\quad f(r,s) = 0,\quad \ldots,\quad f(t,z) = 0,$$

wo

$$f(p,q) = \alpha + 2\beta(p+q) + \gamma(p^2+q^2) + 2\delta pq + 2\varepsilon pq(p+q) + \zeta p^2q^2$$

ist und die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ durch die im § 628 (a. a. O.) angegebenen Formeln aus den Koeffizienten der ganzen Funktion vierten Grades V bestimmt werden können, jedoch noch eine *willkürliche Konstante a* enthalten. Es ist dann

$$\Pi(z) = n\,\Pi(p) - (n-1)\,\Pi(a).$$

1) In der Tat hat Euler das Additions- und Multiplikationstheorem der elliptischen Integrale lange vor Abfassung der hier in Rede stehenden Abhandlungen (1780) entdeckt und veröffentlicht; siehe Novi Commentarii Academiae Petropolitanae t. VI (1756—57) p. 37; t. VII (1758—59) p. 3 (diese Zitate nach Hagen, Index Operum L. Euleri, pag. 25); auch der erste Band der Institutiones Calculi Integralis war bereits 1763 erschienen.

2) Werke Bd. II, S. 54.

3) Institutiones Calculi Integralis, t. I, Caput VI, Problema 83, §§ 642 sqq.

Die hier auftretende in p und in q quadratische Gleichung

$$f(p, q) = 0$$

ist jedoch in p, q *symmetrisch*, während die bei der Lösung des Diophantischen Problems auftretende *aequatio canonica*

$$(1) \qquad Qy^2 + 2\,Py - R = Sx^2 + Tx + U = 0$$

in x, y nicht symmetrisch ist. Es kann aber[1]) eine solche *asymmetrische* Gleichung stets auf eine symmetrische zurückgeführt werden. Wenn nämlich einem y vermöge der asymmetrischen Gleichung die beiden Werte x und x' entsprechen, so besteht zwischen x und x' eine symmetrische in x und in x' quadratische Gleichung. Mit andern Worten: Aus der asymmetrischen Gleichung (1) folgt durch Differentiation

$$dy\,(2\,Qy + 2\,P) = dx\,(2\,Sx + T),$$

also, wenn (vgl. S. 57)

$$V = P^2 + QR = (P + Qy)^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{dx}{\sqrt{V(x)}} = 2\,\frac{dy}{2\,Sx + T} = \pm\,\frac{2\,dy}{S(x - x')},$$

und analog

$$\frac{dx'}{\sqrt{V(x')}} = \pm\,\frac{2\,dy}{S(x - x')}.$$

Wir haben also zwischen x und x' die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{V(x)}} = \pm\,\frac{dx'}{\sqrt{V(x')}},$$

deren komplette (allgemeine) Integralgleichung

$$\Phi\,(x, x') = 0$$

eine in x, x' symmetrische Gleichung ist.

Der von Euler zur Lösung des Diophantischen Problems angegebene Algorithmus, wie wir ihn zu Beginn dieses Aufsatzes (S. 57, 58) wiedergegeben haben, liefert also in der Tat:

$$\Pi\,(\gamma) = 2\,\Pi\,(\alpha)$$
$$\Pi\,(\varepsilon) = 3\,\Pi\,(\alpha)$$
$$\cdots\cdots$$

Wie wir gesehen haben, hat auch Fermat diesen Algorithmus für die Auffindung einer unendlichen Reihe derivierter Lösungen des Diophantischen Problems aus einer primitiven allgemein angegeben und an numerischen Beispielen wirklich durchgeführt; *er hat also mehr als*

---

1) Vgl. etwa Halphén, Traité des fonctions elliptiques, t. II (1888), pag. 338.

ein Jahrhundert vor Euler den die ganzzahlige Multiplikation der elliptischen Integrale liefernden algebraischen Algorithmus — natürlich ohne seine Bedeutung für die Integralrechnung auch nur zu ahnen — entdeckt und in seinen Beispielen tatsächlich aus einem x-Werte diejenigen Werte $x', x'', \ldots$ abgeleitet, für die

$$\Pi(x') = 2\,\Pi(x),$$
$$\Pi(x'') = 3\,\Pi(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ist.

Besonders bemerkenswert, vom Standpunkte der modernen Analysis aus, erscheinen noch zwei Gesichtspunkte, die sich bei Fermat finden.

Einmal behandelt er — wie wir bereits bemerkt haben — neben der Aufgabe, einen Ausdruck $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ zu einem Quadrat zu machen, mit derselben Methode die Aufgabe, einen Ausdruck $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ zu einem Kubus zu machen. Die Gleichung

$$y^3 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

stellt nun, wenn der Ausdruck auf der rechten Seite keine mehrfache Nullstelle hat, in den rechtwinkligen Koordinaten x, y eine Kurve vom Geschlechte Eins dar. Fermat hat also an dem in Rede stehenden Diophantischen Probleme den Zusammenhang wahrgenommen, der zwischen einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt und den elliptischen Kurven

$$y^2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

besteht.

Ferner tritt bei Fermats Beispielen das Bestreben hervor, solche primitive Lösungen zu finden, die voneinander unabhängig sind, d. h. wo keine sich aus einer andern als derivierte Lösung ableiten läßt; so erhält er für das Beispiel (3) — wie bereits oben angemerkt wurde — sechs verschiedene primitive Lösungen, indem er die Funktion P auf verschiedene Weise wählt. Die Bedeutung solcher verschiedener primitiven Lösungen besteht nun im folgenden. Hat man die primitiven Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_p$, so liefern, wie Jacobi[1]) bemerkt, die Werte von x, für die bei ganzzahligen $m_1, \ldots, m_p$:

$$\Pi(x) = m_1\ \Pi(x_1) + m_2\ \Pi(x_2) + \cdots + m_p\ \Pi(x_p)$$

ist, stets wieder Lösungen, unter denen, außer den aus den *einzelnen* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ derivierten, noch neue enthalten sind.

* * *

1) a. a. O., Werke, Bd. II p. 54, 55.

Indem wir nun in dem Berichte über die Abhandlung Jacobis fortfahren, erwähnen wir zunächst die Bemerkung, daß der von Euler (und auch von Fermat) hervorgehobene Ausnahmefall, wo die Reihe der derivierten Lösungen sich nicht ins Unendliche fortsetzen läßt, dann eintritt, wenn die primitive Lösung x' so beschaffen ist, daß $\Pi(x')$ ein aliquoter Teil einer Periode des elliptischen Integrals $\Pi(x)$ ist. Des weiteren gibt aber Jacobi eine Verallgemeinerung des in Rede stehenden Problems auf den Fall hyperelliptischer Gebilde und deutet eine solche auch für beliebige algebraische Gebilde an, die durch Gleichungen zwischen x, y mit rationalen Zahlkoeffizienten gegeben werden.

In bezug auf die hyperelliptischen Gebilde spricht er das folgende Theorem aus:

Es sei $V(x)$ eine ganze Funktion vom $2p+1^{\text{ten}}$ oder $2p+2^{\text{ten}}$ Grade mit rationalen Zahlkoeffizienten und x ein rationaler Wert, für den auch $\sqrt{V(x)}$ rational ist; dann gibt es unzählig viele Gleichungen p-ten Grades mit rationalen Koeffizienten von der Beschaffenheit, daß, wenn x die Wurzel einer solchen Gleichung ist, $\sqrt{V(x)}$ rational ausdrückbar ist in x und rationalen Zahlen. Für $p=2$ gibt es also unzählig viele x-Werte von der Form $a+b\sqrt{c}$, für die

$$\sqrt{V(x)} = a' + b'\sqrt{c}$$

ist, wo a, b, c, a', b' rationale Zahlen bedeuten.

Mit dem letzteren Gegenstande steht noch eine Arbeit Jacobis im 32. Bande des Crelleschen Journals[1]) im Zusammenhang.

* * *

Neuerdings hat H. Poincaré in der Abhandlung:

Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journal de Mathématiques (Liouville) (5) t. 7, (1901), p. 161 ff.

allgemein die Frage in Angriff genommen, wie man diejenigen Punkte einer durch eine Gleichung mit rationalen Zahlkoeffizienten gegebenen algebraischen Kurve bestimmen kann, deren Koordinaten selbst rationale Zahlen sind. Poincaré bemerkt zuvörderst, daß die Gesamtheit dieser „rationalen Punkte“ gegenüber allen birationalen Transformationen mit rationalen Zahlkoeffizienten invariant ist, und gründet darauf eine neue,

---

1) (1846), S. 220—226, Werke, Bd. II, S. 135 ff.; vgl. auch eine Arbeit von C. W. Borchardt, Crelles Journal, Bd. 48 (1854) S. 69, Werke (1888) S. 31. Ein Beweis des Jacobischen Satzes scheint bisher noch nicht veröffentlicht zu sein; ebensowenig die von Jacobi nur angedeutete Verallgemeinerung auf ein beliebiges algebraisches Gebilde mit rationalen Koeffizienten.

von der Riemannschen verschiedene Klasseneinteilung der algebraischen Kurven mit rationalen Koeffizienten. Bei den weiteren Untersuchungen beschränkt sich Poincaré auf die Kurven vom Geschlechte Null und Eins. Er zeigt, wie man aus einer Reihe von rationalen Punkten andere solche Punkte *ableiten* kann[1]); für Kurven dritter Ordnung gestaltet sich diese Ableitung geometrisch so, daß man in den bekannten rationalen Punkten die Tangenten zieht und ihre dritten Schnittpunkte mit der Kurve bestimmt. Es wird dann die Frage formuliert nach einem Systeme von rationalen Punkten der Kurve, aus denen sich *alle* rationalen Punkte *ableiten* lassen. Ein System von dieser Art, daß die geringste Anzahl von Punkten enthält, wird als System von *Fundamentalpunkten* bezeichnet.

Es wäre von Interesse, die von Fermat behandelten Beispiele darauf hin zu prüfen, ob die von Fermat aufgestellten primitiven Lösungen ein System von Fundamentalpunkten im Sinne Poincarés ausmachen.

Eine besondere Darstellung der linken Seiten der Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

Man nennt bekanntlich Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichungen diejenigen Differentialgleichungen $F = 0$, in denen

$$F = Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2).$$

Hier bedeuten r, s, t in üblicher Weise die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

und H, K, L, M, N sind nur von

$$x,\ y,\ z,\quad p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

abhängige Koeffizienten.

Unter den Ausdrücken F von der besagten Gestalt zeichnen sich in gewisser Hinsicht diejenigen als die einfachsten aus, für welche $F = 0$ zwei solche allgemeine intermediäre Integrale erster Ordnung

$$\varphi(U, V) = 0, \qquad \psi(U, W) = 0$$

1) Vgl. Fermat, Euler, Jacobi.

besitzt, von denen in allen beiden U *dieselbe* Funktion von x, y, z, p, q ist. Diese und nur diese F lassen sich in der Gestalt

$$F = A\frac{d(U, V)}{d(x, y)} = A\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dy} - \frac{dV}{dx}\frac{dU}{dy}\right)$$

ausdrücken, wo $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dy}$ die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}$$

bedeuten, und A, U, V solche Funktionen von x, y, z, p, q sind, von denen U und V miteinander in Involution stehen, d. h. für die der Poissonsche Klammerausdruck

$$[U, V] = \frac{\partial U}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

verschwindet.

In dieser Note soll nun der folgende allgemeine Satz bewiesen werden:

Jeder Ausdruck

$$F = Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2)$$

kann als Summe von höchstens vier Produkten

$$A_i\frac{d(U_i, V_i)}{d(x, y)}$$

dargestellt werden, wo A_i, U_i, V_i *nur*

$$x, y, z, p, q$$

enthalten und die Klammerausdrücke

$$[U_i, V_i]$$

verschwinden. (Hier ist natürlich vorausgesetzt, daß die Koeffizienten von F analytische Funktionen ihrer Argumente sind).

Der Satz ist im Falle $N = 0$ evident. Es ist nämlich

$$r = \frac{d(p, y)}{d(x, y)}, \quad t = \frac{d(x, q)}{d(x, y)}, \quad 1 = \frac{d(x, y)}{d(x, y)},$$
$$2s = \frac{d(x + y, p - q)}{d(x, y)} + \frac{d(p, y)}{d(x, y)} + \frac{d(x, q)}{d(x, y)},$$

also wirklich

$$Hr + 2Ks + Lt + M = \sum_{i=1}^{4} A_i\frac{d(U_i, V_i)}{d(x, y)},$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= H + K, & U_1 &= p, & V_1 &= y, \\ A_2 &= K + L, & U_2 &= x, & V_2 &= q, \\ A_3 &= M, & U_3 &= x, & V_3 &= y, \\ A_4 &= K, & U_4 &= x + y, & V_4 &= p - q. \end{aligned}$$

Ist aber $N \neq 0$, so gibt es immer eine Berührungstransformation

$$x' = X(x, y, z, p, q), \quad y' = Y, \quad z' = Z, \quad p' = P, \quad q' = Q,$$

durch welche der Quotient

$$\frac{F}{\frac{d(X,\,Y)}{d(x,\,y)}}$$

in einen linearen Ausdruck

$$H'r' + 2K's' + L't' + M'$$

übergeführt wird. Diesen Ausdruck können wir bereits in der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{4} A_i \frac{d(U_i,\, V_i)}{d(x',\, y')} = \sum_{i=1}^{4} A_i \left(\frac{d\,U_i}{d\,x'}\frac{d\,V_i}{d\,y'} - \frac{d\,V_i}{d\,x'}\frac{d\,U_i}{d\,y'}\right)$$

schreiben, wo $\frac{d}{dx'}$, $\frac{d}{dy'}$ Abkürzungen für

$$\frac{\partial}{\partial x'} + p'\frac{\partial}{\partial z'} + r'\frac{\partial}{\partial p'} + s'\frac{\partial}{\partial q'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} + q'\frac{\partial}{\partial z'} + s'\frac{\partial}{\partial p'} + t'\frac{\partial}{\partial q'}$$

sind und A_i, U_i, V_i, solche Funktionen von x', y', z', p', q' bedeuten, von denen U_i und V_i miteinander in Involution stehen. Wird wieder alles in den ursprünglichen Veränderlichen ausgedrückt, so ist zufolge der Identität

$$\frac{d(U_i,\, V_i)}{d(x',\, y')}\,\frac{d(X,\, Y)}{d(x,\, y)} = \frac{d(U_i,\, V_i)}{d(x,\, y)}$$

in der Tat

$$F = \sum_{i=1}^{4} A_i \frac{d(U_i,\, V_i)}{d(x,\, y)},$$

wo

$$[U_i, V_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Es wäre erwünscht zu untersuchen:

1) wodurch diejenigen F ausgezeichnet sind, für die sich die Zahl 4 durch 3 oder gar 2 ersetzen läßt,

2) ob nicht überhaupt für alle F die Zahl 4 vermindert werden kann.

Budapest, den 7. Januar 1908.

Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie.

Von VLADIMIR VARIĆAK in Agram.

1. Allgemeine Gleichung der Geraden in der hyperbolischen Ebene.

In den Punkten $N_1(n_1, 0)$, $N_2(n_2, 0)$ der x-Achse errichte man zwei Normalen. Zu diesen Normalen gibt es vier parallele Geraden g_i, die durch die Abschnitte n_1, n_2 und durch die Angabe des Sinnes, in dem sie zu jenen Normalen parallel sein sollen, eindeutig bestimmt sind. Innere Parallelen g_3 und g_4 gehen durch den Mittelpunkt der Strecke $N_1 N_2$. Das gemeinsame Lot der Geraden g_1 und der x-Achse sei SR. Bei der konstruktiven Bestimmung jener vier Geraden beachte man die Relationen

$$\omega = \Pi \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1), \quad RS = \Delta(\tfrac{1}{2}\pi - \omega).$$

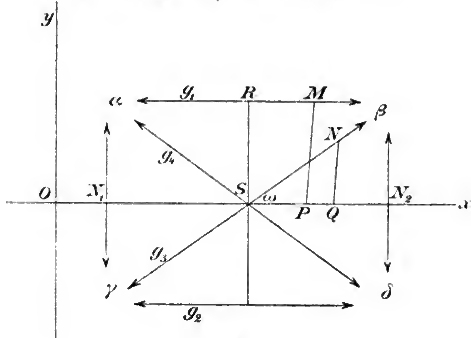


Fig. 1.

Von dem Punkte M der Geraden g_1 fälle man das Lot MP auf die Abszissenachse. In dem entstandenen Vierecke $SPMR$ mit den rechten Winkeln in R, S und P hat man (Fig. 1)

$$MP = y, \quad SP = x - \tfrac{1}{2}(n_2 + n_1), \quad SR = \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\right).$$

Zwischen diesen Größen besteht die Relation

$$\sin \Pi \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1) = \cos \Pi(y) \sin \Pi\left(x - \tfrac{1}{2}(n_1 + n_2)\right),$$

die man auch

$$\operatorname{th} y \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1) = \operatorname{ch}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)$$

schreiben kann. Nach einer leichten Umformung folgt daraus

$$e^x\left(e^{\frac{1}{2}(n_2-n_1)}+e^{-\frac{1}{2}(n_2-n_1)}\right)\operatorname{th} y = e^{2x}e^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}+e^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)},$$

und so ergibt sich

(1) $$e^x + e^{n_1+n_2}e^{-x} - (e^{n_1}+e^{n_2})\operatorname{th} y = 0$$

als die Gleichung der Geraden g_1. Durch die Spiegelung auf der x-Achse erhält man für g_2 die Gleichung

(2) $$e^x + e^{n_1+n_2}e^{-x} + (e^{n_1}+e^{n_2})\operatorname{th} y = 0.$$

Nehmen wir jetzt das rechtwinkelige Dreieck SNQ. Da haben wir wieder

$$\omega = \Pi\tfrac{1}{2}(n_2-n_1),\quad NQ = y,\quad SQ = x - \tfrac{1}{2}(n_2+n_1);$$

es ist also

$$\operatorname{tang}\Pi\tfrac{1}{2}(n_2-n_1) = \cos\Pi(y)\operatorname{tang}\Pi\left(x-\tfrac{1}{2}(n_2+n_1)\right),$$

oder

$$\operatorname{sh}\left(x-\frac{n_2+n_1}{2}\right) = \operatorname{th} y \operatorname{sh}\tfrac{1}{2}(n_2-n_1).$$

Auf analoge Art wie vorher erhält man daraus die Gleichung der Geraden g_3

(3) $$e^x - e^{n_1+n_2}e^{-x} + (e^{n_1}-e^{n_2})\operatorname{th} y = 0,$$

und für g_4

(4) $$e^x - e^{n_1+n_2}e^{-x} - (e^{n_1}-e^{n_2})\operatorname{th} y = 0.$$

Nimmt man $\varepsilon_1(\varepsilon_2) = +1$ an, wenn das erste (zweite) Ende der Geraden g_i in der positiven Halbebene liegt, dagegen $\varepsilon_1(\varepsilon_2) = -1$ im entgegengesetzten Falle, so kann man die Gleichungen jener vier Geraden g_i in die Gleichung

(5) $$e^x + \varepsilon_1 e^{n_1}\cdot\varepsilon_2 e^{n_2}\cdot e^{-x} - (\varepsilon_1 e^{n_1}+\varepsilon_2 e^{n_2})\cdot\operatorname{th} y = 0$$

zusammenfassen. Als erstes (zweites) Ende der Geraden g_i betrachten wir jenes Ende, welches die Gerade mit der Normalen in dem Punkte $N_1(N_2)$ gemeinsam hat. Hier ist also die Gerade als Parallele zu den, in den Punkten N_1 und N_2 auf die x-Achse normalen Halbstrahlen, bestimmt. Die Gleichung (5) ist die allgemeine Gleichung der geraden Linie, die man in manchen Fällen vorteilhaft anwenden kann. Schreibt man diese Gleichung in der Form

(6) $$e^x + u e^{-x} - 2v\operatorname{th} y = 0,$$

so ersieht man, daß jene, die beiden zur x-Achse normalen Halbstrahlen, also auch die Enden der geraden Linie (5) bestimmenden Größen $\varepsilon_1 e^{n_1}$ und $\varepsilon_2 e^{n_2}$ der quadratischen Gleichung

$$\mu^2 - 2v\mu + u = 0$$

genügen. Daraus folgt $v^2 - u^2 > 0$ als Bedingung der Realität der durch die Gleichung (6) dargestellten Geraden. Nach Hilbert[1]) nennen wir u und v die Koordinaten der Geraden (5), deren Enden $\xi = \varepsilon_1 e^{n_1}$ und $\eta = \varepsilon_2 e^{n_2}$ sind. Nun ist es ersichtlich, daß die Enden der Abszissenachse ∞ und 0, der Ordinatenachse $+1$ und -1 sind. Jetzt wollen wir noch die Gleichungen einiger speziellen Geraden ableiten.

a) Die die x-Achse nicht schneidende Parallele zur positiven y-Achse.

In der Gleichung (5) setze man

$$n_1 = 0, \quad n_2 = n, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1 .$$

Man erhält

$$e^x + e^{-x+n} - (1 + e^n)\,\mathrm{th}\, y = 0$$

oder

$$\mathrm{th}\, y = \mathrm{ch}\, x - \mathrm{th}\, \frac{n}{2}\, \mathrm{sh}\, x . \tag{7}$$

b) Die auf der positiven x-Achse das Segment b abschneidende Parallele zur positiven y-Achse ist bestimmt durch

$$n_1 = 0, \quad n_2 = n, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = -1 .$$

Die Gleichung (5) reduziert sich auf

$$e^x - e^{-x} e^n + (e^n - 1)\,\mathrm{th}\, y = 0 .$$

Da $n = 2b$ ist, so geht diese Gleichung in

$$\mathrm{sh}\, x - \mathrm{th}\, b\,(\mathrm{ch}\, x - \mathrm{th}\, y) = 0 \tag{8}$$

über.

c) Die die y-Achse nicht schneidende Parallele zur positiven x-Achse.

Hier ist

$$n_1 = n, \quad \lim n_2 = \infty, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1 .$$

Durch den Grenzübergang erhält man aus (5)

$$e^{x-n} - \mathrm{coth}\, y = 0 . \tag{9}$$

Wenn die Parallele aber die y-Achse schneidet, hat man n negativ zu nehmen. Dies ist also zugleich die allgemeine Gleichung der Parallele zur x-Achse.

d) Die auf der positiven y-Achse das Segment b abschneidende Parallele zur positiven x-Achse.

---

1) Hilbert, Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Grundlagen S. 119. Vergleiche auch B. Kagan, Abriß des Lobatschefskijschen geometrischen Systems, S. 121 (russisch). Natürlich haben dort die Koeffizienten eine ganz andere Bedeutung als hier u und v.

Nimmt man (Fig. 2)

$$n_1 = -n, \quad \lim n_2 = \infty, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1,$$

so wird die Gleichung (5) zur

$$e^{-x} \cdot e^{-n} - \text{th}\, y = 0. \tag{10}$$

Jetzt hat man noch den Faktor e^{-n} durch b auszudrücken. Zu dem Zwecke ziehe man durch den Nullpunkt die Parallele $O\alpha$ zur Normalen $N_1\alpha$ und der Geraden $B\alpha$. Es kommt zum Vorschein der Winkel $\nu = \Pi(n)$. Man fälle dann das Lot OC auf die Gerade $B\alpha$. Das rechtwinkelige Dreieck OBC hat b zur Hypotenuse, $\Pi(b)$ und $\frac{1}{2}\Pi(n)$ als Winkel. Es ist also

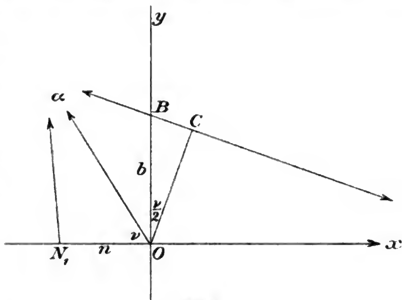


Fig. 2.

$$\sin \Pi(b) = \text{tang}\, \Pi(b) \cdot \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\Pi(n)$$

oder

$$e^{-n} = \text{th}\, b.$$

So geht die Gleichung (10) über in

$$e^{-x}\, \text{th}\, b - \text{th}\, y = 0. \tag{11}$$

e) Die zu den positiven Halbstrahlen der Koordinatenachsen gemeinsame Parallele.

In der vorhergehenden Gleichung nehme man $\lim b = \infty$, oder man setze in (5)

$$n_1 = 0, \quad \lim n_2 = \infty, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1.$$

Die Gleichung dieser Parallelen wird

$$e^{-x} - \text{th}\, y = 0. \tag{12}$$

Aus ihr erhält man (9) durch Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes auf der Abszissenachse, indem man also $x - n$ statt x nimmt. Die drei anderen gemeinsamen Parallelen der Koordinatenachsen sind

$$e^{x} - \text{th}\, y = 0, \quad e^{x} + \text{th}\, y = 0, \quad e^{-x} + \text{th}\, y = 0.$$

f) Die Normale zur positiven y-Achse. Setzt man in (5)

$$n_1 = -n, \quad n_2 = n, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1$$

ein, so erhält man

(13) $$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} n \operatorname{th} y = 0 .$$

Fig. 3.

Wegen der Relation

$$\nu = \Pi(n) = \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)$$

wird

$$\sin \Pi(n) = \cos \Pi(b)$$

oder

$$\operatorname{ch} n \operatorname{th} b = 1 ,$$

also ist die Gleichung jener Normalen

(14) $$\operatorname{th} y = \operatorname{th} b \operatorname{ch} x .$$

Will man direkt vorgehen, so nehme man S in Fig. 1 zum Nullpunkt, SR zur Ordinatenachse. Das Viereck $MPRS$ liefert die Gleichung (14).

g) Für die Gerade, welche die x-Achse unter dem Winkel α in der Entfernung b vom Nullpunkte trifft[1]), hat man

$$n_1 = b - \Delta(\alpha), \quad n_2 = b + \Delta(\alpha), \quad \varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = +1$$

in (5) zu setzen, und man erhält

$$e^{x-b} - e^{-(x-b)} - (e^{\Delta(\alpha)} - e^{-\Delta(\alpha)}) \operatorname{th} y = 0 .$$

Da $\operatorname{sh} \Delta(\alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$ ist, kann man diese Gleichung auch in der Form

(15) $$\operatorname{sh}(x - b) - \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{th} y = 0$$

schreiben. Ist $b = 0$, so wird

(16) $$\operatorname{th} y = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{sh} x .$$

Für $\alpha = \Pi(b)$ hat man die Parallele zur negativen y-Achse

(17) $$\operatorname{ch} x + \operatorname{th} y - \operatorname{coth} b \operatorname{sh} x = 0 .$$

Wir haben $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ angenommen; ist $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, so ersetze man in den letzten drei Gleichungen y durch $-y$.

h) Die Gerade, welche die positive y-Achse unter dem Winkel α in der Entfernung b vom Nullpunkte schneidet.

1) Das ist die Gerade y_3 in Fig. 1. Man nehme nur $OS = b$ und $\omega = \alpha$.

Mehrere Fälle sind zu unterscheiden. Ist $\frac{1}{2}\pi > \alpha > \Pi(b)$, so schneidet diese Gerade die x-Achse nicht, sondern sie hat mit dieser Achse das Lot SR gemeinsam. Bezeichnet man (Fig. 4) $OS = d$, $N_1 S = N_2 S = n$, dann ist

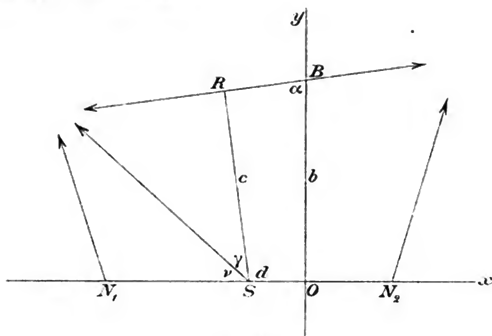


Fig. 4.

$$n_1 = -n - d, \quad n_2 = n - d, \quad \varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1,$$

und die Gleichung dieser Geraden wird

$$e^{x+d} + e^{-(x+d)} - (e^n + e^{-n}) \operatorname{th} y = 0$$

oder

(18) $$\operatorname{ch}(x + d) - \operatorname{ch} n \operatorname{th} y = 0.$$

Jetzt hat man noch die in der Gleichung

(19) $$\operatorname{ch} x \cdot \frac{\operatorname{ch} d}{\operatorname{ch} n} \operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} d}{\operatorname{ch} n} \operatorname{sh} x = \operatorname{th} y$$

vorkommenden Brüche durch b und α auszudrücken. Durch den Punkt S ziehe man die Parallele zur Geraden BR. Da $\gamma + \nu = \Pi(c) + \Pi(n) = \frac{1}{2}\pi$, erhält man aus dem Vierecke $BORS$ mit drei rechten Winkeln

$$\cos \Pi(c) = \sin \Pi(n) = \sin \Pi(d) \cos \Pi(b),$$

also

(20) $$\frac{\operatorname{ch} d}{\operatorname{ch} n} = \cos \Pi(b).$$

Man ersieht daraus, daß n immer größer als d ist, daß also durch Figur 4 die Verhältnisse richtig wiedergegeben sind.

In demselben Vierecke bestehen die Gleichungen

$$\cos \Pi(c) = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tang} \Pi(BR),$$
$$\operatorname{tang} \Pi(BR) = \sin \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(d),$$

hiermit

$$\sin \Pi(n) = \sin \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(d) \operatorname{cotg} \alpha ,$$

oder

$$\frac{\operatorname{sh} d}{\operatorname{ch} n} = \operatorname{cotg} \alpha \sin \Pi(b). \tag{21}$$

Folglich ist die Gleichung unserer Geraden

$$\operatorname{ch} x \cos \Pi(b) \sin \alpha + \operatorname{sh} x \sin \Pi(b) \cos \alpha = \sin \alpha \operatorname{th} y, \tag{22}$$

was sich leicht in

$$e^x \sin(\alpha + \Pi(b)) + e^{-x} \sin(\alpha - \Pi(b)) = 2 \sin \alpha \operatorname{th} y \tag{23}$$

transformieren läßt.

Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ geht (22) in (14) über. Nimmt man $\alpha = \Pi(b)$, so hat man die Parallele zur negativen x-Achse: das Spiegelbild der Geraden (11).

Wenn $\alpha < \Pi(b)$ ist, dann schneidet diese Gerade die negative x-Achse im Punkte $M(-d, 0)$. Es ist, wie leicht ersichtlich,

$$n_1 = -n - d, \quad n_2 = n - d, \quad \varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = +1,$$

und man erhält

$$\frac{\operatorname{ch} d}{\operatorname{sh} n} \cdot \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh} d}{\operatorname{sh} n} \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{th} y. \tag{24}$$

Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke OBM folgt

$$\frac{\operatorname{ch} d}{\operatorname{sh} n} = \operatorname{cotg} \alpha \sin \Pi(b), \quad \frac{\operatorname{sh} d}{\operatorname{sh} n} = \cos \Pi(b) \text{ usw.},$$

bis man wieder zur Gleichung (23) gelangt.

Ist $\alpha > \frac{\pi}{2}$ und zugleich $\pi - \alpha > \Pi(b)$, so erhält man durch Spiegelung der Geraden (23) an der Ordinatenachse die Gleichung

$$e^x \sin(\alpha - \Pi(b)) + e^{-x} (\alpha + \Pi(b)) = 2 \sin \alpha \operatorname{th} y, \tag{25}$$

welche Lobatschefskij als allgemeine Gleichung aller geraden Linien angibt[1]).

Alle diese speziellen Fälle hätte man auch mit Hilfe der Gleichung der Verbindungsgeraden zweier gegebener Punkte leicht erhalten können[2]).

2. Über eine Interpretation der hyperbolischen Raumgeometrie.

Wie man mit Hilfe der zur Grundebene orthogonalen Halbkreise und Halbkugeln jeden Satz der hyperbolischen Geometrie in einen Lehr-

---

1) Engel, N. J. Lobatschefskij, S. 27 und 257.

2) Rad jugoslavenske akademije, 167, 1906, S. 167—188.

satz der Euklidischen Geometrie übersetzen kann, ebenso leicht kann man von der Cartesischen Gleichung des Bildes zur Lobatschefskijschen Gleichung des entsprechenden geometrischen Objektes gelangen[1]). Es soll hier zuerst gezeigt werden, wie man die Lobatschefskijschen Koordinaten x, y, z eines Punktes durch die Cartesischen Koordinaten X, Y, Z des entsprechenden Bildpunktes ausdrücken kann und umgekehrt.

Um den Nullpunkt O des rechtwinkeligen Koordinatensystems X, Y, Z beschreibe man eine Kugel mit dem Radius eins und nehme nur jene Hälfte, die im positiven Halbraume liegt. Den positiven Teil der Z-Achse nehme man als Lobatschefskijsche x-Achse und ihren Durchschnittspunkt mit jener Halbkugel zum Lobatschefskijschen Koordinatenanfangspunkt O'. Den Durchschnitt der Halbkugel mit der (X, Z)-Ebene nehme man zur y-Achse, den mit (Y, Z) zur z-Achse. Um die Lobatschefkijschen Koordinaten des Punktes M zu erhalten, lege man durch diesen Punkt eine mit (y, z) konzentrische Halbkugel, welche die x-Achse in A schneiden soll. Man lege noch durch M die zur X-Achse normale Ebene MBP. Wir nehmen

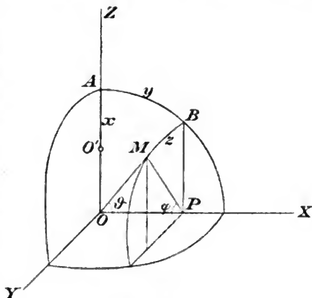


Fig. 5.

$$O'A = x, \quad AB = y, \quad BM = z.$$

Die Polarkoordinaten führen wir mittels der Relationen

(26) $$X = r\cos\vartheta, \quad Y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad Z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

ein und drücken das Bogenelement durch die Formel

(27) $$ds = \frac{dS}{Z} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}}{r\sin\vartheta\sin\varphi}$$

aus.

Um x zu bestimmen, hat man $\vartheta = \varphi = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen; so wird

$$x = \int_1^r \frac{dr}{r} = \log\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $r =$ konst. und für $r =$ konst., $\vartheta =$ konst. erhält man

$$e^{-y} = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}, \quad e^{-z} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

1) Rad jugoslavenske akademije 154, 1903, S. 81—129.

Wenn in

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{X}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{Z}{Y}$$

halbe Winkel eingeführt werden, erhält man

$$\operatorname{sh} y = \frac{X}{\sqrt{Z^2 + Y^2}}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{Y}{Z},$$

während

(28) $$e^{2x} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

ist. Daraus folgt

(29) $$X = e^x \operatorname{th} y, \quad Y = \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} \operatorname{th} z, \quad Z = \frac{e^x}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} z},$$

oder

(30) $$X = e^x \cos \Pi(y), \quad Y = e^x \sin \Pi(y) \cos \Pi(z), \quad Z = e^x \sin \Pi(y) \sin \Pi(z).$$

Nimmt man $z = 0$, so erhält man für die analoge Abbildung der Lobatschefskijschen Ebene geltende Formeln, welche L. K. Lachtin angegeben hat[1]).

a) Die Spiegelung auf der Lobatschefskijschen (z, y)-Ebene ist die Inversion auf der diese Ebene darstellenden Halbkugel. Zwischen den Polarkoordinaten des Punktes $M(r, \varphi, \vartheta)$ und des inversen Punktes $M'(r', \varphi', \vartheta')$ bestehen die Relationen $rr' = 1$, $\varphi = \varphi'$, $\vartheta = \vartheta'$. Da $x = \log r$ ist, so muß $x' = -x$ sein, während $y' = y$, $z' = z$ bleibt.

b) Das Bild der Kugel mit dem Mittelpunkte $M_0(x_0, y_0, z_0)$ und dem Radius r ist die Kugel mit dem Mittelpunkte $(x_0, y_0, z_0 \operatorname{ch} r)$ und dem Radius $z_0 \operatorname{sh} r$.

Die allgemeine Gleichung der Kugel im Lobatschefskijschen Raume

(31) $$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch}(x - x_0) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z \operatorname{ch} y_0 \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} y_0 \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z_0$$

schreibe man in der Form

$$\operatorname{ch}(x - x_0) - \operatorname{th} y \operatorname{th} y_0 - \frac{\operatorname{th} z \operatorname{th} z_0}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} y_0} - \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} z \operatorname{ch} y_0 \operatorname{ch} z_0} = 0,$$

und man setze $\operatorname{ch}(x - x_0) = (e^{2x} + e^{2x_0}) : 2e^x e^{x_0}$.

Dann geht sie in die Gleichung

$$e^{2x} + e^{2x_0} - 2e^x \operatorname{th} y \cdot e^{x_0} \operatorname{th} y_0 - 2\frac{e^x \operatorname{th} z}{\operatorname{ch} y} \cdot \frac{e^{x_0} \operatorname{th} z_0}{\operatorname{ch} y_0} - \\ - 2\frac{e^x}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} z} \cdot \frac{e^{x_0}}{\operatorname{ch} y_0 \operatorname{ch} z_0} \cdot \operatorname{ch} r = 0$$

über. Beachtet man die Formeln (29) so folgt daraus

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0 \operatorname{ch} r)^2 = z_0^2 \operatorname{sh}^2 r$$

als die Gleichung des Bildes jener Kugel.

---

1) L. K. Lachtin, Über eine konkrete Deutung der Lobatschefskijschen Planimetrie. Matematitscheskij Sbornik, XVII. (russisch), Moskau.

c) **Die Bilder der Grenzkugeln sind entweder die Kugeln, welche die Grundebene (X, Y) berühren, oder die zu ihr parallelen Ebenen.**

Setzt man in (31) $x_0 = -r$, $y_0 = z_0 = 0$ ein, so wird

$$\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y\, \text{ch}\, z + \text{th}\, r\, \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y\, \text{ch}\, z = 1$$

die Gleichung der Kugel, welche die negative Seite der (y, z)-Ebene im Nullpunkte berührt. Wird $\lim r = \infty$, so geht sie in die Gleichung der Grenzkugel

$$e^{x}\, \text{ch}\, y\, \text{ch}\, z = 1 \tag{32}$$

über, wofür man auch $X^2 + Y^2 + Z^2 - Z = 0$ schreiben kann.

Die Kugel, welche die positive Seite der (z, y)-Ebene im Nullpunkte berührt

$$\text{ch}\,(x - r)\, \text{ch}\, y\, \text{ch}\, z = \text{ch}\, r,$$

wird für unendlich großes r zur Grenzkugel

$$e^{-x}\, \text{ch}\, y\, \text{ch}\, z = 1, \tag{33}$$

welche ihre konkave Seite der positiven x-Achse zuwendet. Die letzte Gleichung ist aber mit $Z = 1$ äquivalent. In der Ebene hat man Parallelen zur X-Achse als Bilder der Grenzkreise, deren Achsen zu $+x$ parallel sind.

Die Länge des Grenzkreisbogens und die Fläche des Grenzkugelabschnittes kann man in diesem Falle direkt von der Figur ablesen. Auch ist es evident, daß die Geometrie auf der Grenzkugel mit der Euklidischen Geometrie der Ebene identisch ist.

d) **Die Bilder der Abstandsflächen zu den Koordinatenebenen.** Die Abstandsfläche mit der Mittelebene (x, y) hat die Gleichung $z = d$; ihr Bild ist also die Ebene $y = \text{sh}\, d \cdot Z$. Die Abstandsfläche zur (x, z)-Ebene $\text{sh}\, y\, \text{ch}\, z = \text{sh}\, d$ ist mit der Ebene $X = \text{sh}\, d \cdot Z$ identisch.

E sei ein Punkt der von (z, y) äquidistanten Fläche, d seine Entfernung von der Mittelebene, s die Entfernung des Fußpunktes der Normale ES auf (x, y) von der y-Achse. Man findet dann $\text{sh}\, s = \text{ch}\, y\, \text{sh}\, x$, $\text{sh}\, d = \text{sh}\, s\, \text{ch}\, z$. Also ist die Gleichung dieser Abstandsfläche

$$\text{sh}\, x\, \text{ch}\, x\, \text{ch}\, z = \text{sh}\, d$$

oder

$$e^{2x} - \frac{2e^{x}\, \text{sh}\, d}{\text{ch}\, y\, \text{ch}\, z} - 1 = 0.$$

Sie hat zum Bilde die Kugel, welche den Punkt $(0,0, \text{sh}\, d)$ zum Mittelpunkt und $\text{ch}\, d$ zum Radius hat; darum schneidet sie die Grundebene.

e) Die Transformation

(34) $x = x_1, \quad y = y_1, \quad \Pi(z) + \Pi(z_1) = \text{arc sin sgn}\, z$

ist eine Verallgemeinerung auf den ganzen Raum der bekannten *L.*-Transformation, welche nur im positiven Halbraume gültig ist[1]. Solange $\text{sgn}\, z = +1$ ist, bleibt bei der Transformation der Formeln (30) X unverändert, während Y und Z untereinander vertauscht werden. Ist $\text{sgn}\, z = -1$, so geht Z in $-Y$ über und umgekehrt. Im Bilde wird also diese Transformation zur Spiegelung an den Ebenen $Z = Y$ und $Z = -Y$. Diese Ebenen sind die Bilder der Abstandsfläche zur (x, y) für $d = \Delta\left(\frac{\pi}{4}\right)$. In der Ebene hat man analog die Spiegelungen an den Geraden $Y = X$ und $Y = -X$.

3. Elementare Transformationen der hyperbolischen Ebene.

Für die betreffenden Transformationen wird zuerst die Bogenlänge s der Bahnkurven mittels Koordinaten der Endpunkte ausgedrückt, und so werden die endlichen Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x, s), \quad y_2 = \psi(y, s)$$

aufgestellt, aus denen man die Gruppeneigenschaft ersehen kann. Bei der infinitesimalen Transformation

$$Uf \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

hat man

$$\xi(x, y) = \left(\frac{dx_1}{ds}\right)_{s=0}, \quad \eta(x, y) = \left(\frac{dy_1}{ds}\right)_{s=0}$$

zu setzen.

a) Die Translation längs der Abstandslinie zur x-Achse. Aus der Gleichung der Abstandslinie $y = b$ und aus dem Ausdrucke für das Bogenelement folgt

$$s = (x_1 - x)\,\text{ch}\, b.$$

Es ist also

(35) $$x_1 = x + \frac{s}{\text{ch}\, b}, \quad y_1 = y,$$

und

$$x_2 = x + \frac{s + s_1}{\text{ch}\, b}, \quad y_2 = y.$$

Die infinitesimale Translation ist gegeben durch

(36) $$Uf \equiv \frac{1}{\text{ch}\, b} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

---

1) H. Liebmann, Leipziger Berichte, 54. Bd., S. 246.

Die erweiterte Transformation ist von derselben Form, da das Linienelement durch x, y, $\frac{y'}{\operatorname{ch} y}$ bestimmt wird. Das Linienelement schließt mit der Abstandslinie, auf der sein Punkt bewegt wird, immer denselben Winkel ein.

b) Die Translation längs der Normalen zur x-Achse. Aus der Gleichung der Normalen $x = c$ folgt

(37) $$x_1 = x, \quad y_1 = y + s,$$

also

$$x_2 = x, \quad y_2 = y + (s + s_1)$$

und

(38) $$Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Bei den Translationen längs den Abstandslinien zur x-Achse bleibt die Schar der Normalen zur x-Achse unverändert und umgekehrt; einzelne Normalen werden untereinander permutiert. Setzt man nämlich $\omega = x = \text{konst.}$ statt f in (36) ein, so folgt $U\omega = \omega$.

In seiner Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie deutet Hilbert[1]) die Multiplikation eines willkürlichen Endes ω mit einer Konstanten $\varkappa$ als eine Verschiebung der Ebene längs der Geraden $(0, \infty)$ um eine gewisse von $\varkappa$ abhängige Strecke. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß bei dieser Verschiebung einzelne Punkte der Ebene auf den Abstandslinien zur x-Achse um die Strecke $\operatorname{ch} y \cdot \log \varkappa$ verschoben werden.

Für die Schiebungen längs den Normalen $\operatorname{th} y = \operatorname{ch} x \operatorname{th} b$ und den Abstandslinien $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh} p$ zur y-Achse bestehen etwas kompliziertere Ausdrücke[2]):

$$Uf \equiv \operatorname{ch} b (1 - \operatorname{ch}^2 x \operatorname{th}^2 b) \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{ch} b \sqrt{\operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 b}\, \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$Uf \equiv - \frac{\operatorname{sh} x \sqrt{\operatorname{sh}^2 p - \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{sh} p \operatorname{ch} p} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 p}}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} p} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

c) Die Translation längs der Parallelen zur positiven x-Achse. Die Gleichung dieser Parallelen nehmen wir an in der Form

(9) $$e^{x-n} - \coth y = 0.$$

Ihre Enden sind e^n und ∞. Die bestimmende Größe dieser Geraden ist die Entfernung n vom Nullpunkte jener Normalen zur x-Achse, die mit der Geraden parallel ist. Für das Bogenelement hat man die Ausdrücke

$$ds = \frac{e^{2(x-n)}\,dx}{e^{2(x-n)} - 1} = - \coth y \, dy,$$

1) a. a. O. S. 119.

2) Darüber ausführlicher in Rad jugoslavenske akademije, 165.

und daraus folgt

$$s = \tfrac{1}{2} \log \frac{e^{2(x_1 - n)} - 1}{e^{2(x-n)} - 1} = \log \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} y_1}.$$

Es sind also

$$e^{2(x_1 - n)} - 1 = e^{2s}(e^{2(x-n)} - 1),$$

(39) $$\operatorname{sh} y_1 = e^{-s} \operatorname{sh} y,$$

die endlichen Gleichungen und

(40) $$Uf \equiv (1 - e^{-2(x-n)}) \frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{th} y \frac{\partial f}{\partial y}$$

die infinitesimale Form dieser Translation.

Wenn die Parallele zur x-Achse durch den Abschnitt auf der y-Achse bestimmt ist, wie es bei Lobatschefskij geschieht, und wie es bei der Gleichung (11) vorausgesetzt ist, so erhält man

$$e^{2x_1} - \operatorname{th}^2 b = e^{2s}(e^{2x} - \operatorname{th}^2 b),$$

$$\operatorname{sh} y_1 = e^{-s} \operatorname{sh} y,$$

und

$$Uf \equiv (1 - e^{-2x} \operatorname{th}^2 b) \frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{th} y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Diese Formeln gelten aber nur in dem durch gemeinsame Parallelen der Koordinatenachsen begrenzten Gebiete.

d) Die Drehungen um das positive Ende der x-Achse. Die Bahnkurven sind hier die Grenzkreise, deren Achsen Parallelen zur positiven x-Achse sind. Schneidet ein solcher Grenzkreis die Länge b auf der x-Achse ab, so ist seine Gleichung

(41) $$e^x = e^b \operatorname{ch} y,$$

und man findet leicht

$$s = \sqrt{e^{2(x-b)} - 1} = \operatorname{sh} y.$$

Bewegt sich ein Punkt auf diesem Grenzkreise von M nach M_1 so hat man

$$\sqrt{e^{2(x_1 - b)} - 1} = s + \sqrt{e^{2(x-b)} - 1}.$$

(42) $$\operatorname{sh} y_1 = s + \operatorname{sh} y,$$

und

(43) $$Uf \equiv \frac{\sqrt{e^{2(x-b)} - 1}}{e^{2(x-b)}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{ch} y} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Bei den Translationen längs den Parallelen zur positiven x-Achse verbleiben die Grenzkreise (41) auf die zweite Art invariant und umgekehrt[1]). In die Formel (40) substituiere man

$$\omega(x, y) \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} = e^b.$$

1) Vergleiche H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, S. 39—45.

Es wird

$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y}(1 - e^{-2(x-n)} + \operatorname{th}^2 y),$$

und das reduziert sich, wenn man (9) berücksichtigt, auf

$$U\omega = \frac{e^x}{\operatorname{ch} y},$$

d. h.

$$U\omega = \omega.$$

e) Die Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt sind gegeben durch[1])

$$\operatorname{th} x_1 = \operatorname{th} x \cos\alpha - \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x}\sin\alpha,$$

$$\operatorname{sh} y_1 = \operatorname{sh} y \cos\alpha + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \sin\alpha.$$

Ersetzt man hier den Winkel α durch den Bogen s und den Halbmesser p des Kreises, auf dem der betreffende Punkt bewegt wird, so erhält man

(44)
$$\operatorname{th} x_1 = \operatorname{th} x \cos\frac{s}{\operatorname{sh} p} - \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x}\sin\frac{s}{\operatorname{sh} p},$$
$$\operatorname{sh} y_1 = \operatorname{sh} y \cos\frac{s}{\operatorname{sh} p} + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \sin\frac{s}{\operatorname{sh} p}.$$

Die infinitesimale Drehung ist also

(45)
$$Uf \equiv -\frac{\operatorname{th} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} p}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} p}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Invarianten zweiter Art sind hier die Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt. Aus

(46)
$$\omega(x, y) \equiv \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{tang}\varphi$$

folgt

$$U\omega \equiv \frac{1}{\cos^2\varphi \operatorname{sh} p} = \text{konst}.$$

Infinitesimale Translation längs der Geraden (46) hat die Form

$$Uf \equiv \cos\alpha\,(1 - \operatorname{tang}^2\alpha \operatorname{sh}^2 x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \operatorname{sh}^2 y}}{\operatorname{ch} y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

---

1) H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, S. 174.

Eulers Theorie des Schiffes und die Bewegungsgleichungen des starren Körpers.[1])

Von H. E. Timerding in Straßburg i. E.

I.

Das Interesse von Eulers Arbeiten über die Mechanik des Schiffes[2]) liegt einerseits in der Wichtigkeit, die ihnen für die Entwicklung einer wissenschaftlichen Grundlegung des Schiffbaus zukommt, andererseits aber auch darin, daß sich an ihnen die Mechanik des starren Körpers entwickelt hat. Was sie indes in dieser zweiten Hinsicht merkwürdig macht, das schmälert ihre Bedeutung in der ersteren Beziehung. Euler will nämlich, verführt von dem Bilde der Newtonschen Mechanik, die Kräfte, die auf das Schiff wirken, von der Bewegung des Schiffes unter der Einwirkung dieser Kräfte reinlich scheiden. Eine solche Scheidung ist aber unmöglich, denn diese Kräfte sind nicht wie in der Himmelsmechanik von der Bewegung des Körpers, auf den sie wirken, unabhängig, sondern vielmehr mit ihr unlöslich verbunden, so daß es nicht angängig ist, die Bewegung des Schiffes von der Bewegung des umgebenden Wassers, unter Umständen auch der umgebenden Luft getrennt zu untersuchen. Deshalb hat Euler eigentlich nur in dem statischen Teile der Schiffsmechanik, wo diese Auffassung nicht so zur Geltung kommt, praktische Resultate von bleibendem Werte geliefert.

Er beginnt mit dem Archimedischen Prinzipe des Gleichgewichtes schwimmender Körper. Er untersucht aber zweitens auch die Stabilität dieses Gleichgewichtes und teilt sich mit Bouguer[3]) in den Ruhm, die Lösung der praktisch außerordentlich wichtigen Frage gegeben zu haben. Bouguer hat durch die Einführung des Metazentrums die brauchbarste Lösungsform gefunden. Euler geht den anderen Weg, einen analytischen

1) Nach einem Vortrage des Verfassers auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Dresden ausgearbeitet. Der wörtliche Abdruck des Vortrages findet sich in der Physikalischen Zeitschrift.

2) Die selbständigen Schriften Eulers über diesen Gegenstand sind: Scientia Navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, Petersburg 1749 in zwei Teilen: I. Theoria universa de situ ac motu corporum aquae innatantium, II. Rationes ac praecepta navium construendarum et gubernandarum (im Text abkürzend zitiert als Sc. N.) und Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la navigation, Petersburg 1773 (angeführt als Théorie complète).

3) Traité du Navire, de sa construction et de ses mouvements. Paris 1746.

Ausdruck als (statische) Stabilität zu bezeichnen (Sc. N. I, Prop. 19, II, pag. 140). Aus diesem Ausdruck bestimmt sich das Moment der Kräfte, welche das gekrängte Schiff in seine Gleichgewichtslage zurücktreiben; er lautet:

$$\sigma = M\left(s + \frac{J}{D}\right) \tag{1}$$

(Sc. N. I, Prop. 29), wenn

M die Masse des Schiffes,
s den Abstand seines Schwerpunktes von dem Mittelpunkte des Auftriebes,
D das Deplacement und
J das Trägheitsmoment der Schwimmebene für die Symmetrieachse derselben

bezeichnet. Drittens hat Euler in mustergültiger Weise die Frage behandelt, wie sich die Gleichgewichtslage und Stabilität des Schiffes durch das Einbringen der Ladung ändert. Viertens hat er die Beanspruchung erforscht, welche die Teile des Schiffes durch den Druck und den Stoß des Wassers erfahren.[1]) Insbesondere hat er das später für die gesamte Technik so wichtig gewordene Biegungsmoment für den Schiffskiel in der heute noch üblichen Weise bestimmt. Fünftens untersuchte er die veränderte Lage, welche das Schiff unter der Einwirkung des Windes auf die Segel annimmt. Endlich hat er sechstens versucht, auf diese statischen Betrachtungen die Bestimmung der Schiffsform zu gründen. Die Querdimensionen des Schiffes, die Form der Spanten sollen so vorgesehen sein, daß die Arbeit, die nötig wäre, um dem Schiff eine für seine Sicherheit gefährliche Krängung zu geben, außerordentlich groß würde, d. h. wie man heute sagt, daß das Schiff große dynamische Stabilität besitzt. Bug und Vordersteven aber sollen so geformt sein, daß der Druck des Windes auf die Segel, wenn das Schiff vor dem Winde segelt, keine Überneigung desselben nach vorne zur Folge hat (Sc. N. II § 878 seq., Théorie complète, 3me partie, § 13—18). Diese Betrachtungen passen ziemlich genau auf die Schiffsformen, wie sie zu Eulers Zeit waren.[2]) Heute indes gestaltet man die Schiffsform so, daß der Bewegungswiderstand möglichst gering wird, das Überneigen des Schiffes nach vorn durch den Winddruck wird durch den Fall der Masten (d. h. die Neigung, die sie nach rückwärts haben)

---

1) Vgl. auch die Preisschrift in Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Acad. des Sciences t. 8, 1761.

2) Es ist interessant, zu den Arbeiten Eulers und Bouguers z. B. das große Handbuch des Schiffbaus von Vial du Clairbois (1805) zu vergleichen, das in gewissem Sinne den Höhepunkt der alten Schiffbautechnik repräsentiert.

ausgeglichen. Die Auffassung Eulers, daß ein größerer Widerstand beim Segelschiff belanglos sei, da er durch Vergrößerung der Segelfläche kompensiert werden könne (vgl. Sc. N. II, § 92), hat sich als irrig erwiesen. Als die besten Segler haben sich vielmehr Schiffe mit mäßiger, der Größe des Schiffes angepaßter Segelfläche herausgestellt.

Die Kinetik des Schiffes, wie sie Euler gibt, ist, abgesehen von dem schon zu Anfang hervorgehobenen Punkte, wesentlich dadurch gekennzeichnet, daß sie empirische Koeffizienten nach Möglichkeit zu vermeiden und sich auf apriorische Grundlage zu stellen strebt. Der Ausgangspunkt ist das Newtonsche Ähnlichkeitsgesetz, dem zufolge der Widerstand mit dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem Quadrate der linearen Dimensionen des Schiffes zunehmen soll. Diesem Gesetze gemäß bildet Euler zunächst für den Widerstand R einer ebenen Platte, wenn

F die eingetauchte Fläche,

i den Winkel zwischen der Flächennormale und der Bewegungsrichtung, der $< \frac{\pi}{2}$ vorauszusetzen ist,

V die Geschwindigkeit der Bewegung

bezeichnet, die Formel:

$$R = \alpha F V^2 \cos i^2. \tag{2}$$

Hierbei müßte α einen empirischen Koeffizienten bedeuten, für den aber Euler ohne weiteres den Wert $\alpha = \frac{1}{4g}$ nimmt. Für den Widerstand, den ein Schiff bei der Bewegung in der Kielrichtung erfährt, findet sich dann die der vorigen analoge Formel:

$$P = \alpha \mu F V^2, \tag{3}$$

wobei μ einen zu der eingetauchten Fläche F des Hauptspantes hinzukommenden Reduktionsfaktor bezeichnet. Euler glaubt nun in der Théorie complète, wenn

a die Länge, b die größte Breite, c den Tiefgang des Schiffes bedeutet,

$$\mu = \frac{2b^2}{a^2 + 2b^2}, \quad F = \tfrac{3}{4} bc$$

setzen zu dürfen. Er erhält somit die Formel:

$$P = \frac{1}{4g} \cdot \frac{2b^2}{a^2 + 2b^2} \cdot \tfrac{3}{4} b c V^2 \tag{4a}$$

und analog bei Seitwärtsbewegung des Schiffes den Widerstand:

$$Q = \frac{1}{4g} \cdot \frac{2a^2}{2a^2 + b^2} \cdot \tfrac{3}{4} a c V^2 .^{1)} \tag{4^b}$$

Wenn nun die Bewegungsrichtung des Schiffes mit der Kiellinie den Winkel δ einschließt, so daß nach der Seemannssprache δ die *Abtrift* bedeutet, so zerlegt Euler die wirkliche Bewegung in eine längsschiffs und eine querschiffs gerichtete Komponente und macht die nur für ein rechteckiges Kastenschiff begründete Annahme allgemein, daß sich die von diesen Teilbewegungen herrührenden Widerstände nach dem Parallelogrammgesetz zu dem Gesamtwiderstande zusammensetzen. Dann werden die längsschiffs und querschiffs genommenen Komponenten dieses Widerstandes, von dem Euler annimmt, daß man sich ihn bei drehungsfreier Bewegung des Schiffes im Schiffsschwerpunkte angreifend denken kann:

$$R_a = P \cos \delta^2, \quad R_b = Q \sin \delta^2, \tag{5}$$

wenn mit P, Q die Ausdrücke (4^a) und (4^b), gebildet für die wirkliche Schiffsgeschwindigkeit V, bezeichnet werden.

Die Wirkung des Ruders ist aus dem Widerstandsgesetz für ebene Platten herzuleiten. Bedeutet

G die Größe der Ruderfläche,

α den Winkel, um welchen diese aus der Kielrichtung herausgedreht ist,

so werden die Komponenten der Ruderkraft:

$$S_a = \frac{1}{4g} G V^2 \sin \alpha^3, \quad S_b = \frac{1}{4g} G V^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha. \tag{6}$$

Auch für die Komponenten des Antriebes, der durch die Wirkung des Windes auf die Segel entsteht, findet Euler eine explizite Formel. Diese lautet, wenn

v die Windgeschwindigkeit,

H die Segelfläche,

θ der Winkel, den die Stellung der Raaen mit dem Wind,

η der Winkel, den sie mit dem Kiel bildet:

$$T_a = \frac{1}{800} \frac{Hv^2}{4g} \sin \theta^2 \sin \eta, \quad T_b = \frac{1}{800} \frac{Hv^2}{4g} \sin \theta^2 \cos \eta. \tag{7}$$

1) Zur experimentellen Bestimmung der Widerstände P und Q hat Euler eine Versuchsanordnung angegeben, die im wesentlichen die fortan üblich gebliebene Methode der Prüfung von Schiffsmodellen in Versuchsbassins repräsentiert (Théorie complète 3me partie, § 52 seq.)

Als Angriffspunkt dieser Kraft ist der Segelschwerpunkt, centre vélique nach Bouguer, anzusetzen[1]), und man darf bei einem gut steuernden Schiff annehmen, daß derselbe in die Vertikale des Schiffsschwerpunktes fällt. Dann werden die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Schiffsschwerpunktes, wenn ϱ den Krümmungsradius der Bahn des Schiffes bedeutet:

$$(8)\qquad \begin{cases} M\left\{\dfrac{dV}{dt}\cos\delta - \dfrac{V^2}{\varrho}\sin\delta\right\} = g\,\{T_a - R_a - S_a\}, \\ M\left\{\dfrac{dV}{dt}\sin\delta + \dfrac{V^2}{\varrho}\cos\delta\right\} = g\,\{T_b - R_b - S_b\}, \end{cases}$$

und die Gleichung für die Drehung um die Vertikale durch den Schwerpunkt:

$$(9)\qquad J\frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M},$$

wenn ω die Drehgeschwindigkeit, J das Trägheitsmoment des Schiffes für die Vertikale durch den Schwerpunkt und $\mathfrak{M}$ das statische Moment der Ruderkraft und der Widerstandskräfte für dieselbe Achse bedeutet. Bei nicht gelegtem Ruder wird $\alpha = 0$ und damit S_a, $S_b = 0$. Ist das Schiff in gleichförmiger Bewegung, so wird noch $\frac{dV}{dt}$ und $\frac{1}{\varrho} = 0$. Dann ergibt sich:

$$T_a = R_a,\quad T_b = R_b.$$

Macht man:

$$T_a = T\cos\varphi,\quad T_b = T\sin\varphi,$$

indem der Winkel φ die zu der Stellung der Raaen senkrechte Richtung festlegt, und setzt ferner:

$$P = A\,V^2,\quad Q = B\,V^2,$$

so ergibt sich nach (5):

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{B}{A}\operatorname{tang}\delta^2.$$

Dies ist die Eulersche Abtriftformel.

Die vorstehend in freier Wiedergabe skizzierte Theorie Eulers hat in ihrer Einfachheit und Eleganz etwas unleugbar Bestrickendes, und sie hat durch diese Eigenschaften auch fördernd und anregend auf die Beschäftigung mit der Mechanik des Schiffes gewirkt. Es versteht sich aber fast von selbst, daß sie bei genauerer Prüfung schweren Bedenken unterliegt. Zunächst ist die Beurteilung des Schiffswider-

1) Die Eulersche Betrachtung ist insofern vereinfacht, als sie gemäß der Segelführung jener Zeit nur mit Raasegeln und nicht auch mit Stagsegeln zu rechnen hat.

standes eine unzureichende.[1]) Selbst abgesehen davon aber können die Formeln (4^a), (4^b) für P, Q nur als rohe Annäherungen gelten, und für die Komponenten des Widerstandes bei beliebig gerichteter Bewegung ergeben sich statt (5) unter Voraussetzung des Eulerschen Widerstandsgesetzes, wenn

ψ der Winkel, den die Normale eines Flächenelementes $d\omega$ der Außenhaut mit der Schwimmebene bildet und

θ der Winkel, den die durch diese Normale gelegte Vertikalebene mit der Mittschiffsebene einschließt,

die exakten Formeln:

$$R_a = V^2 \int \cos\psi^3 \cos(\delta - \theta)^2 \cos\theta \, d\omega,$$

$$R_b = V^2 \int \cos\psi^3 \cos(\delta - \theta)^2 \sin\theta \, d\omega,$$

wobei die Integrale über *den* Teil der eingetauchten Oberfläche des Schiffes zu erstrecken sind, der durch die Grenzbedingung

$$\delta - \frac{\pi}{2} < \theta < \delta + \frac{\pi}{2}$$

gegeben ist. Die Ausdrücke (5) können aber kaum als Näherungswerte dieser Integrale gelten.

Die Richtigkeit der Formel für die Wirkung des Ruders ist wieder von der Geltung des Eulerschen Widerstandsgesetzes abhängig, und das gleiche gilt in erhöhtem Maße betreffs der Formel für den Segeldruck. Was also Euler gibt, ist eigentlich nicht eine erste Annäherung an die Wirklichkeit, sondern vielmehr ein theoretisches Idealbild, das die Wirklichkeit ersetzt.

II.

Neben die Diskussion der fortschreitenden Bewegung stellt Euler die Untersuchung der Schiffsschwingungen. Er beschränkt diese Untersuchung, wie er ausdrücklich bemerkt (Sc. N. II, § 328), auf die Schwingungen im ruhigen Wasser, und es spricht sehr für seinen analytischen Scharfsinn, daß er die empirischen Daten, die für eine Behandlung der Schwingungen im Seegange erforderlich sind, richtig erkannt hat. Die Bedeutung der Eulerschen Arbeiten besteht aber hier nicht darin,

1) Sie bleibt es auch in der letzten Arbeit Eulers (Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris, Année 1778), in der er den Reibungswiderstand mit zu berücksichtigen sucht. Den modernen Standpunkt lernt man am besten aus der Arbeit von *H. Lorenz* (Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure Bd. 51, S. 1824, Nummer vom 16. Nov. 1907) kennen. Man hat die dort stehenden Formeln (21) ff. mit den Eulerschen Widerstandsformeln zu vergleichen.

daß er zu praktisch brauchbaren Lösungen gelangt, obwohl er den Charakter der Schiffsschwingungen als gedämpfter Pendelschwingungen erkannte, als vielmehr darin, daß er so den Anstoß erhielt, die allgemeine Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers unter der Einwirkung gegebener Kräfte zu behandeln.

Diese Behandlung beruht auf der Zerlegung der wirklichen Bewegung in eine Translationsbewegung des ganzen Körpers, die mit der Bewegung des Körperschwerpunktes übereinstimmt, und eine Drehung um den Schwerpunkt. Wie man die erstere in Komponenten nach drei zueinander senkrechten Achsen zerlegt, so hat man auch die letztere aus Teildrehungen um drei solche Achsen zusammenzusetzen, und bei passender Wahl dieser Achsen werden die Bewegungsgleichungen in einfacher Form und auf einfache Art erhalten. Die Schwierigkeit lag in der Auffindung eines Prinzipes, nach dem die erwähnten besonderen Achsen sich finden lassen, und dies ist Euler erst lange Zeit später, nachdem 1755 die Schrift von Segner erschienen war, geglückt.

Die Zerlegung der Bewegung in die des Schwerpunktes und die Drehung um denselben ist in der Scientia Navalis bereits konsequent durchgeführt (s. Vol. I, Art. 128). Aber die Achsen, auf welche die Rotationen um den Schwerpunkt reduziert werden, wählt Euler nicht nach kinetischen, sondern nach geometrischen und statischen Gesichtspunkten aus, indem er zwei davon horizontal, die eine längsschiffs, die andere querschiffs gerichtet, und die dritte vertikal annimmt. Die Eigenschaften, die er diesen Achsen durch eine besondere Hypothese (Sc. N. I, Artikel 184) zuschreibt, insbesondere die, daß der Schiffskörper um sie rotieren könne, als ob sie fest wären d. h. daß sie permanente Rotationsachsen seien, sind aber nicht begründet. Das Kapitel über die Schiffsschwingungen im 2. Bande der Sc. N. bedeutet insofern einen Fortschritt, als inzwischen Euler die Bedeutung und die Schwierigkeit des Problems klarer erkannt hat und in seinen Aussagen sich vorsichtiger beschränkt. Man sieht nicht recht, ob es bewußte Einsicht oder genialer Instinkt ist, daß er den Fall herausgreift, wo tatsächlich eine permanente Rotationsachse entsteht, wo nämlich die Drehung um eine zur Symmetrieebene des Schiffes senkrechte Achse erfolgt, das Schiff also eine stampfende Bewegung ausführt. (Nur ist in Wirklichkeit die Dämpfung durch den Widerstand des Wassers dann so groß, daß keine freie Schwingung zustande kommen kann.)

Der Weg, den Euler zur vollständigen Lösung des Bewegungsproblems für den starren Körper eingeschlagen hat, ging aber doch von einer Bemerkung aus, die bereits in der Scientia Navalis (Vol. I, Art. 185) enthalten ist. Euler sagt hier: satis intelligitur corpus circa

alium axem liberum et immotum gyrari non posse, nisi circa quem omnes vires centrifugae se destruant. Von diesem Satz ist das Lemma, das in der entscheidenden Abhandlung Eulers[1]) die Grundlage bildet, die wörtliche Übersetzung: le corps ne saurait tourner librement qu'autour d'un tel axe par rapport auquel toutes les forces centrifuges ... se détruisent mutuellement.

Die Analyse, die Euler an diesen Satz knüpft, läßt sich in modifizierter Form folgendermaßen wiedergeben. Legt man in den Schwerpunkt des starren Körpers den Ursprung eines Koordinatensystems und bezeichnet mit α, β, γ die Richtungscosinus einer durch den Schwerpunkt gehenden Rotationsachse von der ausgezeichneten Beschaffenheit, sind dann x, y, z die Koordinaten eines Massenelementes dm des Körpers, r der Abstand dieses Elementes vom Schwerpunkt, s sein Abstand von der Rotationsachse, so wird die auf das Element wirkende Zentrifugalkraft, wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit ist, der Größe nach $= \omega^2 s\, dm$ und der Richtung nach durch die Linie des Abstandes s gegeben. Nun werden die Projektionen dieses Abstandes auf die Koordinatenachsen:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= (\beta^2+\gamma^2)\,x - \alpha\beta y - \alpha\gamma z,\\ \eta &= (\gamma^2+\alpha^2)\,y - \beta\gamma z - \beta\alpha x,\\ \zeta &= (\alpha^2+\beta^2)\,z - \gamma\alpha x - \gamma\beta y \end{aligned}\right.$$

und dann die Komponenten der Zentrifugalkräfte $\omega^2\xi\, dm$, $\omega^2\eta\, dm$, $\omega^2\zeta\, dm$. Multipliziert man die Ausdrücke (1) mit $\omega^2 dm$ und integriert über den Körper, so verschwinden die entstehenden Integrale, weil der Ursprung der Schwerpunkt ist und somit

$$(2)\qquad \int x\, dm = 0,\ \int y\, dm = 0,\ \int z\, dm = 0$$

wird. Sollen die Zentrifugalkräfte im statischen Gleichgewichte sein, so müssen aber außerdem ihre statischen Momente für die Koordinatenachsen gleich Null werden, und somit ergibt sich, daß auch die folgenden drei Ausdrücke verschwinden:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega^2\int(\zeta y - \eta z)\, dm &= \omega^2\int(\beta z - \gamma y)\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dm,\\ \omega^2\int(\xi z - \zeta x)\, dm &= \omega^2\int(\gamma x - \alpha z)\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dm,\\ \omega^2\int(\eta x - \xi y)\, dm &= \omega^2\int(\alpha y - \beta x)\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dm. \end{aligned}\right.$$

Daraus folgt, daß

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \int x\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dm &= \varrho\alpha,\\ \int y\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dm &= \varrho\beta,\\ \int z\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dm &= \varrho\gamma \end{aligned}\right.$$

1) Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'Année 1758, p. 131. Die später zu berücksichtigende Arbeit steht unmittelbar hinter diesem Aufsatz.

sein muß, wenn ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, und wenn man mit Euler schreibt:

$$(5)\qquad \begin{cases} \int x^2 dm = A, \int y^2 dm = B, \int z^2 dm = C, \\ \int yz dm = D, \int zx dm = E, \int xy dm = F, \end{cases}$$

so wird:

$$(6)\qquad \begin{cases} A\alpha + F\beta + E\gamma = \varrho\alpha, \\ F\alpha + B\beta + D\gamma = \varrho\beta, \\ E\alpha + D\beta + C\gamma = \varrho\gamma. \end{cases}$$

Damit sind diese Achsen als die Hauptträgheitsachsen oder Hauptachsen, wie Euler sagt, nachgewiesen. Es sind die Hauptachsen der durch die Gleichung:

$$(7)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Dyz + 2\,Ezx + 2\,Fxy = 1$$

dargestellten Fläche 2. Ordnung, und wählt man sie zu Koordinatenachsen, so wird:

$$(8)\qquad \int yz\,dm = 0, \int zx\,dm = 0, \int xy\,dm = 0.$$

So war Euler wieder auf dem Gebiet angelangt, das er in der Scientia Navalis bereits betreten hatte. Dort hatte er (Vol. II, § 217) die Zurückführung des Trägheitsmomentes für eine beliebige Achse auf eine dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt gefunden und an dem besonderen Falle einer mediansymmetrischen Fläche, wie es die Schwimmebene eines Schiffes ist, auch die charakteristische Eigenschaft der Hauptträgheitsachsen ermittelt (Sc. N. II, § 207). Nachdem er diese jetzt allgemein gewonnen hatte, war es leicht, das Problem der Drehungen eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt vollständig zu lösen.

Euler hätte diese Lösung so geben können, wie er es in der Scientia Navalis versucht hatte, indem er von der Eigenschaft der Hauptträgheitsachsen als permanenter Rotationsachsen ausging und nur bei der Aufstellung der Gleichung für die Drehung um eine der Hauptachsen die jedesmal von den gleichzeitigen Drehungen um die beiden anderen Hauptachsen herrührenden Zentrifugalkräfte zu den wirkenden Kräften hinzufügte. Läßt man die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen zusammenfallen, so ergibt sich aus den Formeln (3) und (8) für die erste dieser Achsen das statische Moment der Zentrifugalkräfte in der Form:

$$\Phi = (C - B)\,qr = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,qr,$$

wenn:

$$\omega\alpha = p, \omega\beta = q, \omega\gamma = r$$

die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um die Hauptachsen und

$$\mathfrak{A} = \int (y^2 + z^2)\, dm,\ \mathfrak{B} = \int (z^2 + x^2)\, dm,\ \mathfrak{C} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

die Trägheitsmomente für die Hauptachsen bedeuten, und die Gleichung für die Drehung um die betr. Hauptachse lautet gemäß der von Euler in der Sc. N. verwendeten Huygensschen Formel:

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} = L + \Phi,$$

wenn L das statische Moment der wirkenden Kräfte für diese Achse ist. Die vorstehende Gleichung geht bei Einführung des Ausdruckes für Φ über in die folgende:

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\, qr = L,$$

wozu noch zwei entsprechende Gleichungen für die zweite und dritte Achse treten.

Euler zieht es aber vor, statt die Huygenssche Pendelformel zu benutzen, auf die Newtonsche Definition der Kraft zurückzugehen und das d'Alembertsche Prinzip auf den starren Körper anzuwenden, für den es die Gleichung

$$\int \left(y\frac{dw}{dt} - z\frac{dv}{dt}\right) dm = L$$

mit zwei entsprechenden liefert, wenn u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten für das Körperelement dm bezeichnen. Euler findet dann aus den Formeln für die Komponenten der Verschiebung, die das Körperelement bei der Rotation während der Zeit dt erleidet:

$$udt = \omega dt\,(\beta z - \gamma y) = dt\,(qz - ry),$$
$$vdt = dt\,(rx - pz),\quad wdt = dt\,(py - qx)$$

durch Differentiation nach der Zeit:

$$du = zdq - ydr - dt\,\{(q^2 + r^2)\,x - pqy - prz\} \text{ usw.}$$

Demnach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung für L mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) in die folgende:

$$\int \frac{dp}{dt}(y^2 + z^2)\, dm + \int qr\,(y^2 - z^2)\, dm = L$$

oder:

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\, qr = L,$$

wozu wieder zwei entsprechende Gleichungen treten. Dies ist die historisch erste Ableitung der später unter der Bezeichnung als Eulersche Gleichungen in allgemeinen Gebrauch gekommenen Formeln.

Konstruktion eines Kegelschnittes, wenn ein reeller Punkt P, zwei konjugiert imaginäre Punkte und zwei konjugiert imaginäre Tangenten gegeben sind.

Von K. Rohn in Leipzig.

Die beiden konjugiert imaginären Punkte seien bestimmt als die Doppelpunkte einer Punktinvolution auf dem Träger u mit den Punktepaaren K, K_1 und L, L_1. Die konjugiert imaginären Tangenten seien bestimmt als die Doppelstrahlen einer Strahlinvolution mit dem Scheitel S und den Strahlenpaaren f, f_1 und g, g_1. Hiernach sind K, K_1 sowie L, L_1 konjugierte Punkte, ferner f, f_1 sowie g, g_1 konjugierte Strahlen des gesuchten Kegelschnittes k.

Zunächst läßt sich ein Strahlenpaar a, a_1 der Strahlinvolution konstruieren, das den Träger u in einem Punktepaar A, A_1 der Punktinvolution schneidet. Es bilden nämlich a, a_1 das gemeinsame Strahlenpaar zweier Strahlinvolutionen; die eine von ihnen enthält die Strahlenpaare f, f_1 und g, g_1, die andere die Strahlenpaare SK, SK_1 und SL, SL_1. Dann ist entweder $A = a \times u$ der Pol von a_1 oder $A_1 = a_1 \times u$ der Pol von a bezüglich k. Denn zu dem Punkt A_1 gehören als konjugierte Punkte sowohl der Punkt A als auch der Pol von a_1, der auf a liegt. Fallen diese beiden Punkte nicht zusammen, so ist ihre Verbindungslinie a die Polare von A_1; fallen sie zusammen, so ist eben A der Pol von a_1.

Wir dürfen jede der beiden soeben erwähnten Annahmen machen und erhalten so zwei verschiedene Fälle; jeder führt, wie wir weiterhin sehen werden, zu zwei verschiedenen Lösungen, so daß sich im ganzen vier Lösungen ergeben. Es mag genügen, den einen der beiden Fälle weiter zu behandeln, und zwar setzen wir fest, daß A der Pol von a_1 sei.

Wir ziehen jetzt den Strahl $SP = b$ und bezeichnen mit B den Schnittpunkt $b \times u$. Zu diesem Strahl b suchen wir in der gegebenen Strahlinvolution den konjugierten Strahl b_1 und zu dem Punkt B in der gegebenen Punktinvolution auf u den konjugierten Punkt B_1 (B_1 liegt nicht auf b_1). Hierauf schneiden wir PB_1 mit b_1 in X; ferner sei $u \times b_1 = U$ und $AP \times b_1 = V$.

Angenommen, die Polare s' von S in bezug auf k wäre uns bekannt; dann geht s' durch die Pole von a_1, a, b_1, b hindurch; es sind das beziehungsweise die Punkte $A = s' \times a$, $A'_1 = s' \times a_1$, $B' = s' \times b$ und

$B'_1 = s' \times b_1$. Nun haben wir zwei Paare konjugierter Punkte B, B_1 und B', X (da X auf der Polaren b_1 von B' liegt). Wählen wir sie als zwei Paare von Gegenecken eines Vierseits, so bildet nach einem bekannten Satz auch sein drittes Paar von Gegenecken, nämlich P und $H = BX \times B_1 B'$, zwei konjugierte Punkte. P liegt aber auf k, die zugehörige Tangente geht deshalb durch H; außerdem muß sie durch den Pol B'_1 von b gehen. Mit anderen Worten: $AB' = s'$ und PH müssen sich auf b_1 schneiden.

Wie ist nun s' zu wählen, damit der Schnittpunkt von $s' = AB'$ und PH auf dem Strahle b_1 liegt? Lassen wir den Strahl $B_1 H B'$ eine Drehung um B_1 ausführen, dann beschreiben der Punkt B' auf b und der Punkt H auf BX projektive Punktreihen. Demgemäß erzeugen bei dieser Bewegung die Strahlen AB' und PH einen Kegelschnitt i; er wird den Strahl b_1 in zwei Punkten B'_1 und B''_1 schneiden. Jeder dieser beiden Punkte hat die verlangte Eigenschaft, d. h. wir dürfen

nach Belieben entweder $A B_1' = s'$ oder $A B_1'' = s''$ als Polare von S wählen; hieraus ergeben sich je nach der Wahl zwei verschiedene Kegelschnitte als Lösung unseres Problems.

Die Konstruktion des Hilfskegelschnittes i ist jedoch völlig überflüssig; denn es läßt sich zeigen, daß sowohl S, X als auch U, V konjugierte Punkte in bezug auf den Kegelschnitt i sind, daß also B_1' und B_1'' die Doppelpunkte einer Involution mit den beiden Punktepaaren S, X und U, V sind.

Um dieses einzusehen, betrachte man den Kegelschnitt i etwas näher. Zunächst geht i durch die Scheitel A und P der erzeugenden Strahlbüschel. Dreht sich der Strahl $B_1 H B'$ um B_1 und rückt B' nach P, so rückt H nach X, sonach berührt i in P die Gerade PX. Rückt B' nach B, so rückt auch H nach B; es ist also B ein Punkt von i, und die zugehörige Tangente ist BX. Das letztere erkennt man leicht daraus, daß BX mit i keinen andern Punkt gemein haben kann. Mithin ist PB die Polare von X in bezug auf i, oder es sind X und S konjugierte Punkte sowie b und b_1 konjugierte Gerade bezüglich i. Verbindet man aber die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnittes mit irgendeinem seiner Punkte, so schneiden diese Verbindungslinien auf jeder Geraden, die zu jener konjugiert ist, konjugierte Punkte aus. Wenden wir diesen Satz auf unseren Fall an, so ersehen wir, daß PA und BA auf b_1 zwei in bezug auf i konjugierte Punkte V und U ausschneiden. B_1' und B_1'' sind also in der Tat die Doppelpunkte einer Involution mit den beiden Punktepaaren S, X und U, V.

Wählt man etwa $A B_1' = s'$ als Polare von S, so kennt man von dem gesuchten Kegelschnitt k zwei Polardreiecke $S A A_1'$ und $S B B_1'$ und den reellen Punkt P mit seiner Tangente $P B_1'$. Mit Hilfe des Polardreiecks $S A A_1'$ erhält man sofort drei weitere Punkte mit ihren Tangenten und kann dann k in bekannter Weise zeichnen.

Hätte man ursprünglich angenommen, daß A_1 der Pol von a sei, so hätte sich als Pol von b einer der beiden Doppelpunkte der Involution mit den beiden Punktpaaren S, X und U, W ergeben, wo $W = b_1 \times P A_1$ ist.

Unsere Darlegung zeigt, daß wir zu vier Kegelschnitten gelangen, deren Bestimmung die folgenden Konstruktionen erfordert. Zunächst hat man das gemeinsame, stets reelle Strahlenpaar a, a_1 zweier Involutionen zu suchen, von denen die Strahlenpaare f, f_1 und g, g_1 beziehentlich SK, SK_1 und SL, SL_1 bekannt sind. Dann hat man entweder $u \times a = A$ als Pol von a_1 oder $u \times a_1 = A_1$ als Pol von a zu nehmen. Ferner suche man zu $SP = b$ in der gegebenen Strahl-

involution den entsprechenden Strahl b_1 und zu $B = b \times u$ in der gegebenen Punktinvolution den entsprechenden Punkt B_1. Sind nun U, X, V, W die Schnittpunkte des Strahles b_1 mit den Geraden u, PB_1, PA und PA_1, so bestimme man endlich auf b_1 die Doppelpunkte B_1' und B_1'' der Involution mit den Punktepaaren S, X und U, V sowie die Doppelpunkte B_2' und B_2'' der Involution mit den Punktpaaren S, X und U, W. Dann ergeben sich folgende vier Kombinationen:

1) A Pol von a_1, B_1' Pol von b, S Pol von AB_1',
2) A Pol von a_1, B_1'' Pol von b, S Pol von AB_1'',
3) A_1 Pol von a, B_2' Pol von b, S Pol von A_1B_2',
4) A_1 Pol von a, B_2'' Pol von b, S Pol von A_1B_2''.

Hiernach kennt man von den gesuchten Kegelschnitten in jedem Falle zwei Polardreiecke; sind diese reell, so erhält man unmittelbar zu P noch drei weitere reelle Punkte des gesuchten Kegelschnittes samt ihren Tangenten und somit seine reelle Konstruktion.

Es zeigt sich nun, daß von den vier Lösungen unserer Aufgabe stets *zwei* reell und *zwei* konjugiert imaginär sind, was darauf hinauskommt, daß von den vier möglichen Polen des Strahles b stets zwei, etwa B_1' und B_1'', reell, die beiden andern aber imaginär sind. Es werden nämlich B_1' und B_1'' reell sein, sobald von den beiden Strecken SX und UV die eine ganz innerhalb oder ganz außerhalb der andern liegt. Projiziert man diese beiden Strecken aus P auf die Gerade u, so müssen auch die Strecken BB_1 und UA die eben genannte Eigenschaft besitzen. Da sich aber die Punktepaare A, A_1 und B, B_1 trennen, so wird das Punktepaar B, B_1 zusammen mit je einem der beiden Punktepaare U, A bez. U, A_1 zwei Involutionen bestimmen, von denen das eine reelle, das andere imaginäre Doppelpunkte aufweist. Dementsprechend wird das eine Punktepaar, etwa B_1', B_1'', reell und das andere imaginär; gleiches tritt dann für die zugehörigen Kegelschnitte ein.

Über die Logik der Geometrie.

Von A. Korselt in Plauen i. V.

Bevor ich auf die gegen mich gerichteten Bemerkungen des Herrn Frege in Band 15 dieser Zeitschrift eingehe, muß ich mich mit dem Leser über einige logische Dinge verständigen. Ich folge dabei der meiner Ansicht nach unübertroffenen Darstellung von Bolzano in seiner „Wissenschaftslehre" (W.L.), 4 Bde., Sulzbach 1837.

§ 1. Unser Denken vollzieht sich in wirklich gehabten (subjektiven) Sätzen und Vorstellungen. Ein objektiver Satz (Satz an sich)[1]) oder eine objektive Vorstellung (Vorstellung an sich, d. h. ohne Rücksicht darauf, ob sie von jemand gedacht wird oder nicht) ist der *Stoff* eines subjektiven Satzes (einer subjektiven Vorstellung). Ein subjektiver Satz heißt auch Urteil. Dieses ist zugleich mit dem entsprechenden objektiven Satze wahr oder falsch. Von dem Satze ist zu unterscheiden sein Ausdruck, der Satzausdruck.

Wo nichts anders gesagt wird, sprechen wir im folgenden nur von objektiven Vorstellungen oder Sätzen.

Ein Satz besteht aus Vorstellungen. Eine Vorstellung ist ein Teil eines Satzes, der selbst noch kein Satz ist. Jeder Satz läßt sich auf die Form bringen:

(Jedes) A hat (die Beschaffenheit) b,

worin für A eine beliebige, für b nur eine Beschaffenheitsvorstellung gesetzt werden darf. Ein logischer Gegenstand ist entweder ein Satz oder eine Vorstellung.

Eine Vorstellung ist entweder einfach (hat keine Teile) oder zusammengesetzt. Die Summe der Teile eines logischen Gegenstandes heißt sein Inhalt. Keine Vorstellung hat von allen den größten Inhalt.

In vielen zusammengesetzten Vorstellungen gibt es Bestandteile, die den Zusammenhang zwischen anderen Teilen herstellen, z. B. die Vorstellungen: Haben, Sein.

Eine Vorstellung von der Form: was (die Beschaffenheit) b hat, ist eine *konkrete* oder Klassenvorstellung, Vorstellung einer Klasse. Die hierin erscheinende Vorstellung b ist die Vorstellung einer Beschaffenheit, eine *abstrakte* Vorstellung. Es gibt aber Vorstellungen, die weder abstrakt noch konkret sind, z. B.: etwas, Cäsar.

1) Herr Frege sagt „Gedanke".

Eine Vorstellung, die Gegenstände hat (unter die Gegenstände fallen), heißt Gegenstandsvorstellung, gegenständliche oder erfüllte Vorstellung, eine Vorstellung, die keine Gegenstände hat, ist leer, gegenstandslos. Hierbei ist das Wort „Gegenstand" im Sinne von „etwas überhaupt" gebraucht und nicht etwa in eingeschränkterem Sinne zu nehmen.

Die (logische) Summe der Gegenstände einer Vorstellung heißt ihr Umfang, Gebiet. Vorstellungen desselben Umfanges heißen gleichgeltende, *verschiedene* gleichgeltende Vorstellungen heißen Wechselvorstellungen.

Eine Vorstellung ist Gemeinvorstellung oder Einzelvorstellung, je nachdem sie mehrere oder nur einen Gegenstand hat. „Eigenvorstellung" ist eine Einzelvorstellung, die weder abstrakt noch konkret ist, z. B. „Vesuv".

Eine Vorstellung ist überfüllt, wenn sie mehr Teile enthält als zur Darstellung ihrer Gegenstände nötig sind; wenn nicht, ist sie rein. Eine Vorstellung, die ihren Gegenständen widerstreitende Beschaffenheiten beilegt, ist eine widerspruchsvolle oder imaginäre Vorstellung. Jede andere (mag sie auch leer sein) Vorstellung heißt real.

Eine einfache Vorstellung, die nur einen Gegenstand hat, heißt Anschauung. Eine Vorstellung, die Anschauung ist oder Anschauungen als Teile enthält, ist eine gemischte Vorstellung. Eine nicht gemischte Vorstellung heißt Begriff. Jeder Begriff ist also entweder eine zusammengesetzte Vorstellung oder eine einfache Nicht-Einzelvorstellung. Die Vorstellungen der Analysis, Geometrie und Mechanik sind Begriffe, ebenso wie die Vorstellungen der Logik.

Eine Vorstellung von der Form: *Vorstellung*, welche die Beschaffenheit b hat, ist eine Vorstellungs- oder symbolische Vorstellung.[1]) Ihre Gegenstände sind Vorstellungen.

Ein Inbegriff oder ein Ganzes (schlechthin, rein, ohne Zusatz) im engeren Sinne ist etwas, das Zusammengesetztheit hat. In dem Begriffe eines „Inbegriffes" ist nicht bestimmt, in welcher Ordnung oder Folge die den Inbegriff zusammensetzenden Gegenstände erscheinen, ist nicht einmal festgesetzt, ob es eine solche Anordnung gibt oder geben könne. Die gewöhnlichen Mitglieder eines Vereins bilden einen Inbegriff.

Ein Inbegriff namentlich angegebener Gegenstände A, B, C, . . . enthält den Begriff der Verbindung, ausgedrückt durch „und", nur einmal. Die Vorstellung eines Inbegriffes von Gegenständen (seien sie

1) Herr Frege sagt: Begriff zweiter Stufe.

namentlich angegeben oder nicht), die jeden Gegenstand dieses Inbegriffes darstellt, ist eine distributive oder Teilvorstellung. Die Vorstellung eines Inbegriffes (z. B. Wald, Heer), die nur diesen Inbegriff, nicht seine einzelnen Gegenstände betrifft, ist eine Kollektiv- oder Sammelvorstellung.

Ein Inbegriff, für den die Ordnung und Art der Zusammensetzung seiner Teile (Gegenstände) wesentlich, also Merkmal ist, heißt geordneter oder gestalteter Inbegriff, eine *Mannigfaltigkeit.*

Ein „Inbegriff im weiteren Sinne" ist ein Inbegriff im engeren Sinne oder ein einzelner Gegenstand. Im folgenden gebrauchen wir, wenn nichts anderes gesagt ist, „Inbegriff" im weiteren Sinne.

Ein Inbegriff ist eine Menge, wenn in seiner Vorstellung nichts anderes bestimmt ist, als daß die Art der Zusammensetzung aus Teilen, falls es überhaupt eine solche Anordnung gibt, unwesentlich sein soll.

Ein Inbegriff „enthält einen Gegenstand mehrmals, besteht zum Teil oder ganz aus gleichen Gegenständen," wenn er verschiedene objektive oder subjektive Vorstellungen dieses Gegenstandes enthält, auf deren Inhalt es für gewisse Untersuchungen nicht ankommen soll. Man spricht dann wohl von einer „Mehrheit gleicher Gegenstände."

Ein Inbegriff, in dem jeder Gegenstand einer Vorstellung a und sonst kein Gegenstand erscheint, ist „der Inbegriff, das Ganze, das All der a."

Eine Klasse ist ein Inbegriff, von dem jeder Gegenstand durch eine und dieselbe konkrete Vorstellung bestimmt wird.

Eine Vorstellung heißt Beziehung, wenn ihre Gegenstände geordnete Inbegriffe sind. Der Umfang einer Beziehung ist ein Relativ oder eine Beziehschaft.

Eine Beziehung kann leere, Einzelbeziehung oder Allgemeinbeziehung sein. Die Gegenstände der Inbegriffe, die eine Beziehschaft zusammensetzen, sind die Glieder derselben oder der Beziehung, ihre Summe ist das Feld der Beziehschaft oder der Beziehung. Ein Gegenstand, der in einem Element der Beziehschaft „mehrmals enthalten" ist, tritt aber in das Feld derselben nur einmal ein.

Eine Beschaffenheit eines zusammengesetzten Ganzen, die nicht seinen Gegenständen zukommt, ist ein Verhältnis *zwischen* diesen Gegenständen, und zwar ein äußeres Verhältnis für jeden derselben, wenn wir als veränderlich (ersetzbar) betrachten sowohl jene Gegenstände als auch die Beziehung zwischen diesen Gegenständen. Jede andere Beschaffenheit eines Gegenstandes ist eine innere oder eine „Eigenschaft" desselben. Eine Eigenschaft eines Gegenstandes ist also durch diesen selbst oder seine Teile bestimmt und ändert sich nicht, wenn wir

andere und andere Gegenstände mit dem Gegenstande vergleichen. So ist z. B. Rechtwinkligkeit eines Dreiecks eine Eigenschaft, seine Lage in einer bestimmten Ebene ein Verhältnis desselben zu andern Gegenständen, die nicht Teile von ihm sind.

Die Gegenstände eines Inbegriffs stehen im Verhältnisse der Gleichheit oder Ungleichheit, in gegenseitigen oder einseitigen Verhältnissen, je nachdem sie an der Beschaffenheit, die ihrem Inbegriffe zukommt, denselben Anteil nehmen oder nicht. So sind z. B. *mehrere* Gegenstände einander gleich, wenn in der Vorstellung (a) ihres Inbegriffes die Vorstellung (b) eines jener Gegenstände auftritt derart, daß a in eine gleichgeltende Vorstellung übergeht, wenn b durch eine Vorstellung eines beliebigen jener Gegenstände ersetzt wird. Hiernach ist die „Gleichheit" gewisser rationaler Zahlen, Fundamentalreihen usw. nicht mehr willkürlich zu *definieren*, sondern aus den Beschaffenheiten ihres Inbegriffes zu *beweisen.*

So zeigt sich z. B., daß die Vorstellung:

Inbegriff (All) der Paare (x, y) ganzer Zahlen, deren zweites Glied (y) von Null verschieden ist, und die mit einem gegebenen Paare (a, b) von derselben Beschaffenheit derart zusammenhängen, daß $xb = ya$ ist,

einen Inbegriff „gleicher" rationaler Zahlen bestimmt, oder wie man auch sagt, rationale gleiche Zahlen darstellt. Denn hier kann jedes derartige Paar an die Stelle von (a, b) treten, ohne daß der eben bestimmte Bereich sich ändert.

Hiermit soll dem Mathematiker nicht verwehrt sein, eine Vorstellung gleich in ihrer Definition mit dem Namen „gleich a" zu belegen, wo a ein Gegenstand einer gewissen Art ist, denn das würde nur zu unnützer Überladung mit neuen Worten führen, sondern er hat nur, um den Namen „gleich a" zu rechtfertigen, nachzuweisen, daß

a unter jene Vorstellung fällt (a gleich a ist),

und daß, wenn b unter jene Vorstellung fällt (b gleich a ist), die Vorstellungen *gleich* a und *gleich* b gleichgeltende Vorstellungen sind.

Hieraus ergibt sich: ist sowohl b als c gleich a, so ist auch b gleich c (so sind *gleich* b und *gleich* c gleichgeltende Vorstellungen). Denn Vorstellungen, die einer und derselben Vorstellung gleichgelten, sind selbst gleichgeltend.

Ein Gegenstand kann Element mehrerer „Inbegriffe gleicher Gegenstände" sein, dann wählt man diesen Namen nur für einen gewissen dieser Inbegriffe, den übrigen gibt man andere Namen (z. B. Inbegriff ähnlicher, inhaltsgleicher, kongruenter, paralleler usw. Gegenstände).

Eine Beziehung oder Beziehschaft ist zweigliedrig, dreigliedrig usw.,

wenn jeder ihrer Gegenstände zwei, drei ..... Glieder hat. Die Paare, Dreier usw. der Vorstellungen oder Gegenstände *a*, *b*, *c* .... bezeichnen wir mit *a/b*, *a/b/c* usw.

Ein Paar kann Selbstpaar (wie *a/a*) oder Nichtselbstpaar (wie *a/b*) sein.

Die Gegenstände *a* und *b* sind durch die zweigliedrige Beziehung *c* gepaart, liegen in bezug auf dieselbe zusammen, wenn *a/b* oder *b/a* Gegenstand (Element) von *c* ist, unter *c* fällt. In dem Paare *a/b* ist *a* Vorderglied, *b* Hinterglied. Jedes Glied einer zweigliedrigen Beziehung tritt in ihr nur als Vorderglied oder nur als Hinterglied oder sowohl als Vorderglied wie als Hinterglied auf. Darnach heißt es bezüglich Anfangsglied, Endglied, inneres Glied der Beziehung. Anfangs- und Endglieder sind die (entgegengesetzten) Außenglieder einer Beziehung oder Beziehschaft.

Die *Umkehrung* einer zweigliedrigen Beziehschaft ist eine (zweigliedrige) Beziehschaft, die aus der gegebenen entsteht, wenn in jedem ihrer Gegenstände Vorderglied und Hinterglied vertauscht werden.

Eine zweigliedrige Beziehung *a* ist

symmetrisch, wenn mit *b/c* auch *c/b* Element von *a* ist;

fortleitend (transitiv), wenn mit *b/c* und *c/d* auch *b/d* Element von *a* ist;

durchgängig, wenn, falls *c* und *d* verschiedene Glieder von *a* sind, entweder *c/d* oder *d/c* Paar von *a* ist;

einseitig, wenn mit *b/c* niemals gleichzeitig *c/b* Paar von *a* ist;

Gleichheitsbeziehung, wenn sie symmetrisch, fortleitend, durchgängig und gegenständlich ist.

Eine zweigliedrige Beziehschaft ist

Funktion, wenn zu jedem ihrer Vorderglieder ein einziges Hinterglied gehört;

Argument, wenn zu jedem ihrer Hinterglieder nur ein Vorderglied gehört;

Substitution, wenn sie Funktion und Argument ist;

Permutation, wenn sie Substitution ist und das Gebiet der Vorderglieder mit dem Gebiete der Hinterglieder zusammenfällt.

Die Beziehung *b* ist ähnlich der Beziehung *a*, wenn *b* aus *a* dadurch hervorgeht, daß gewisse Glieder von *a* ersetzt werden, so aber, daß verschiedene Glieder wieder in verschiedene Glieder übergehen. Wo also vor der Ersetzung verschiedene Glieder stehen, muß dies auch nach der Ersetzung der Fall sein. Ein Inbegriff *m* von Beziehungen ist ein Inbegriff ähnlicher Beziehungen, wenn es eine Beziehung *a* gibt, der

jede Beziehung aus *m* ähnlich ist. Nach dem oben Erklärten ist „das All der zu einer Beziehung *a* ähnlichen Beziehungen" ein Inbegriff „gleicher" Gegenstände.

Jede Beziehung (oder Beziehschaft) ist sich selbst ähnlich.

Die Vorstellungen *a* und *b*, wie auch ihre Umfänge, haben gleiche Weite, wenn es eine Substitution *c* gibt derart, daß jedes *a* ein Vorderglied (oder Hinterglied) und jedes *b* ein Hinterglied (bez. Vorderglied) von *c* ist, und daß jedes Glied von *c* unter *a* oder *b* fällt.[1]) Die *Klassen* *a* und *b* haben dann dieselbe Mächtigkeit oder Anzahl. Ein Inbegriff von Vorstellungen ist ein Inbegriff gleichweiter Vorstellungen, wenn jede derselben dieselbe Weite hat wie eine gewisse, eine und dieselbe, Vorstellung.

„Verneinung einer Vorstellung *a*" oder „etwas Nicht-*a*" ist die Vorstellung „etwas, was nicht Gegenstand von *a* ist".

Vorstellungen sind verträglich oder unverträglich, je nachdem sie gemeinsame Gegenstände haben oder nicht haben. Eine Vorstellung und ihre Verneinung sind unverträglich.

Die Vorstellung *a* wird umfaßt von der Vorstellung *b*, wenn jeder Gegenstand von *a* auch unter *b* fällt. Vorstellungen, deren jede die andere umfaßt, sind Wechselvorstellungen. Ist das Verhältnis des Umfassens nur einseitig, so ist die umfaßte Vorstellung die untergeordnete, die andere die übergeordnete Vorstellung. Diese Verhältnisse sind besondere Fälle der Verträglichkeit von Vorstellungen.

Eine Vorstellung heißt höchste (niedrigste) Vorstellung einer gewissen Art *A*, wenn es keine ihr übergeordnete (untergeordnete) Vorstellung der Art *A* gibt. In einer Art *A* können mehrere höchste oder niedrigste Vorstellungen auftreten. „Etwas" ist eine höchste, „nichts" eine niedrigste Vorstellung in bezug auf alle Vorstellungen. Nicht jede Art hat höchste oder niedrigste Vorstellungen.

Inbegriffe von Vorstellungen sind verträgliche oder unverträgliche Inbegriffe von Vorstellungen, je nachdem es einen Gegenstand gibt oder nicht gibt, der unter eine Vorstellung aus jedem dieser Inbegriffe fällt.

Der Inbegriff *a* von Vorstellungen ist ein Inbegriff umfaßter Vorstellungen in bezug auf den Inbegriff *b* von Vorstellungen, und dieser ein Inbegriff umfassender Vorstellungen in bezug auf *a*, wenn jeder Gegenstand irgendeiner Vorstellung aus *a* auch unter eine Vorstellung aus *b* fällt. Besteht hierbei *b* aus mehreren Vorstellungen, so braucht

---

1) Ferner soll das eine Halbfeld von *c* mit dem Umfange von *a*, das andere mit dem Umfange von *b* zusammenfallen.

keine einzige Vorstellung aus a von einer Vorstellung aus b umfaßt zu werden.

Zwei Inbegriffe von Vorstellungen stehen im Verhältnis des Umfassens, wenn der eine zum andern in diesem Verhältnisse steht. Ist dieses Umfassen gegenseitig, so hat man gleichgeltende Inbegriffe von Vorstellungen.

Eine Mehrheit a von Vorstellungen ist eine Mehrheit verketteter, verschlungener, unabhängiger Vorstellungen, wenn jede Verteilung dieser Vorstellungen in zwei Klassen zwei verträgliche Inbegriffe ergibt, von denen aber keiner den andern umfaßt. Wird diese Bedingung weggelassen, so erhält man den Begriff eines „Inbegriffes von zusammenhängenden Vorstellungen."

Eine Mehrheit a von Inbegriffen von Vorstellungen ist eine Mehrheit unabhängiger Inbegriffe, wenn es für jede Einteilung von a in zwei Klassen eine Vorstellung gibt, die mit jeder Klasse verträglich ist, aber auch eine Vorstellung, die mit einer beliebigen dieser beiden Klassen verträglich, mit der andern aber unverträglich ist.

Die Begriffe „Verträglichkeit, Umfassen usw. von Umfängen" werden ganz ähnlich definiert.

Das Feld einer n-gliedrigen Beziehung zerlegt sich in n-Teilfelder, nämlich in die Felder der ersten, zweiten usw. $n$ten Glieder.

Eine Beziehung (oder Beziehschaft) ist trennbar, wenn es eine Einteilung ihrer Beziehschaft in zwei gegenständliche Beziehschaften gibt, deren Felder unverträglich sind; andernfalls ist sie untrennbar oder zusammenhängend.

Eine zweigliedrige Beziehschaft heißt *vollständige Ordnung* erster Stufe, wenn sie a) gegenständlich, b) einseitig, c) durchgängig und d) fortleitend ist.

Eine zweigliedrige Beziehschaft a heißt *Ordnungssumme* erster Stufe, wenn es eine a umfassende vollständige Ordnung erster Stufe gibt. Gibt es eine einzige desselben Feldes, so ist a eine *Ordnung* erster Stufe, und jene umfassende Beziehschaft ist die zu a *gehörige* vollständige Ordnung erster Stufe. Sind x und y verschiedene Glieder der Ordnung a, so geht in a das x dem y voran (y folgt auf x) oder folgt auf y (y kommt vor x), je nachdem x/y oder y/x Paar der zugehörigen vollständigen Ordnung ist. Das Glied z liegt in a *zwischen* x und y, wenn x und y verschieden sind und entweder

$$x/z, \quad z/y$$

oder

$$y/z, \quad z/x$$

Paare der zugehörigen vollständigen Ordnung sind. Gibt es kein solches Zwischenglied für x und y und ist x/y Paar der zugehörigen vollständigen Ordnung, so ist x der vorangehende Nachbar von y, y der nachfolgende Nachbar zu x oder x das nächstvorangehende Glied zu y usw.

Liegt in einer Ordnung y zwischen x und z, z zwischen y und u, so liegt in dieser Ordnung z zwischen x und u.

Eine von der Ordnung erster Stufe a umfaßte Ordnung b, der jedes Glied von a angehört, das zwischen zwei Gliedern von b liegt, heißt ein Intervall von a.

Die verschiedenen Glieder x und y der Ordnung a liegen in a auf derselben Seite des Gliedes z, wenn z *nicht* zwischen x und y liegt. Eine *Seite des Gliedes* z ist das All der Glieder von a, die von z verschieden sind und auf derselben Seite von z liegen wie ein gewisses Glied x. Die eben definierte Vorstellung „Seite eines Gliedes einer Ordnung" kann je nach Umständen zwei, einen, keinen Gegenstand haben.

Die Ordnung a ist abgeleitet aus der Ordnung b, wenn die zu a gehörige vollständige Ordnung von der zu b gehörigen umfaßt wird. Ist dieses Umfassen einseitig, so ist a echt abgeleitet aus b.

Eine Ordnung a ist überfüllt oder genau, je nachdem eine oder keine echt abgeleitete Ordnung dieselbe zugehörige vollständige Ordnung hat wie a.

Der Inbegriff der Ordnungen (erster Stufe), welche dieselbe vollständige Ordnung haben wie eine gewisse Ordnung a, ist nach dem oben Erklärten ein Inbegriff „gleicher" Gegenstände. Sie heißen deshalb gleichwertige Ordnungen.

Ein Inbegriff von Ordnungen ist ein Inbegriff verträglicher Ordnungen, wenn je zwei derselben im Verhältnis der Ableitung stehen.[1])

Eine Beziehschaft a heißt *Wohlordnung*, wenn sie Ordnung erster Stufe ist, und wenn es für jede Mehrheit m aus Gliedern von a einen Gegenstand b von m gibt derart, daß von den beiden Sätzen:

b geht innerhalb a allen andern Elementen von m voran,

b folgt innerhalb a allen andern Elementen von m,

immer einer, aber dann immer derselbe, Wahrheit wird. Je nachdem dies der erste oder zweite ist, hat man eine vorschreitende oder rückschreitende Wohlordnung.

---

1) Allgemeiner: Zwei Ordnungen a und b sind verträglich, wenn sie je zwei gemeinsame Glieder (x und y) *gleichgepaart* (entweder als x/y oder als y/x) enthalten. Sie können dann ein einziges oder gar kein gemeinsames Glied haben.

Eine zweigliedrige Beziehschaft a ist *Kreisordnung*[1]) (erster Stufe), wenn sie nur innere Glieder hat, und wenn für ein beliebiges Glied b einer der beiden Sätze gilt:

werden aus a alle Paare weggelassen, in denen b als Vorderglied,
„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ Hinterglied

auftritt, so geht a in eine Ordnung erster Stufe über.

Eine zweigliedrige Beziehschaft ist *unverzweigt*, wenn sie Ordnung oder Kreisordnung erster Stufe ist; sie heißt *verzweigt*, wenn sie zusammenhängend, aber nicht unverzweigt ist.

Nach dem Sprachgebrauch scheint „intensive Größe" dasselbe zu sein wie „Glied einer Ordnung erster Stufe". Beispiele: Härteskala, Gefühle.

Ein Glied b einer Ordnung erster Stufe a heißt eine obere (untere) Schranke einer Menge m in bezug auf a, wenn m Teil des Feldes von a ist und kein Element von m in a nach (bez. vor) b kommt, oder wie man auch sagt, oberhalb (unterhalb) b liegt. b ist *höchste* untere (*niedrigste* obere) Schranke von m in a, wenn b untere (obere) Schranke von m in bezug auf a ist, während dies von keinem Gliede oberhalb (unterhalb) b gilt. b ist eine Häufungsstelle von m in a, wenn zwischen b und jedem Gliede vor ihm oder zwischen b und jedem folgende Gliede ein von b verschiedenes Element von m liegt. Je nachdem beides stattfindet oder nicht, ist die Häufungsstelle zweiseitig oder einseitig, und zwar eine rechte oder linke, je nachdem nur der erste oder nur der zweite Fall eintritt. b ist untere (obere) Häufungsstelle von m in a, wenn b, aber kein Glied vor (nach) b Häufungsstelle der Menge m ist. Dabei können sehr wohl Glieder von m dem b vorangehen (folgen), nur sind dies keine Häufungsstellen von m.

Eine Ordnung ohne Häufungsstellen heißt eine *Reihe*, und zwar eine geschlossene oder nicht geschlossene, je nachdem sie äußere Glieder beider Arten hat oder nicht. Eine nicht geschlossene Reihe mit einem äußeren Gliede ist eine vorschreitende oder rückschreitende, je nachdem ihre äußeren Glieder (deren es nur eins geben kann) Anfangsglieder oder Endglieder sind. Eine nicht geschlossene Reihe ohne Außenglieder ist eine offene oder zweiseitige Reihe.

Eine Kreisordnung erster Stufe, die von Ordnungen erster Stufe nur solche ohne Häufungsstellen umfaßt, heißt Ring erster Stufe.

Eine Ordnung erster Stufe a heißt

eine *Abgeschlossenheit*, wenn jede Teilmenge des Feldes von a, die in a eine obere Schranke, aber kein höchstes Glied hat, eine niedrigste obere Schranke in a besitzt;

---

1) Vahlens „zyklische Ordnung".

eine *innere Dichtheit* erster Stufe, wenn jedes Glied von a Häufungsstelle des Feldes von a ist;

eine *Vollkommenheit* erster Stufe, wenn sie Abgeschlossenheit und innere Dichtheit ist;

eine *Gedrängtheit* erster Stufe, wenn zwischen je zwei Gliedern wiederum ein Glied liegt;[1])

eine *Stetigkeit* erster Stufe, wenn sie Abgeschlossenheit, innere Dichtheit (also Vollkommenheit) und Gedrängtheit ist.

Das Feld einer „Vollkommenheit" ist das, was G. Cantor eine „perfekte Menge" nennt.

Ein Gebiet (Umfang, Menge, Klasse) a ist unendlich oder endlich, hat unendliche oder endliche Weite, je nachdem ihm die folgende Beschaffenheit zukommt oder mangelt:

es gibt eine Substitution, deren eines Halbfeld mit a einerlei, während das andere echter Teil von a ist.

Dabei heißt ein Inbegriff m echter Teil eines Inbegriffes n, wenn die Vorstellung „Element von m" untergeordnet ist der Vorstellung „Element von n".

Hieraus folgt, daß jene Substitution äußere Glieder hat, und daß ein leeres Gebiet (Umfang einer leeren Vorstellung) endlich ist. Denn ein solches hat keine Gegenstände, es gibt also auch keine Substitution, deren Feld sich aus ihm zusammensetzt.

Eine Beziehschaft heißt endlich oder unendlich, je nachdem ihr Feld endlich oder unendlich ist.

Eine Anzahlvorstellung (Vorstellung einer Anzahl, Kardinalzahl) ist eine Vorstellung, unter die alle und nur solche *Gebiete* fallen, die mit dem Umfange einer und derselben beliebigen Vorstellung gleiche Weite haben. Eine Ordnungszahlvorstellung (Vorstellung einer Ordnungszahl, Ordinalzahl) ist eine Vorstellung, unter die alle und nur solche *Wohlordnungen* fallen, die einer und derselben beliebigen vorschreitenden Wohlordnung ähnlich sind. Eine Zahlvorstellung ist eine Vorstellung einer endlichen oder unendlichen Zahl, je nachdem sich unter ihren Gegenständen (Gebieten oder Wohlordnungen) endliche oder unendliche Gebiete oder Wohlordnungen befinden. Es zeigt sich, daß Endlichkeit und Unendlichkeit nicht Beschaffenheiten derselben Zahl sein können, daß aber jede Zahl endlich oder unendlich ist.

In der Darstellung der Beziehungslehre wird man wohl zweckmäßig diejenigen Beschaffenheiten voranehmen, die nicht von der End-

---

1) Eine Menge m „trennt" das Feld $G(a)$ einer Ordnung a, wenn zwischen je zwei Elementen von $G(a)$ ein Element von m liegt (in bezug auf a).

lichkeit oder Unendlichkeit, oder die nur von der Endlichkeit der Beziehschaften abhängen (elementare Beziehungslehre).

Spricht man von Vorstellungen, Sätzen und Schlüssen, die unter dieser oder jener Form enthalten wären, so meint man mit „Form“ eine gewisse Verbindung von Worten und Zeichen überhaupt, durch welche eine gewisse Art von Vorstellungen, Sätzen oder Schlüssen dargestellt wird. So ist z. B., wenn der Buchstabe A irgendeine Vorstellung, der Buchstabe b irgendeine Beschaffenheitsvorstellung bedeutet, die allgemeine Form eines jeden Satzes der Ausdruck:

A hat b.

Auch ist die Rede: „wenn die Vorstellung A eingeordnet ist der Vorstellung B und diese eingeordnet der Vorstellung C, so wird auch A umfaßt von C,“ die Form eines jeden Subsumtionsschlusses. Man erlaubt sich aber hier wie in andern Fällen, wo sich Kürze und Deutlichkeit nicht widersprechen, von einem „Schlusse“, einem „Satze“, einer „Vorstellung“ zu reden, wo im eigentlichen Sinne eine „Schlußform, Satzform, Vorstellungsform“ vorhanden ist. Jede solche Form faßt einen ganzen Inbegriff logischer Gegenstände zusammen und erfüllt somit die Zwecke der Logik, die niemals einzelne Vorstellungen und Sätze (oder höchstens als Beispiele), sondern ganze Gattungen derselben auf einmal betrachtet. Dasselbe gilt übrigens auch von der Mathematik, und in diesem Sinne ist sie wie die Logik eine „formale“ Wissenschaft. Zwar sind die Lehren der Logik und Mathematik bestimmte Sätze, nicht aber die Gegenstände dieser Sätze. Von dem Gegenstande einer Wissenschaft muß man ihren Inhalt, d. h. ihre Lehren, unterscheiden.

Ein Inbegriff von Sätzen heißt ein Inbegriff von verträglichen Sätzen in bezug auf die Vorstellungen $a, b, c \ldots$, wenn jene Sätze sämtlich wahr werden, falls diese Vorstellungen durch passende Vorstellungen ersetzt werden. So sind z. B. die Sätze:

Zwei ist eine ungerade Zahl,
Zwei ist die Häfte von Sechs,

verträglich in bezug auf die Vorstellung *Zwei*, denn sie werden Wahrheiten, wenn man diese Vorstellung durch *Drei* ersetzt.

Ein Inbegriff von Sätzen ist ein Inbegriff verträglicher Sätze, wenn es einen Inbegriff von Vorstellungen gibt, in bezug auf den jene Sätze verträglich sind.

Ein Inbegriff b von Sätzen ist ableitbar aus einem Inbegriffe a von Sätzen in bezug auf die Vorstellungen $x, y, z \ldots$, wenn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der für $x, y, z \ldots$ gesetzt die Sätze von a wahr macht, auch (nach dieser Einsetzung) die Sätze von b wahr macht.

Die Sätze von a sind die Prämissen, Vordersätze, Voraussetzungen, die Sätze von b sind die Nachsätze oder Schlußsätze. So ist z. B. der Satz (jeder Satz von der Form) $a > 0$ eine Folge des Satzes $a > 1$, falls die Vorstellung a (z. B. *Drei*) als Veränderliche oder Ersetzbare genommen wird. Man gibt bei solchen Schlußfolgerungen meist nicht die Sätze, sondern nur die Satzformen[1]) an, in denen die Zeichen der „Ersetzbaren" durch Buchstaben vertreten sind. Diese Buchstaben bezeichnen dann keine Vorstellung, deuten auch keine an, sondern weisen nur auf den Umstand hin, daß an ihre Stelle beliebige Vorstellungszeichen eingesetzt werden sollen, und zwar an gleichbezeichnete Stellen immer dieselben. Weniger deutlich drückt man dies so aus: die Buchstaben „bedeuten" veränderliche Vorstellungen.

Unter den „veränderlichen Vorstellungen" befindet sich aber niemals der Bindeteil „hat", denn er ist allen Sätzen gemeinsam.

Ein Inbegriff b von Sätzen ist ableitbar aus einem Inbegriff a von Sätzen, wenn es einen Inbegriff von Vorstellungen gibt, in bezug auf den die Sätze b ableitbar sind aus den Sätzen a.

Eine Mehrheit a von Sätzen heißt eine Mehrheit verketteter, verschlungener oder unabhängiger Sätze in bezug auf die veränderlichen Vorstellungen $x, y, z \ldots$, wenn sich die Sätze von a in bezug auf $x, y, z \ldots$ vertragen, und wenn es für jeden Satz aus a einen Inbegriff von Vorstellungen gibt, die für $x, y, z \ldots$ gesetzt den herausgehobenen Satz falsch, die andern Sätze von a wahr machen. Z. B. sind die Sätze:

Drei ist eine Primzahl, Drei ist eine gerade Zahl,

unabhängig in bezug auf die veränderliche Vorstellung *Drei*. Sie werden der Reihe nach: falsch — wahr, wahr — falsch, wahr — wahr, wenn man bezüglich *Drei* durch *Vier*, *Drei*, *Zwei* ersetzt. Hiernach nehme ich meine Erklärung der Unabhängigkeit von Sätzen in der Note „über die Grundlagen der Geometrie" als dem Sprachgebrauch zuwiderlaufend zurück.

Eine Mehrheit von Sätzen ist eine Mehrheit unabhängiger Sätze, wenn es einen Inbegriff von Vorstellungen gibt, in bezug auf welche sie unabhängig sind. Unabhängigkeit oder Abhängigkeit kann nur zwischen mehreren Sätzen bestehen, es sind Verhältnisse *zwischen* Sätzen.

Von der Ableitbarkeit der Sätze unterscheidet Bolzano das Verhältnis der Abfolge, das nur zwischen Wahrheiten besteht, und vermöge dessen sich einige derselben zu andern wie *Gründe* zu *Folgen* verhalten. Nach seiner Meinung sind die beiden Wahrheiten, daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen zwei Rechte betragen, und daß

1) Die Bolzanosche „Satzform" ist der Fregesche „uneigentliche Satz".

ein jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegbar ist, der Grund von der Wahrheit, daß die Winkel eines (ebenen) Vierecks zusammen vier Rechten gleichkommen. Auch soll in der Wahrheit, daß es im Sommer wärmer ist als im Winter, der Grund von jener andern Wahrheit liegen, daß das Thermometer im Sommer höher steht als im Winter. Es ist dies wohl dasselbe, was Herr Frege auf Seite 426 des fünfzehnten Bandes dieser Zeitschrift „das Folgen von Gedanken" nennt. Doch bleibt es mir nach diesen Entwicklungen noch zweifelhaft, ob es Wahrheiten gibt, die in diesem Sinne auseinander *folgen*, ohne in dem oben erklärten Sinne (wenigstens durch Zwischensätze, also mittelbar) auseinander *ableitbar* zu sein.

Ein Inbegriff a von Sätzen ist gleichgeltend mit einem Inbegriff b von Sätzen, die Sätze von a sind gleichgeltend mit den Sätzen von b, und zwar in bezug auf die Vorstellungen $x, y, z \dots$, wenn jeder dieser Inbegriffe aus dem andern in bezug auf diese Vorstellungen ableitbar ist.

Ein Inbegriff b von Sätzen ist mittelbar ableitbar aus dem Inbegriffe a von Sätzen, wenn es eine geschlossene Reihe $a_1, a_2 \dots, a_n$ von Satzinbegriffen gibt, deren erster mit a, deren letzter mit b zusammenfällt, derart daß immer der eine Inbegriff aus dem vorangehenden Nachbar ableitbar ist, wobei die jedesmal veränderlichen Vorstellungen andere und andere werden dürfen.

Ist in bezug auf dieselben veränderlichen Vorstellungen der Inbegriff b von Sätzen ableitbar aus dem Inbegriffe a von Sätzen, aber nicht umgekehrt, so sind die Sätze von a die untergeordneten oder niedrigeren, die Sätze von b die übergeordneten oder höheren Sätze.

Der Inbegriff b von Sätzen ist in bezug auf die veränderlichen Vorstellungen $x, y, z \dots$ *ausgeschlossen* vom Inbegriff a von Sätzen, wenn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der $x, y, z \dots$ die Sätze a wahr macht, die Sätze b falsch macht. Die Sätze a sind die ausschließenden Sätze.

Ein Satz von der Form „der Satz A ist falsch" heißt die Verneinung des Satzes A.

Die Satzinbegriffe a und b schließen sich wechselseitig aus, wenn a von b und b von a ausgeschlossen ist, immer in bezug auf dieselben veränderlichen Vorstellungen. Dann sind in bezug auf diese die Verneinungen der Sätze a ableitbar aus den Sätzen b und die Verneinungen der Sätze b ableitbar aus den Sätzen a. Ist jede dieser Ableitbarkeiten wechselseitig, d. h. sind auch die Sätze b ableitbar aus den Verneinungen der Sätze a, und die Sätze a ableitbar aus den Verneinungen der Sätze b, in bezug auf die Vorstellungen $x, y, z, \dots$, so stehen die Sätze a und b

in dem Verhältnis des *Widerspruchs*, sie widersprechen einander, sind kontradiktorische Sätze; sind aber nicht beide Ableitbarkeiten wechselseitig, so hat man einen bloßen *Widerstreit*, die Sätze von a und b widerstreiten einander, sind *konträre* Sätze.

Man sieht aus diesen Erklärungen, daß aus einem Inbegriffe von Sätzen, die für jede Wahl der veränderlichen Vorstellungen $x, y, z \ldots$ falsch bleiben, jeder Inbegriff von Sätzen in bezug auf eben diese Vorstellungen ableitbar ist.

Ein Gegenstand, durch dessen Vorstellung wir eine andere in einem Bewußtsein mit ihr verknüpfte Vorstellung erneuern wollen, heißt ein Zeichen. Die objektive Vorstellung, deren entsprechende subjektive durch die Vorstellung des Zeichens angeregt werden soll, heißt die bezeichnete Vorstellung, auch die Bedeutung des Zeichens. Ist die bezeichnete Vorstellung eine Einzelvorstellung, so pflegt man ihren Gegenstand zuweilen selbst den bezeichneten oder die Bedeutung des Zeichens zu nennen. Gleichgeltend mit dem Worte: „Bedeutung“ gebrauchen wir zuweilen auch die Worte: Sinn und Verstand. Doch ließe sich hier schon ein Unterschied machen, so zwar, daß *Bedeutung* eines Zeichens nur diejenige Vorstellung hieße, zu deren Erweckung es bereits bestimmt ist, und die es auch zu erwecken pfleget; *Sinn* und *Verstand* aber diejenige, deren Erweckung wir in einem einzelnen Falle damit beabsichtigen. Ist die bezeichnete Sache etwas in unserem Inneren Befindliches, z. B. ein Gedanke, so pflegt man das Zeichen auch einen Ausdruck zu nennen.

Ein Zeichen wird in seiner eigentlichen Bedeutung gebraucht, wenn es zur Bezeichnung einer Vorstellung dient, für die es bestimmt ist; im Gegenteile wird es in einer uneigentlichen oder entlehnten Bedeutung verwendet.

Zeichen, die Zeichen von andern Zeichen sind (z. B. Schriftzüge, als Zeichen von gesprochenen Worten), nennen wir hinsichtlich der Vorstellungen, welche die letzteren bezeichnen, mittelbar. Zeichen, welche nicht mittelbar sind, heißen unmittelbar. Ein Zeichen, daß anfangs ein mittelbares war, kann durch den fortgesetzten Gebrauch zu einem unmittelbaren werden, so daß keine Vorstellung dazwischen zu treten braucht.

Ein Zeichen, bei dem wir nicht zu entscheiden vermögen, welche Vorstellung dasselbe bezeichnen solle, heißt ein für uns unbestimmtes Zeichen, und wenn es insbesondere zwei oder mehrere Bedeutungen gibt, deren Vorhandensein in unsern Augen eine gleiche Wahrscheinlichkeit hat, so heißt es ein schwankendes Zeichen. Je leichter und mit je größerer Sicherheit wir die Bedeutung eines Zeichens erkennen, um so mehr Deutlichkeit schreiben wir ihm zu.

Aus dem Zwecke einer wissenschaftlichen Darstellung folgt, daß die in ihr gebrauchten Zeichen nicht vieldeutig, sondern eindeutig, bestimmt und möglichst deutlich sein sollen.

Wir pflegen jedes beliebige etwas, von dem wir uns vorstellen, daß jemand sich desselben bedienen könnte, um durch Lenkung der Aufmerksamkeit eines denkenden Wesens ein Urteil M zu erzeugen, das es bisher entweder noch gar nicht oder doch nicht mit so hohem Grade der Zuversicht gefällt hatte, einen *Beweis* im weiteren Sinne (im zweiten Falle besonders eine Bestätigung) des Satzes M zu nennen. Ein *Beweis im engeren Sinne* ist die Angabe eines bestimmten Inbegriffes von Sätzen, um Urteile bestimmter Art in einem andern Bewußtsein hervorzubringen. Um solche Beweise handelt es sich in den Begriffswissenschaften.

Eine *Erklärung* (der Abwechslung oder der Vornehmheit halber manchmal *Definition* genannt) ist ein Satz, der bestimmt, ob eine gewisse Vorstellung oder ein Satz einfach oder zusammengesetzt sei; und im letzteren Falle, aus was für Teilen und in welcher Verbindung derselben er besteht. Zeigen wir an, daß wir durch ein gewisses Zeichen nur diejenige Vorstellung ausgedrückt wissen wollen, welche aus der Verbindung dieser und jener (durch andere, den Lesern bereits bekannte Zeichen angedeuteter) Vorstellungen entstehen, so geben wir eine *synthetische* Erklärung, wir *bilden* und *machen* eine Vorstellung. Die Richtigkeit einer solchen Erklärung bedarf keines Beweises, denn eine Vorstellung, welche aus den hier angegebenen Teilen nicht wirklich bestände, wäre eben darum nicht die Vorstellung, von der wir jetzt reden. Wird aber eine Vorstellung, die wir mit einem gewissen Zeichen verbunden sehen wollen, und von der wir jetzt überhaupt sprechen, nicht durch Angabe ihrer Bestandteile, sondern auf irgendeine andere Weise bestimmt, z. B. durch den Gebrauch, den wir von jenem Zeichen gemacht, oder durch die Äußerung, daß wir diejenige Vorstellung meinen, die der Sprachgebrauch mit diesen Worten wirklich verbindet und dgl., so geben wir eine *analytische* Definition, die Erklärung einer *gegebenen* oder *gewünschten* Vorstellung. Dann dürfen wir nie ermangeln, erst einen eigenen Beweis ihrer Richtigkeit zu liefern, denn wir dürfen dem Leser nicht zumuten, daß er die Erklärung mit Überzeugung annehme.

Die Definitionen der Mathematik sind meist synthetisch; die Erklärungen geläufiger Vorstellungen, wie: Baum, Leben, Pflanze, Tisch usw. können nur analytisch sein.

Das hier Gesagte gilt natürlich auch von den Erklärungen ganzer Redensarten.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 3./4. (DOPPEL-)HEFT. MÄRZ/APRIL.

MIT DEM BILDNIS VON ENNO JÜRGENS IM TEXT.

AUSGEGEBEN AM 28. APRIL 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Das nächste Heft wird Ende Mai ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Eine *Verständigung* oder Erläuterung ist ein Satz, der bestimmt, daß wir mit einem gewissen Worte oder Zeichen diese und jene Vorstellung verbunden sehen wollen. Erklärungen, welche bloße Verständigungen sind, brauchen zwar nicht bewiesen zu werden, aber sie können höchstens dann zur Herleitung einer neuen Wahrheit benutzt werden, wenn diese zu der Art derer gehört, die von Worten oder Zeichen handeln. Auf Erklärungen oder Verständigungen müssen wir uns oft berufen; aber nicht die aufgestellten Wahrheiten, sondern nur ihre sprachlichen Ausdrücke stützen sich auf jene Verständigungen und müssen nach ihnen beurteilt werden. Um ein Beispiel anzuführen: nur um den pythagoreischen Lehrsatz *kennen* zu lernen (den Sinn seiner Worte zu fassen), nicht aber um seine Wahrheit *einzusehen*, muß eine Erklärung der Worte: Summe, Quadrat usw. vorangehen. Dagegen wird die Wahrheit, daß a^3 ebensoviel bedeutet als aaa, allerdings aus der gegebenen Erklärung dieser Zeichen erwiesen.

Eine Wahrheit, aus der die sämtlichen Lehren einer Wissenschaft objektiv (wie Grund und Folge) abfolgen, nennt Bolzano einen obersten Grundsatz für diese Wissenschaft. Wahrheiten, aus denen ein beträchtlicher Teil ihrer Lehren objektiv oder subjektiv ableitbar ist, aus denen sie nämlich abfolgen, oder die uns zur Kenntnis jener Lehren verhelfen, sind ihm Grundsätze, Hauptsätze, Gemeinsätze oder Erkenntnisquellen desjenigen Teils unserer Wissenschaft, der sich aus ihm ableiten läßt. Grundsätze, die für sich selbst sehr einleuchten, pflegt man Axiome, oder wenn sie praktisch sind, Postulate zu nennen. „Ungültige, falsche Grundsätze oder Axiome" ist daher eine widerspruchsvolle (imaginäre) Vorstellung, was auch Herr Frege findet. Ein Grundsatz braucht aber nicht ohne weiteres einleuchtend, und ein einleuchtender Satz braucht kein Grundsatz einer Wissenschaft zu sein; *Grundsatz* und *einleuchtender Satz* sind verkettete, aber nicht Wechselbegriffe.

Nicht immer geht man auf diejenigen Wahrheiten zurück, die keinen weiteren Grund ihrer Wahrheit zulassen (auf die von Leibniz so genannten vérités primitives, die Grundwahrheiten), sonst würde man häufig auf Sätze geraten, die eine weit größere Allgemeinheit haben, als zur Herleitung aller in unsere Wissenschaft gehörigen Wahrheiten und nur dieser nötig ist. Diesen Vorwurf der zu großen Allgemeinheit macht Hertz der klassischen Mechanik in der Einleitung zu seiner Mechanik.

§ 2. Ich gehe nun daran, die Hilbertschen „Axiome der Geometrie" zu verdeutlichen, wobei ich einige derselben in mehrere Sätze auflösen muß.

Die Vorstellungen: „Anfangsglied von a, inneres Glied von a, Endglied von a" für eine zweigliedrige Beziehung a bezeichnen wir bezüg-

lich mit Π_a, Γ_a, E_a, und ein Inbegriff b von Gegenständen heißt uns ein Inbegriff unabhängiger Gegenstände in bezug auf Π_a oder Γ_a oder E_a, wenn es bezüglich keinen Gegenstand von Π_a, Γ_a oder E_a gibt, der mit jedem Gegenstande (Element) von b zusammenläge (in a).

„Ein Π_a (Γ_a, E_a) von x“ bedeutet: ein Element von Π_a (Γ_a, E_a), das mit x in a zusammenliegt.

„x ist ein gemeinsames Element der Gegenstände des Inbegriffes m“ heißt soviel wie: x liegt mit jedem Elemente von m in a zusammen. Letztere „haben“ dann x als gemeinsames Element. Jedes von zwei zusammenliegenden Elementen „gehört dem andern an.“

Wir betrachten gewisse Vorstellungen, bezeichnet mit Λ (Zusammenliegen), Z (Zwischenliegen), $K\Sigma$ (Kongruenz von Strecken), KW (Kongruenz von Winkeln), die, wie auch sonst beschaffen, jedenfalls die unter I bis V angegebenen Verhältnisse haben. Dadurch sind die folgenden Vorstellungen bestimmt: Π_Λ (Punkt), Γ_Λ (Gerade), E_Λ (Ebene), $\Sigma_\Lambda ab$ (Strecke ab), Σ_Λ (Strecke), $H\Gamma_\Lambda(b,c)$ = Halbgerade mit Anfangspunkt b und innerem Punkte c, $H\Gamma_\Lambda$ = Halbgerade, $HE_\Lambda(b,c)$ = Halbebene, mit begrenzender Geraden b und innerem Punkte c, HE_Λ = Halbebene, W = Winkel, $\sphericalangle ABC$ = Winkel ABC.

I.

1a. *Λ ist eine zweigliedrige Beziehung.* Die Vorstellung „Zusammenliegen“ bezieht sich bis auf weiteres auf diese Beziehung.

1b. *Beliebige zwei verschiedene (Gegenstände von) Π_Λ haben ein gemeinsames Γ_Λ.*

2. *Ist sowohl c als d ein gemeinsames Γ_Λ mehrerer Π_Λ, etwa von a und b, so ist c = d (d. h. die Einzelvorstellungen c und d haben denselben Gegenstand).*

   Das durch a und b bestimmte Γ_Λ heißt ab.

3a. *Jedes Γ_Λ ist mehreren Π_Λ gemeinsam.*

3b. *Zu jedem E_Λ gibt es mehrere (nach 1b mindestens drei) in bezug auf Γ_Λ unabhängige Π_Λ, die mit ihm zusammenliegen.*

4. *Je drei in bezug auf Γ_Λ unabhängige Π_Λ haben ein gemeinsames E_Λ.*

5. *Ist d sowohl als e ein E_Λ, gemeinsam dreien in bezug auf Γ_Λ unabhängigen Π_Λ, so ist d = e.*

6a. *Hat ein Γ_Λ* (etwa *a*) *mehrere Π_Λ mit einem E_Λ* (etwa *b*) *gemein, so hat a alle seine Π_Λ mit b gemein.*

6b. *Λ ist eine fortleitende Beziehung.*

7. *Zwei* (verschiedene) *E_Λ haben entweder keine oder mehrere Π_Λ gemeinsam.*

II.

1a. *Die Vorstellung Z umfaßt nur Beziehungen.*

1b. *Zu jedem* (Gegenstand von) Z *gehört ein* Γ_A, *dessen* Π_A *das Feld jenes Z bilden.*

1c. *Zu jedem* Γ_A *gehört ein Z, dessen Feld aus den* Π_A *jenes* Γ_A *besteht.*

1d. *Jedes Z ist eine Ordnung erster Stufe,*

2a. *eine Gedrängtheit,*

2b. *und offen, d. h. ohne Außenglieder.*

3a. *Haben zwei Z dasselbe Feld, so ist das eine die Umkehrung des andern.*

3b. *Eine Beziehschaft wird,* wenn überhaupt, *von Z immer gleichzeitig mit ihrer Umkehrung vorgestellt.*

„b liegt zwischen a und c" soll bedeuten: b liegt in einem gewissen Z (und dann infolge davon auch in dessen Umkehrung) zwischen a und c.

$\Sigma_A ab$ umfaßt alle und nur diejenigen Gegenstände x (von Π_A), die von zwei Elementen a und b von Π_A derart abhängen, daß x zwischen a und b liegt.

Σ_A ist der Inbegriff der Gegenstände, die in der Form Σab darstellbar sind.

4. *Sind* a, b, c *in bezug auf* Γ_A *unabhängige* Π_A, *ist* d *ein* Γ_A, *das mit keinem dieser* (drei) *Elemente zusammenliegt; liegen* a, b, c, d *mit einem* E_A *und* d *mit einem gewissen Gegenstande von* $\Sigma_A ab$ *zusammen, so liegt* d *auch entweder mit einem Element von* $\Sigma_A bc$ *oder mit einem Element von* $\Sigma_A ac$ *zusammen.*

$H\Gamma_A(b, c)$ umfaßt alle und nur diejenigen Gegenstände x (von Π_A), die von zwei Gegenständen b und c von Π_A derart abhängen, daß (in einem Z) x gleichzeitig mit c entweder dem b folgt oder ihm vorangeht. b ist die *Begrenzung*, das Element bc der *Träger* von $H\Gamma_A(b, c)$.

$H\Gamma_A$ ist der Inbegriff der Gegenstände, welche die Form $H\Gamma_A(b, c)$ haben.

$HE_A(b, c)$ umfaßt alle und nur diejenigen Elemente x von Π_A, für welche es ein b von Γ_A und ein dem b nicht angehörendes c von Π_A gibt derart, daß x einem (dem) b und c gemeinsamen E_A angehört und entweder c selbst ist oder so beschaffen ist, daß $\Sigma_A cx$ kein dem b angehörendes Element hat. b ist die *Begrenzung*, jenes dem b und und c gemeinsame E_A der Träger von $HE_A(b, c)$.

HE_A ist der Inbegriff der Gegenstände, die in der Form $HE_A(b, c)$ darstellbar sind.

III.

1a. *$K\Sigma$ ist eine zweigliedrige Beziehung, deren Glieder Paare verschiedener Gegenstände von Π_A sind.*

1b. *Ist sowohl a, b als c, d ein Paar verschiedener Π_A, so gibt es ein dem Element cd von Γ_A angehörendes Element e von Π_A derart, daß $(a \mid b) \mid (c \mid e)$ unter $K\Sigma$ fällt und e ein Element von $H\Gamma_A(c, d)$ ist.*

1c. *Genügen die Gegenstände e_1 und e_2 den in 1b für e angegebenen Bedingungen, so ist $e_1 = e_2$.*

1d. *Sind a und b verschiedene Π_A, so ist sowohl $(a \mid b) \mid (a \mid b)$, als auch*

1e. *$(a \mid b) \mid (b \mid a)$ ein $K\Sigma$.*

2. *Sind $a \mid b$ und $a \mid c$ Paare von $K\Sigma$, so gilt dasselbe von $b \mid c$.*

3. *Sind a, b, c, a', b', c' Gegenstände von Π_A[1]), haben $\Sigma_A ab$ und $\Sigma_A bc$ keinen Gegenstand (von Π_A) gemein, haben $\Sigma_A a'b'$ und $\Sigma_A b'c'$ keinen Gegenstand gemein, und fällt $(a \mid b) \mid (a' \mid b')$ sowie $(b \mid c) \mid (b' \mid c')$ unter $K\Sigma$, so gilt dies auch von $(a \mid c) \mid (a' \mid c')$.*

W ist eine zweigliedrige Beziehung, derart, daß, wenn $a \mid b$ unter W fällt, a und b Elemente von $H\Gamma_A$ mit derselben Begrenzung und verschiedenen Trägern sind und umgekehrt, wenn a und b derartige Gegenstände sind, $a \mid b$ Paar von W ist.

4a. *KW ist eine zweigliedrige Beziehung, deren Glieder Gegenstände von W sind.*

4b. *Ist $a \mid b$ ein W, so ist $(a \mid b) \mid (a \mid b)$ und $(a \mid b) \mid (b \mid a)$ ein KW.*

4c. *Ist $h \mid k$ ein W, haben die Träger von h und k den Gegenstand a von E_A gemein, liegt der Gegenstand a' von Γ_A mit dem Gegenstand a' von E_A zusammen, ist s ein HE_A mit dem Träger a' und der Begrenzung a', ist h' ein $H\Gamma_A$ mit dem Träger a' und der Begrenzung b, so gibt es einen Gegenstand k' von $H\Gamma_A$ mit der Begrenzung b derart, daß $h' \mid k'$ ein W ist, daß $(h \mid k) \mid (h' \mid k')$ unter KW fällt, und daß, falls x ein Gegenstand von h', y ein Gegenstand von k' ist, $\Sigma_A xy$ von s umfaßt wird.*

4d. *Genügen die Gegenstände k_1 und k_2 den für k in 4c angegebenen Bedingungen, so ist $k_1 = k_2$.*

5. *Sind $h, k, h' k', h'', k''$ Gegenstände von $H\Gamma_A$, ist sowohl $(h \mid k) \mid (h' \mid k')$ wie $(h \mid k) \mid (h'' \mid k'')$ ein KW, so fällt auch $(h' \mid k') \mid (h'' \mid k'')$ unter KW.*

Das Zeichen $\sphericalangle ABC$ hat eine Bedeutung, wenn A, B, C in bezug auf Γ_A unabhängige Π_A sind, und zwar ist dann $\sphericalangle ABC = H\Gamma_A(B, A) \mid H\Gamma_A(B, C)$.

$\sphericalangle ABC$ ist also dann ein W.

1) Die ersten drei sowohl als die letzten drei je für sich Gegenstände eines Γ_A.

6. *Sind A, B, C in bezug auf Γ_Δ unabhängige Π_Δ, sind A', B', C' ebensolche Gegenstände, ist sowohl $(A|B)|(A'|B')$ wie $(A|C)|(A'|C')$ ein $K\Sigma$, ist ferner $\sphericalangle BAC|\sphericalangle B'A'C'$ ein KW, so ist sowohl $\sphericalangle ABC|\sphericalangle A'B'C'$ als auch $\sphericalangle ACB|\sphericalangle A'C'B'$ ein KW.*

IV.

Ist a ein Γ_Δ, A ein mit a nicht zusammenliegendes Π_Δ, α ein gemeinsames E_Δ von a und A, b_1 und b_2 je ein gemeinsames Γ_Δ von A und α derart, daß weder a und b_1 noch a und b_2 ein gemeinsames Π_Δ haben, so ist $b_1 = b_2$.

V.

1. *Es sei A_1 ein Π_Δ von einem Element a von Γ_Δ, A und B seien Π_Δ derart, daß A_1 zwischen A und B liegt, ferner seien $A_2, A_3, A_4 \ldots$ dem a angehörige Π_Δ derart, daß A_1 zwischen A und A_2, A_2 zwischen A_1 und $A_3, \ldots A_m$ zwischen A_{m-1} und A_{m+1} liegt und überdies*

$$(A|A_1)|(A_1 A_2),\ (A_1|A_2)|(A_2|A_3),\ (A_2|A_3)|(A_3|A_4)\ldots$$

unter $K\Sigma$ fällt: dann gibt es in der Reihe

$$A,\ A_1,\ A_2\ldots$$

einen solchen Gegenstand (von Π_Δ) A_n, daß B zwischen A und A_n liegt.

2. *Die* (geometrischen) *Elemente, d. h. die Gegenstände von Π_Δ, Γ_Δ, E_Δ bilden ein System von Gegenständen, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher vorher angegebener Beschaffenheiten I bis V1 keiner Erweiterung fähig ist; das heißt, es ist nicht möglich, diesem System ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstandenen Systeme sämtliche aufgeführte Beschaffenheiten I bis V1 vorhanden sind.*

Nach dem in § 1 Gesagten könnte dies auch so ausgedrückt werden: der Inbegriff der Elemente von Π_Δ, Γ_Δ und E_Δ ist ein *höchster* Inbegriff in bezug auf die Beschaffenheiten I bis V1.

Niemand wird in diesen Sätzen I bis V1 eine Umformung der geläufigen euklidisch-geometrischen Grundsätze vermuten, auch dürfte die Ableitung der bekannten euklidischen Sätze hieraus schwieriger sein als aus der Hilbertschen Darstellung, aber darauf kommt es hier nicht an. Es wird ja verlangt, die *sämtlichen* logischen Bestandteile jener Grundsätze aufzuweisen, darunter muß natürlich die Kürze und Geläufigkeit leiden.

Benutzt Herr Hilbert vielleicht noch andere als die angegebenen Beschaffenheiten? Seine Behauptung S. 27 der zweiten Auflage der

„Grundlagen der Geometrie“: „in einem rechtwinkligen Dreieck ist offenbar die Kathete a durch die Hypotenuse c und den von a und c eingeschlossenen Basiswinkel α eindeutig bestimmt“ läßt dies vermuten. Es ist gefährlich, in Schlüssen aus mathematischen, nicht rein *logischen*, Vorstellungen das Wort „offenbar“ zu gebrauchen.

Was Herr Hilbert Axiome nennt, sind Sätze, welche Bestandteile von Erklärungen gewisser Vorstellungen sind. Für die Verträglichkeit, Ableitbarkeit, Unabhängigkeit usw. (in dem in § 1 erklärten Sinne) sind als veränderliche Vorstellungen die in den obigen Definitionen vorkommenden Vorstellungen einzelner Buchstaben a, b, A, B, x, y usw. zu nehmen. Diese Buchstaben sind in den obigen Ausdrücken durch Zeichen zu ersetzen, die nicht bloße Buchstaben bedeuten.

Die Hilbertschen Behauptungen über Unabhängigkeit usw. seiner „Axiome“ sind also sinnvoll und richtig, nur bedürfen sie einiger (durch die vorhergehenden Entwicklungen hoffentlich gelieferter) Aufklärung. Anstatt von „ungültigen Axiomen“ wird man z. B. von einem Inbegriffe von Sätzen reden, aus dem sich ein gewisser anderer Inbegriff von Sätzen hinsichtlich gegebener veränderlicher Vorstellungen *nicht* ableiten läßt.

Mit den obigen Erklärungen I bis V ist nicht gemeint, daß nur eine Vorstellung Λ, nur eine Vorstellung Π_Λ usw. die angegebenen Bedingungen erfüllen dürfte, sondern es soll nur ein Verhältnis, eine Beziehung von (vier) Vorstellungen definiert werden, also ein Inbegriff von *geordneten* Inbegriffen von Gegenständen. Der Definition genügen *irgendwelche* vier Vorstellungen, falls sie nur, in bestimmter Reihenfolge genommen, die für Λ, Z, $K\Sigma$ und KW angegebenen Eigenschaften und Verhältnisse haben. So kann es z. B. einen unter die Definition fallenden Inbegriff geben, in dem die an der Stelle von Λ stehende Vorstellung eine Beziehung von Zahlen ist.

Wie kommt Hilbert dazu, seine Definitionen „Axiome“ zu nennen? Wahrscheinlich hat ihm im Sinne gelegen, daß ἀξίωμα Forderung heißt, und daß er eine Vorstellung oder ein Verhältnis von Vorstellungen durch *Forderungen* (Bedingungen, Beschaffenheiten) in bezug auf die ihr unterstehenden Gegenstände bestimmte. Auf diese Vermutung führt mich seine Unterscheidung von genetischen und axiomatischen Definitionen.

§ 3. Hiermit ist gezeigt, daß der Hilbertsche Begriff des Axioms (als einer Definition) ein anderer ist als der von Bolzano, ein anderer auch als der von Euklid aufgestellte Begriff der κοινή ἔννοια. Man wird ihn aber fallen lassen, da er, wie Herr Frege zeigt, zu Widersprüchen führt. Es scheint sogar, als ob die Mathematik keine eigenen Axiome

im euklidischen Sinne habe und diese nur in der Logik oder in den Erfahrungswissenschaften ihre Stelle hätten. Was bisher in der Geometrie „Axiom“ genannt worden ist, läßt sich immer als Bestandteil einer, wenn auch umfangreichen Definition ansehen. Dies mag Herr Hilbert gefühlt haben, als er schrieb: die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff „zwischen“.

Daß die Erklärungen und Definitionen Hilberts von zweierlei Art seien, kann ich höchstens in bezug auf die Form zugeben. Nach dem in § 2 Gesagten sind sie mit Definitionen gleichgeltend. Aus diesen „Erklärungen“ und „Definitionen“ lassen sich alle bekannten Sätze der euklidischen Geometrie ableiten. Sollte daher die Fregesche Definition der Zahlenkongruenz (Bd. XII, S. 369) nach dem Muster der Hilbertschen „Axiome“ gebildet sein, so müßte sich aus ihr die Gaußsche Definition und daher jeder Satz über kongruente Zahlen folgern lassen. Das ist offenbar nicht der Fall, jene Fregeschen Kongruenzaxiome werden Wahrheiten, wenn man den Worten: „die ganze Zahl a ist der ganzen Zahl b nach m kongruent“ den Sinn „a ist gleich b“ oder den Sinn „$2a - 2b$ ist durch m teilbar“ gibt. Dieses Fregesche Beispiel beweist also nichts gegen die Hilbertschen „Axiome“. Aber selbst wenn sich alle Sätze über Zahlenkongruenz aus den Fregeschen Erklärungen ableiten ließen, so hätten wir durch sie doch immer noch keine Definition des Gaußschen Kongruenzbegriffes, sondern nur die Definition eines gleichgeltenden Begriffes. Denn jede Vorstellung hat höchstens *eine* Definition.

Definitionen von so verwickelten Verhältnissen, wie sie hier erforderlich sind, und in denen auf Gegenstände überhaupt Bezug genommen wird, sind den Mathematikern noch nicht geläufig. So mag es gekommen sein, daß Herr Hilbert statt einer Erklärung eine Beschreibung gibt. Da es sich aber um Dinge handelte, die unter Mathematikern selbstverständlich sind, nannte er die beschreibenden Sätze Axiome, ohne zu beachten, daß Axiome Wahrheiten sind, die also keine veränderliche (d. h. ersetzbare) Vorstellungen enthalten. Um aber die Unabhängigkeit (die Nichtableitbarkeit) der „Axiome“ zu beweisen, mußte er gerade gewisse Ausdrücke durch andere Zeichen ersetzen.

Wollte jemand den Satz „jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah“ für haarsträubenden Unsinn erklären, so werde ich ihn fragen, ob er zu seinem Urteile zuständig ist. Einem Geschäftsmann oder einem Straßenarbeiter werde ich natürlich diesen Satz nicht vorsagen. Will man überhaupt mit jenen Worten etwas mitteilen, so kann es nur dies sein: jedes A hat die Beziehung b zu wenigstens zwei E, oder noch

deutlicher: jeder Gegenstand der Vorstellung A hat die Beziehung b zu wenigstens zwei Gegenständen der Vorstellung E. Wem diese Antwort nicht genügt, der mag sich erst mehr Kenntnisse in der Logik erwerben. Dieser Satz wird wahr, wenn man für A, b, E bezüglich die Vorstellungen: *Gerade, Umfassen, Punkt* einsetzt. Wer für geläufige Ausdrücke neue Ausdrücke einführt, darf natürlich nicht erwarten, ohne weiteres verstanden zu werden. So wie der Ausdruck „jedes A hat (die Beziehung) b zu zwei E" liegt, ist er eine Satzform, ein Ausdruck von unendlich vielen Sätzen, die man erhält, wenn man für A, b, E passende Vorstellungen einsetzt. Meine frühere Ansicht, daß jener Satz eine dieser Vorstellungen definiere, gebe ich auf, meine aber nun, daß er Bestandteil der Definition eines *Verhältnisses* dreier Vorstellungen werden kann, z. B. wenn man sagt: es sei (A, b, E) ein geordneter Inbegriff einer Vorstellung A, einer Beziehung b und einer Vorstellung E derart, daß jedes A usw. Das Wort *Anej* hat hier ebensowenig wie der Buchstabe A eine Bedeutung, sondern bezeichnet in dem Ausdruck nur eine Stelle, die mit passenden Vorstellungszeichen ausgefüllt werden soll.

In der Analysis vertreten insbesondere die Buchstaben veränderliche Zahlvorstellungen.[1]) Herr Frege sagt dafür: die Buchstaben verleihen dem Inhalt Allgemeinheit.

Wer in einer formalen Theorie den Satz (oder auch nur die Figur)

$$b \prec (a \prec ab)$$

aufstellt, kann ihn nicht als Teil einer Definition oder eines Axioms innerhalb der projektiven Geometrie verwenden. Denn dann wäre auch

$$a(b+c) = ab + ac$$

ein Satz (oder eine Figur) jener Theorie, der aber zu einem falschen Satze führte, wenn man für a, b, c die Vorstellungen dreier verschiedener Punkte einsetzte (XII, S. 407). Hierdurch erledigen sich die Fregeschen Fragen: was ist da die Definition? (eine Definition, von der jener Satz ein Teil ist). Wo ist der gewünschte Begriff? (die Begriffe des Verbindens und Schneidens in der projektiven Geometrie). Welche Deutung haben wir? (Verbinden, Schneiden; projektive Grundgebilde). Mit welchen anerkannten Sätzen findet ein Widerspruch statt? (mit den Schnittpunktsätzen der projektiven Geometrie). Kann man ihn nicht durch eine andere Deutung vermeiden? (kann unentschieden

1) Beiläufig ergibt sich hier die von Russell gesuchte Definition eines „Systems unabhängiger Veränderlichen": ein Inbegriff von Zeichen, deren jedes eine beliebige Vorstellung einer gewissen Art darstellen kann.

gelassen werden). Liegt der Fehler in der Deutung oder in der Definition? (es liegt überhaupt kein Fehler vor). Ein gewünschter Begriff ist ein zu zerlegender *gegebener* Begriff und hat als solcher *bestimmte* Beschaffenheiten. Findet man daher, daß bei einer Ersetzung der Figuren einer formalen Theorie durch (Vorstellungs-) Zeichen, bei einer bestimmten „Deutung“ der Figuren, falsche Sätze über jenen Begriff herauskommen, so ist vermöge *dieser* „Deutung“ keine formale Theorie jenes Begriffes möglich. Ob bei einer andern? Vielleicht, das ist aber meist belanglos, da man es von Anfang an auf eine besondere Art der „Deutung“ der Figuren abgesehen hat.

Wenn ich von den „Axiomen“ sagte: sie dürfen unbekannte Zeichen enthalten, können einen Begriff definieren, geben Regeln für den Gebrauch der in ihnen vorkommenden Zeichen, deuten bestimmte Erfahrungstatsachen an, bezeichnen sie aber nicht, beschreiben die Art, wie sich Erfahrungsgegenstände verbinden lassen, so paßt das freilich nicht auf den hergebrachten und mit Recht fest zu haltenden Begriff „Axiom“, sondern auf Sätze, in deren Ausdruck (Satzform) allgemeine Zeichen vorkommen, Zeichen nämlich, die beliebige, oder doch beliebige Vorstellungen einer gewissen Art, darstellen können. Je mehr Sätze von dieser Art, also Sätze mit veränderlichen Vorstellungen in einer Wissenschaft vorkommen, desto formaler und allgemeiner ist sie. Dies lag in meinen Worten: „ein reiner Lehrbegriff muß seinen „Namen“ einen möglichst weiten Deutungsbereich offen halten.“ Daher scheint es mir nicht vorteilhaft, den Begriff des Satzes so einzuschränken, daß folgendes kein Satz wäre:

wenn A über B und B über C herrscht, so

herrscht A über C.

Man wird Sätze mit festen und Sätze mit veränderlichen Vorstellungen unterscheiden. Gibt man das nicht zu, so gibt es keinen „pythagoreischen Lehrsatz“ mehr.

Wie kann Herr Frege das *moderne* Streben der Mathematiker, ihre Wissenschaft auf sichere Grundlagen zu bauen, eine „gräßlich moderne Zeit“ nennen?

Liefern die Angaben von § 2 eine Definition von „Punkt“? Diese könnte nur sein

$$\text{Punkt} = \Pi_A.$$

Da es verschiedene Systeme von Vorstellungen gibt, die für A, Z usw. gesetzt die Sätze I bis V wahr machen (nämlich: die Vorstellungen der euklidischen Geometrie, ein System von Inbegriffen von je drei reellen Zahlen, oder endlich die Vorstellungen des parabolischen

Kugelgebüsches, angegeben von Wellstein im zweiten Band der „Enzyklopädie der Elementarmathematik“ § 8), so gäbe es *verschiedene* Klassen, deren jede *sämtliche* Punkte umfaßte. Das ist ein Widerspruch.

Dasselbe würde sich ergeben, wenn man jene Sätze I bis V als Definitionen von „Gerade“ oder „Ebene“ usw. auffaßte. Sie definieren vielmehr nur das *Verhältnis* gewisser Vorstellungen; die Begriffe *Punkt*, *Gerade*, *Ebene* usw. sind nur Beziehungsbegriffe. Das Fregesche Beispiel von der Taschenuhr oder der Zahl *Zwei* wirkt nicht überzeugend, man könnte darauf antworten: „zwar ist uns bis jetzt nicht bekannt, ob aus jenen Sätzen folgt, daß Herrn Freges Taschenuhr und *Zwei* keine Punkte seien, aber das wird vielleicht später einmal entschieden, ist auch belanglos, kein geometrischer Satz benutzt eine solche oder eine ähnliche Entscheidung.“

Der Begriff *Zwischen* enthält den einfachen Begriff der Ordnung. Daher kommt es, daß die Sätze der Geometrie die Lage dreier Punkte einer Geraden nur aus der *bekannten* Lage gewisser anderer Punkte (etwa der Ecken eines Dreiecks) ableiten. Wenn Sätze über Punkte auf einer Geraden, die die Kenntnis des Wortes „zwischen“ nicht voraussetzen, so bestimmen sie eben nicht die Lage dieser Punkte, und es ist ungehörig zu verlangen, ihre Lage anzugeben.

Wenn man statt der Wörter „Punkt, Gerade, Ebene“ usw. neue Wörter einsetzt, mit denen noch kein Sinn verbunden ist, so wird freilich mancher die so veränderten Hilbertschen Definitionen nicht verstehen, der Geübtere aber wird sich sagen: „es will mir jemand Sätze mitteilen. Sätze bestehen aus Vorstellungen. Diejenigen Worte in den mitgeteilten Sätzen, die keine Bedeutung haben, sind also Zeichen für veränderliche Vorstellungen, allerdings schwerfällige und daher unzweckmäßige. Sie werden besser durch die in der Mathematik als Zeichen veränderlicher Vorstellungen längst üblichen Buchstaben ersetzt.“

Nur wenn man verschiedene Geometrien miteinander vergleicht, ist es nötig zu sagen „Punkt der *A*-Geometrie, Parallelenaxiom der *B*-Geometrie“ usw., sonst genügen die Bezeichnungen „Punkt“ usw. schlechtweg.

Mit Herrn Frege stimme ich darin überein, daß die Worte eines Satzes im *engeren* Sinne eindeutig sein und bestimmte Vorstellungen bezeichnen müssen. Dagegen enthält ein Satz im *weiteren* Sinne veränderliche Vorstellungen und sein Ausdruck Figuren, die durch Zeichen beliebiger Vorstellungen einer gewissen Art ersetzbar sind.

Solche Beschaffenheiten eines Gegenstandes, deren Vorstellungen schon als Bestandteile in der Vorstellung vorkommen, unter die man ihn bezieht, nennt man ursprüngliche, alle andern abgeleitete Beschaffenheiten des Gegenstandes. Bei Hilbert ist also „Gegenständlichkeit“

eine *ursprüngliche* Beschaffenheit des Punktbegriffes, bei Anselm von Canterbury eine *abgeleitete* Beschaffenheit des Gottesbegriffes. Herr Frege dagegen will „Gegenständlichkeit" zu einer ursprünglichen Beschaffenheit des Gottesbegriffes machen. Der hieraus folgende „Beweis" der Existenz Gottes ist kein ontologischer mehr und das Papier nicht wert, worauf er geschrieben wird.

Gegenständlichkeit ist so gut eine Beschaffenheit einer Vorstellung wie jede andere, aber auch nur von Vorstellungen, nicht von Gegenständen überhaupt. Bei Hilbert dient ihre Einführung dazu, die Möglichkeit abzuschneiden, für „Punkt" leere Vorstellungen einzusetzen, etwa „grüne Tugend", oder wie ich mich früher ausdrückte, gewisse gegenstandslose Deutungen des Wortes „Punkt" auszuschließen. Dieselbe Rolle spielt die Forderung der Gegenständlichkeit in Huntingtons (und anderer) Definition der reellen und komplexen Zahl, des Feldes, der Abelschen Gruppe und der Gruppe überhaupt.[1])

Es bleibt also dabei: durch das Hilbertsche Existenzaxiom ist der ontologische Gottesbeweis nicht gerechtfertigt.

Die Entwicklungen Herrn Freges in Band XII, S. 373 können kürzer so gefaßt werden: jeder Satz hat die Form

$$A \text{ hat } b.$$

Ein Satz handelt von den Gegenständen seiner Unterlage (A). Diese Gegenstände von A sind entweder Vorstellungen oder nicht. Beispiele dafür sind:

(Die Vorstellung) *Primzahl* hat Gegenständlichkeit,
Zwei hat Primzahlbeschaffenheit.

Im ersten Falle ist die Unterlage eine Vorstellungsvorstellung (Vorstellung zweiter Stufe), im zweiten eine Vorstellung erster Stufe.

„Begriff" und „Gegenstand" sind wesentlich verschieden, sind verschiedene Begriffe, denn jeder Begriff ist zwar Gegenstand, ist etwas, aber nicht jeder Gegenstand ist Begriff.

Eine Regel jedes Spieles, auch des Schachspieles ist: suche den Gegner durch die Gesetze des Spiels zu besiegen! Danach drückt eine Stellung der Schachfiguren für den an der Reihe befindlichen Spieler den Gedanken aus: suche in der gestatteten Zeit einen Zug, der den Gegner dem Matt möglichst nahe bringt und mache ihn dann! Welche Züge dies sind, kann freilich gegenwärtig nur durch Probieren gefunden

1) *a set of postulates for real algebra . . .*, Trans. Am. Math. Soc. 6, § 1, 2, 5. Diese Definitionen werden einfacher und deutlicher, wenn man die hier in § 1 angegebenen Begriffe benutzt.

werden. Beispiele für solche Überlegungen finden sich in jedem Lehrbuche des Schachspiels. Das Bilguersche Handbuch des Schachspiels gibt für jede Eröffnung eine Menge Analysen. Hier eine solche durchzuführen, wäre Platzverschwendung.

Ich habe nicht gesagt (wie Herr F. will): ein Axiom *ist* eine Regel für den Gebrauch eines Zeichens, sondern (XII, 407): Die Gesetze einer formalen Theorie *ergeben* Regeln, denen etwa beabsichtigte Deutungen unterliegen und nicht beabsichtigte nicht unterliegen sollen. Geben doch auch die Gesetze der Physik und Chemie der Technik Regeln an die Hand.

Wenn ich von zwei Sätzen sprach, die „unter gewissen Umständen beide bestehen, unter andern nicht," so bedarf das allerdings der Erklärung. Es liegt darin die Andeutung, daß in diesen Sätzen gewisse Vorstellungen ersetzbar (veränderlich) sein sollen. Sie müssen freilich angegeben werden, denn Sätze, die in bezug auf gewisse veränderliche Vorstellungen gleichzeitig wahr sind, können in bezug auf andere sich anders verhalten.

Merkmale widerspruchslos zu nennen, ist eine uneigentliche Redeweise, im ursprünglichen Sinne sind nur Sätze widerspruchslos, z. B. die Sätze:

der Gegenstand A hat das Merkmal b,
der Gegenstand A hat das Merkmal c,

über die Merkmale b und c.

Die Fragen Herrn Freges, was ein logischer Schluß sei, und was der Logik eigentümlich ist, hat Bolzano in seiner Wissenschaftslehre (§ 14, 15, 155, 164) beantwortet. Ein Schluß ist ein Satz, welcher sagt, daß aus einem gewissen Inbegriffe von Sätzen ein anderer Inbegriff von Sätzen ableitbar ist (in dem in § 1 erklärten Sinne). Vorstellungen, die in allen oder mehreren Sonderwissenschaften vorkommen, gehören der Logik an. Die Sätze über Sätze einer Wissenschaft bilden die Logik dieser Wissenschaft.

Die Logik der Mathematik hat sich erst in neuester Zeit entwickelt und ist durch Hilberts und anderer Forschungen über „Verträglichkeit" usw. von „Axiomen" einen großen Schritt weiter gekommen.

Der Leser möge aus dem Vorangehenden entnehmen, daß ich in einigen Punkten Herrn Frege Recht gebe, in anderen meine Ansicht aufrecht erhalte.

Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen.

Von E. Study in Bonn.

Ich bin gewillt ein Bösewicht zu werden.
(Richard III. 1. Aufzug, 1. Szene.)

In dem zusammen mit Herrn G. Scheffers und in den Einzelheiten von diesem ausgearbeiteten Werke „Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen“ (Leipz. 1893) hat sich S. Lie (insbesondere auf Seite 665 und Seite 748) über die Tragweite geäußert, die er seiner Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen zuschrieb. Es heißt dort unter anderem, *diese Theorie führe stets zum gewünschten Ergebnis, eine endliche Zahl von Kriterien für die Äquivalenz zweier Mannigfaltigkeiten*[1]*) aufzustellen.*

Danach wäre also eines der großen Probleme der Geometrie, das bis dahin nur in einigen sehr speziellen Fällen hatte bezwungen werden können, soweit gelöst, als man Probleme so allgemeinen Charakters nur irgend zu lösen vermag.

Wir wissen nicht, ob in den vierzehn Jahren, die seit Erscheinen des genannten Werkes verflossen sind, die zitierte Behauptung und die

1) Gemeint sind analytische Mannigfaltigkeiten des (reellen und) komplexen Gebietes. Hat man eine endliche kontinuierliche Gruppe und im Raume dieser Gruppe zwei Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimensionenzahl, so heißen diese *äquivalent*, wenn es mindestens eine Transformation der Gruppe gibt, die die erste Mannigfaltigkeit in die zweite überführt. Die Tragweite des hieraus sich ergebenden Äquivalenzproblems erhellt daraus, daß äquivalente Mannigfaltigkeiten in der durch die Gruppe bestimmten Art von Geometrie auch äquivalente Eigenschaften haben, bei geeigneter Ausbildung der Terminologie mit ganz denselben Worten beschrieben werden können, während bei nicht-äquivalenten Mannigfaltigkeiten das niemals vollständig zutreffen kann. Geläufige Beispiele für diesen Äquivalenzbegriff und seine ökonomische Bedeutung bieten die Begriffe der Kongruenz, der kollinearen Beziehung, der eigentlichen Kreisverwandtschaft usw. In der Invariantentheorie der Kollineationsgruppe hat das zugehörige Äquivalenzproblem stets eine zentrale Stellung eingenommen. Allgemein bekannt ist die Methode der Elementarteiler. Die Äquivalenzprobleme der Differentialgeometrie, deren einfachstes wir hier zu besprechen haben werden, sind insofern von anderer Art, als man es bei ihnen mit sogenannten willkürlichen Funktionen zu tun hat. Was in solchen Fällen Lösung genannt wird, ist im Grunde nur eine systematische Vorbereitung der Lösung, die vollständig nur unter besonderen Voraussetzungen erfolgen kann.

zugehörigen ziemlich umfangreichen Erläuterungen (in Kap. 22 und Kap. 23) jemals einer Kritik unterworfen worden sind. Die Annahme, daß in dieser ganzen Zeit kein Sachverständiger dem Gegenstande genügende Aufmerksamkeit geschenkt habe, ist leider wohl nicht ohne weiteres von der Hand zu weisen, so betrübende Perspektiven sie auch eröffnet. Doch mag es aufgefallen sein, daß hier eine starke Übertreibung vorliegen muß. Aber vielleicht wird man dann gemeint haben, daß es nicht der Mühe wert sei, der Sache auf den Grund zu gehen, oder daß es eine undankbare Aufgabe sei, die öffentliche Aufmerksamkeit darauf hinlenken zu wollen. Wie oft ist nicht eine an sich schon unerquickliche Polemik in ein nutzloses Hin- und Wider- und Aneinander-vorbei-Reden ausgelaufen, wie manche hat nicht schon mehr zur Verwirrung der Meinungen beigetragen als zur Aufklärung; weshalb man wirklich nicht ohne ernste Befürchtungen an eine solche Aufgabe herantreten kann. Aber die auf eine selbst umfangreiche Kritik zu verwendende Zeit und Mühe können wir da nicht für schlecht angewendet halten, wo nicht ein kleines örtliches Leiden vorliegt, sondern alle Symptome auf ein weit verbreitetes und eingewurzeltes Übel hinweisen. Und eine sei es vornehme und bequeme, sei es ängstliche Zurückhaltung wird es nicht verhindern, daß Mißgriffe Folgen nach sich ziehen. Seichte Zufriedenheit, die allenthalben „erledigte Probleme" sehen will, und vor unbequemen Tatsachen die Augen zu schließen liebt, verführt ohnehin schon häufig genug dazu, daß auf unsoliden Fundamenten weitergebaut wird; wenn aber wissenschaftliche Mythenbildungen von Trägern berühmter Namen ausgehen, so haben sie auf ihrer Seite auch noch die Autoritätsgläubigkeit, den Heroenkultus. In diesem Falle ganz besonders scheint eine rücksichtslose Zerstörung der Illusionen die einzige angemessene Politik — über deren Wirkung man sich übrigens nicht allzu sanguinischen Hoffnungen hingeben darf. *Für dringend erwünscht halten wir vor allem, daß gewissen betrübenden Erscheinungen von allgemeinerer Verbreitung auf den Grund gegangen werde;* es hat wenig Sinn, perennierende Unkräuter ausraufen zu wollen und die im Boden schleichenden Wurzeln in Ruhe zu lassen.[1]) Und wenn man gewisse Autoren überhaupt erreichen will,

1) Wir können eine Wiederholung von sonst schon Vorgetragenem nicht vermeiden. Wir haben aber auch kaum Veranlassung dazu, ihr aus dem Wege zu gehen. Frühere Darlegungen verwandten Inhaltes scheinen wenig bekannt geworden zu sein, sicher aber sind sie von Denen gar nicht beachtet worden, an deren Adresse sie zunächst gerichtet waren. Nur eine lange Reihe von möglichst verschiedenartigen Beispielen wird *vielleicht* imstande sein, schließlich der Ansicht zum Siege zu verhelfen, daß mit gewissen Gewohnheiten aufgeräumt werden muß.

die als Verfasser von Lehrbüchern nicht ohne Einfluß sind, so muß man sich auch einer sehr deutlichen Sprache bedienen und besonders Sorge tragen, daß die Grenzlinie zwischen Richtig und Falsch überall klar zu erkennen sei; mit halben Andeutungen ist es nicht getan[1]). Übrigens aber wird es auch besser der Achtung entsprechen, die wir einem bedeutenden Geiste schulden, wenn nichts vertuscht und nichts beschönigt wird, wenn vielmehr die Dinge bei ihren richtigen Namen genannt werden; wenn man sich die Mühe nimmt, seinen Gedankengang zu analysieren; wenn man also zu ermitteln sucht, wie vieles von den erhobenen Ansprüchen allenfalls gerechtfertigt sein mag, und welches denn die Quelle des Irrtums oder der Irrtümer sein möge, die etwanige Urteilstäuschungen verursacht haben.[2]) Und wenn dann, wie es sein kann, das nach des Beurteilers Meinung Bleibende und Wertvolle stark in den Hintergrund tritt gegenüber dem, was er verneinen zu müssen glaubt, wenn also der Kritiker den wohlfeilen, weil Sachkenntnis nicht erfordernden Tadel wegen zu abfälliger Urteilsbildung fast mit Sicherheit wird über sich ergehen lassen müssen, in keinem Falle aber hoffen kann, es allen recht zu machen, so soll er sich gleichwohl nicht zurückhalten lassen, wenn er nur bei gewissenhafter Selbstprüfung Denen zu nützen glauben darf, denen die Sache am Herzen liegt. Denn „bekanntlich — sagt ein geistvoller Jurist — leisten Irrtümer der Wahrheit nicht selten die förderlichsten Dienste, indem sie Veranlassung geben entweder noch unbekannten Wahrheiten auf die Spur zu kommen, oder schon bekannte an ihrem Gegensatz recht klar zur Anschauung zu bringen, oder an ihnen einen vielleicht weit greifenden verborgenen Grundirrtum aufzudecken, welcher auch sonst, wenngleich in minder auffallenden Beispielen, doch nicht auf minder nachteilige Weise, das Urteil irre zu leiten pflegt. In der letzten Beziehung können Verirrungen besonders alsdann recht dankenswert sein, wenn der Grundirrtum, aus welchem sie stammen, in ihnen gewissermaßen sein Äußerstes erreicht hat, weil sich dieser alsdann jedem gesunden Sinn leicht von selbst, als das was er ist, zu erkennen gibt.“[3])

1) Es ist schwer, sich von der Oberflächlichkeit einiger Schriftsteller eine zutreffende Vorstellung zu machen. Kritik und Berichtigung genügen auch zusammengenommen noch nicht immer, um Verfehltes aus der Welt zu schaffen, und es ist schon dagewesen, daß der Kritiker eben für die von ihm bekämpfte Behauptung verantwortlich gemacht worden ist.

2) Einer solchen Untersuchung kann unter Umständen auch ein selbständiges Interesse zukommen, insofern sie einen Beitrag liefert zur pathologischen Psychologie gewisser Werturteile, deren vielfach dunkeln Entstehungsgründen nachzuspüren auch in einigen anderen Fällen lehrreich sein dürfte.

3) Anselm v. Feuerbach, Aktenmäßige Darstellung merkwürdiger Ver-

Zu einer Kritik dieser Art hat nun Lie selbst die Handhabe geboten, indem er, neben einigen mehr skizzenhaft gehaltenen Entwürfen, auf die wir nicht eingehen wollen, ein Beispiel für die Anwendung seiner Theorie ziemlich ausführlich bearbeitet hat, nämlich das Äquivalenzproblem der analytischen Raumkurven gegenüber (komplexen) Euklidischen Bewegungen.[1]) Die Frage, wann zwei analytische Kurven zueinander kongruent sind, ist ohnehin nicht zu umgehen, dabei auch nicht übermäßig verwickelt: Daher eignet sich dieses Problem trefflich zur Prüfung der Tragweite der allgemeinen Theorie. Es ist überdies auch von Lie selbst geradezu als ein *Muster* hingestellt worden *„wie man überhaupt Invariantentheorien gegebener Gruppen entwickeln sollte“*. Nebenbei enthalten die letzten Worte eine unverkennbare Spitze gegen die algebraische Invariantentheorie der Kollineationsgruppe. Hat doch diese Theorie in der Tat nur nach Überwindung großer Schwierigkeiten einiges von dem zu leisten vermocht, was Lies Theorie ganz allgemein und mit Leichtigkeit zu leisten scheint. Wir haben also noch einen Grund mehr, die Sache nicht länger auf sich beruhen zu lassen.

Bevor wir in unsere Erörterung eintreten, bemerken wir noch, daß wir uns nicht die Aufgabe stellen wollen oder auch nur stellen können, den vielleicht richtigen Gedanken nachzuspüren, die Lie etwa „vorgeschwebt“ haben mögen. Wir würden dann auf mehr oder minder haltlose Vermutungen angewiesen sein. Wir werden uns vielmehr an die einzige sichere Basis einer jeden Kritik halten, nämlich an den vorliegenden *Wortlaut*. Das genannte Werk erhebt ja auch als Lehrbuch, das sogar Anfängern zugänglich sein soll, den Anspruch, aus sich selbst heraus und ohne Interpretationskünste verstanden werden zu können. Wir haben allerdings vor Augen das Beispiel gemütvoller Rezensenten, die die schöne Kunst verstehen, zwischen den Zeilen zu lesen, und die über Mängel aller Art freundlich hinweggleiten. Es will uns aber dünken, daß solche gewiß sehr schätzenswerte Herzensgüte nicht auf Kosten des Publikums geübt werden sollte.

Wollen wir jedoch nicht zu einem unbilligen Urteil kommen, so dürfen wir uns gleichwohl nicht durch störende Einzelheiten den Blick für das Ganze trüben lassen. Die in „behaglicher“ Breite dahin-

---

brechen. Bd. II, Gießen 1829. S. 638. *Bloß zum Zwecke dieser Nutzanwendung* wird dann ein Rechtsfall erzählt, der „durch nichts merkwürdig ist als durch einen merkwürdigen Rechtsirrtum.“

1) Lie und Scheffers, a. a. O. Kap. 21. Eine gleichzeitige kürzere Mitteilung (Leipz. Ber. 1893, S. 370) ist von S. Lie allein gezeichnet.

fließende[1]) und dabei doch flotte Vortragsweise, bei der es auf etliche kleine Ungenauigkeiten mehr oder weniger nicht ankommt, gehört vor allem zu den „berechtigten“ Eigentümlichkeiten des Bearbeiters und wird ohne Zweifel von Herrn Scheffers selbst als solche in Anspruch genommen; auch für die Vorführung nicht ganz richtiger (und folglich *nicht* richtiger) Behauptungen gibt es ja zuweilen Gründe[2]). Jedenfalls wollen wir unterscheiden zwischen der Sache und der Form, in der sie uns zufälliger Weise entgegengebracht worden ist.

Als nebensächlich kann es wohl schon nicht mehr gelten, daß die stark betonte und zu anspruchsloseren Untersuchungen (die übrigens zum Teil von Lie selbst herrühren) in Gegensatz gestellte *Vollständigkeit* der Theorie keineswegs erreicht worden ist, daß die große Familie der in sogenannten Minimalebenen gelegenen krummen Linien gar nicht zum Vorschein kommt.[3]) Es fehlt damit sozusagen die Hälfte des gegenüber der Geometrie im reellen Gebiete eigentlich neuen Stoffs. Wiewohl der Begriff der Minimalebene Lie sehr geläufig war, scheint doch diese Lücke, aus der später noch eine Reihe mehr oder minder irrtümlicher Behauptungen hervorgegangen ist[4]), in Lies Theorie der Raumkurven sich mit einer gewissen Notwendigkeit eingestellt zu haben. Wenigstens trifft der Satz, daß bestimmte Familien von Kurven durch

1) Einige Ausführlichkeit war bei der pädagogischen Tendenz des besprochenen Werkes in der Tat wohl gerechtfertigt.

2) Nämlich Gründe „pädagogischer“ Natur. G. Scheffers, Leipz. Ber. 1899, S. 148. Vielleicht gibt es auch noch philosophische Gründe.

3) Minimalebene heißt jede eigentliche Ebene, die den absoluten Kegelschnitt berührt. Ihre Gleichung in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten ist

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

wo A, B, C der Gleichung $A^2 + B^2 + C^2 = 0$, aber nicht den Gleichungen $A = B = C$ genügen.

4) G. Scheffers, Theorie der Kurven (Leipz. 1901): Lehrsätze 13 (S. 185) 22, 23 (S. 207) 25, 26 (S. 219) 27 (S. 221). Man sieht an diesem Beispiel, wie nötig wir eine Kritik hätten, die diesen Namen verdient. Selbst Fehler, die in verbreiteten und vielgelesenen Lehrbüchern stehen, können lange Zeit unbeachtet bleiben. Will es das Glück, so fressen sie mittlerweile um sich gleich bösen Geschwüren. Besonders bedauerlich ist es, daß auch die mathematische Enzyklopädie von solchem Übel nicht verschont bleibt.

Die Minimalebenen selbst sind, als Lösungen gewisser Probleme, ebenfalls öfter nicht beachtet worden; so bei Darboux, Théorie des surfaces, I. p. 148—151, und bei Lie und Scheffers. Verunglückt ist auch der Lehrsatz 9 (S. 29) im Lehrbuch der Flächentheorie von Scheffers, worin die Kategorie der Subsumption auf unzulässige Art verwendet wird, und die Minimalebenen mit gewissen Zylindern verwechselt werden.

je zwei Differentialgleichungen sich erschöpfend sollen kennzeichnen lassen (S. 687) im genannten Falle nicht zu. Die Beweisgründe aber für diesen Lehrsatz, der in Lies Theorie eine zentrale Stellung einnimmt, bestehen in einer Art von *Konstantenabzählung*, wie Lie sie auch sonst verwendet hat. Wir würden diesem Verfahren auch bei richtigem Ergebnis (*unter anderem*) deshalb keine Überzeugungskraft zuschreiben können, weil dabei gewisse sogenannte überzählige Gleichungen als *überflüssig* hingestellt und einfach weggelassen werden. *Es wird so der sehr ins Gewicht fallende Unterschied zwischen analytischen Mannigfaltigkeiten und Systemen von solchen verwischt.*

Der Fehler ist derselbe, den ein Mathematiker begehen würde, der irgend eine Raumkurve als Schnitt von drei Flächen erhalten hat, oder vielmehr annimmt, daß er sie so erhalten hätte, und der nun aus den Dimensionenzahlen schließen wollte, daß schon zwei dieser Flächen zur Bestimmung der Kurve hinreichen werden.

Versuchen wir, dieses befremdliche, ja zunächst vielleicht kaum glaubliche Vorkommnis wenigstens einigermaßen zu verstehen!

Überall in Lies Schriften bemerken wir das Streben, mit der überlieferten allgemein bekannten Kunstsprache (und mit dem einem jeden geläufigen Apparat von x, y, z) auszukommen. Wiewohl wir gerade ihm eine Reihe sehr glücklich gewählter Termini technici verdanken, vermissen wir doch manchmal ein geeignetes Wort (und öfter noch dem Gedanken adäquate Formeln) auch da, wo der Stoff es gebieterisch zu verlangen schien. Er, der so originell in seinen Gedankengängen und so kühn in der Wahl seiner Probleme war, hat sich — gleichviel ob aus Überzeugung oder aus Indifferenz oder widerwillig — vor der öffentlichen Meinung gebeugt, die, mit einem durch Mißbrauch hervorgerufenen Anscheine von Recht, von terminologischen Neuerungen nun einmal nicht viel wissen will. Da aber die geläufigen Ausdrucksmittel unmöglich allen künftigen Bedürfnissen angepaßt sein konnten, *und da sie überdies an sich schon häufig der Präzision entbehrten*, so ist Lie, in einigen Gebieten fast regelmäßig, in die Lage gekommen, sich mit einer unvollkommenen Ausprägung seiner Gedanken begnügen zu müssen. Wie weit ihm selbst das zum Bewußtsein gekommen ist, wissen wir nicht zu sagen. Ob zum Beispiel Lie jemals Anstoß daran genommen hat, daß verschiedene Begriffe (wie Punkt und eigentlicher Punkt) durch ein einziges Wort („Punkt“) bezeichnet werden, darf man als zweifelhaft betrachten. In einigen Fällen aber mag er wohl den Mangel genügender Ausdrucksmittel schmerzlich empfunden haben. Die Wirkungen der einmal eingetretenen Gewöhnung konnte das jedoch nicht verhindern. Es fehlt demnach auch nicht an Wendungen, die nur als nach-

lässig bezeichnet werden können. Wenn Lie z. B. sagte, daß drei „unabhängige“ Gleichungen zwischen Ebenenkoordinaten „eine Ebene bestimmen,“ so kann er unmöglich darüber im unklaren gewesen sein, daß *kein* mathematischer Gedanke sich mit diesen Worten korrekt beschreiben läßt. Die Analogie mit dem Fall, den wir im Auge haben, ist unverkennbar: *Formell liegt beidemal derselbe Fehler vor*; ein Unterschied besteht jedoch darin, daß das Unrichtige einmal mit Bewußtsein vorgetragen wird, das andere Mal nicht. Wenn nun aber ein Autor Unzutreffendes etwa „der Kürze halber“, oder z. B. „aus pädagogischen Gründen“ oder aus welchen Gründen auch immer, jedenfalls aber *aus Gründen* behauptet, so kann man daraus schwerlich schließen, daß er das Richtige sich genügend klar gemacht, seinen, wie natürlich, zunächst formlosen Gedanken deutlich gebildet habe; und wenn man das annehmen will, so folgt weiter noch nicht, daß man jene Gründe anzuerkennen braucht. Mindestens wird in solchen Fällen, deren es viele gibt, *eine mangelhafte Einsicht in die Lebensbedingungen der mathematischen Wissenschaft* zu konstatieren sein. Der Aufgabe, uns eine deutliche Sprache zu bilden, da, wo wir sie nicht fertig vorfinden, können wir uns nur zum Schaden der Wissenschaft und zu unserem eigenen Schaden entziehen, da Logik nicht in der Luft schweben kann und dem ganzen Gebäude mangeln wird, wo sie den Grundlagen fehlt. Unsere Denkprozesse sind mit den Worten der Sprache (wozu, bei dem Mathematiker, auch die Kunstsprache der Formeln gehört), so eng verwachsen, daß folgerechtes Denken bei inkorrekten oder gar saloppen Redeformen nahezu ein Ding der Unmöglichkeit sein muß. Wer erst dort mit sorgfältiger Arbeit beginnen will, wo (nach seiner Meinung) die Schwierigkeiten anfangen, der tut es zu spät. Die Logik ist eine anspruchsvolle Dame, und sie versteht keinen Scherz. Begegnet man ihr nicht mit größter Aufmerksamkeit, so wendet sie sich ab und läßt schweigend es geschehen, daß die erst gleichsam nur im Spiel mißachtete Grenzlinie zwischen Richtig und Falsch endgültig überschritten wird. Ein launenhaftes Geschöpf aber ist bekanntlich die öffentliche Meinung. Wohl drückt sie zuweilen und auch lange Zeit hindurch gerne die Augen zu, nehmen aber, wie unvermeidlich, die „kleinen Ungenauigkeiten“ unerwünschte Dimensionen an, so gibt sie auch ihre Lieblinge preis. Daß man ihr mit der Aufdeckung solcher Mängel immer gerade einen Gefallen täte, soll hiermit nicht gesagt werden.

Nicht überall liegt der fatale Kausalnexus, der unter allen Fehlerquellen in der Mathematik vielleicht die hauptsächlichste ist, so offen zutage wie in unserem Beispiel. Ähnliche Vorkommnisse ziehen sich jedoch in ungeheurer Verbreitung durch die ganze Geometrie, deren

Vertreter in einer Zeit, wo die Analysis von den ihr anhaftenden Schlacken befreit wurde, eine Sonderexistenz geführt zu haben und mit Binden vor den Augen dahingewandelt zu sein scheinen; und auf die mannigfaltigste Art offenbart sich die in der Literatur aller Kulturvölker fast allgemeine Gleichgültigkeit gegen logisch-korrekten Ausdruck geometrischer Gedanken. Wir denken unter anderem an den Mißbrauch, der mit gewissen Worten (im allgemeinen, beliebig, immer, alle, jeder) getrieben zu werden pflegt; an die „stillschweigend eingeführten" (oder, wie es gar heißt, stillschweigenden) und also fehlenden Voraussetzungen; an die uferlosen Definitionen und chamäleontischen Begriffe, an die Widersprüche überhaupt, von denen die Literatur voll ist; sowie auch an jene zahlreichen Rezensionen, die wirken müssen wie Prämien auf die Veröffentlichung von möglichst vielen und unfertigen Arbeiten.[1])

Wir können auf dieses betrübende Thema, das der Verfasser leider schon früher zu behandeln Anlaß gehabt hat, nicht auch hier näher eingehen. Doch wollen wir noch darauf hinweisen, daß es eine Gefahr für die ganze Mathematik bedeutet, wenn auch nur eines ihrer Gebiete so verwildern darf. Ohnehin unterscheidet man bereits zwischen „richtigen" und „genau richtigen" Lehrsätzen sowie zwischen „mehr elementaren" und „mehr logischen" Beweisen, wobei die weniger logischen Beweise den Vorzug zu haben scheinen[2]); und die Ansicht, daß wissenschaftliche Behauptungen einen deutlichen Sinn haben müßten, wird „von maßgebender Seite" schon als veraltet betrachtet[3]). Auch wollen wir die Frage aufwerfen, ob man sich überhaupt noch verständigen kann, wenn an Stelle der objektiven Kriterien für Richtig und Falsch mehr oder minder konventionelle, wie auch immer historisch „begründete", so doch *subjektive* Urteile über das gesetzt werden, was noch als harmlose und was vielmehr als schädliche Ungenauigkeit zu gelten hat. *Videant consules!*

---

1) Das Gegenteil von alledem finden wir bei Gauß. Bedenken wir, wie schwer es ohnehin ist, Fehler ganz zu vermeiden, und ferner, daß gerade wer Bedeutendes zu sagen hat, durch sein Beispiel am ehesten Schaden anrichten wird, wenn er sich gehen lassen will, so fällt es uns schwer, Denen zuzustimmen, die gemeint haben, Gauß hätte bei der Vorbereitung seiner Veröffentlichungen minder kritisch zu Werke gehen und lieber mehr schreiben sollen. Es scheint uns, daß die Geschichte diesen Beurteilern nicht Recht gibt.

2) Vgl. Borel, Arithmétique, Paris 1903, z. B. S. 42.

3) In einem „Revision der Principien" überschriebenen Vorlesungshefte des Herrn F. Klein (Leipzig 1902) wird auf Seite 362 an einem Beispiele auseinandergesetzt, wie man aus Lehrsätzen der „Präcisionsmathematik" solche der „Approximationsmathematik" dadurch ableiten kann, daß man an passenden Stellen das (nicht weiter erklärte) Wort *ungefähr* einschaltet.

Wir kehren nun zu unserem Gegenstande zurück.

In der Theorie der krummen analytischen Linien[1]) sind drei Fälle zu unterscheiden, deren jeder eine besondere Behandlung verlangt. Es sind das die erwähnten *krummen Linien in Minimalebenen*, bei denen das Krümmungsmaß den bestimmten Wert Null hat, während der Torsionsbegriff illusorisch ist; die *krummen Minimallinien*, bei denen der Bogen nicht als Parameter benutzt werden kann, und bei denen die Krümmung illusorisch und die Torsion unendlich ist, und schließlich *die regulären Kurven*, wie wir sie nennen wollen, die die Gesamtheit aller übrigen krummen analytischen Linien ausmachen. Auf die letzte Familie allein beziehen sich die Frenetschen Formeln. Da nun Lie die Existenz der ersten Familie übersehen und und gewissermaßen sogar ihre Nichtexistenz zu beweisen versucht hat, so schließt er in seinen Voraussetzungen über den sogenannten allgemeinen Fall (den Fall der regulären Kurven) immer nur die Minimalkurven aus. Daher sind alle seine auf diesen allgemeinen Fall bezüglichen Äquivalenzkriterien nicht richtig, in dem Sinne, den man nun einmal mit diesem Wort verbinden muß.[2])

Aber auch wenn man die Voraussetzungen gehörig einschränkt, wenn man nämlich an Stelle des Begriffs der von Minimalkurven verschiedenen krummen Linien den Begriff der regulären Kurven setzt, liefert die Liesche Theorie noch nicht die gewünschten Äquivalenzkriterien; sie enthält noch mehrere andere Irrtümer.

Bemerken wir zunächst, daß man neben das Aquivalenzproblem in bezug auf die kontinuierliche Bewegungsgruppe eine analoge Aufgabe stellen kann, die sich auf die sogenannte gemischte Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen bezieht. Statt zu fragen, wann sind zwei Kurven *kongruent*, kann man (unter anderem) auch fragen, wann sind sie *kongruent oder symmetrisch* (oder, nach einer älteren Terminologie, symmetrisch gleich)? Beide Probleme sind natürlich scharf zu unter-

1) Der historisch entwickelte und in der Tat auch sachgemäß umgrenzte Begriff der analytischen *Kurve*, die (im komplexen Gebiet) ein zweidimensionales Gebilde ist, umfaßt den Begriff der geraden Linie. Alle anderen analytischen Kurven nennen wir krumme Linien, ohne sagen zu wollen, daß das konventionelle *Maß* ihrer Krümmung von Null verschieden sein müßte. Für die den reellen analytischen Kurvenzügen analogen eindimensionalen Gebilde des komplexen Gebietes braucht man dann natürlich ein neues Wort. Nach Segre heißen sie Fäden (fili). Diese Figuren, zu denen auch die reellen Kurvenzüge selbst gehören, kommen hier nicht in Betracht.

2) Aus dem Gesagten ergibt sich auch die berichtigte Fassung der vorhin kritisierten Sätze des Herrn Scheffers.

scheiden. Da nun die Umlegungen durch Zusammensetzung der Bewegungen mit der trivialen Transformation

$$x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z$$

entstehen, so ist klar, daß aus den Kriterien für die Kongruenz zweier Raumkurven die Kriterien für deren Symmetrie ohne weiteres abgelesen werden können, und daß also die Lösung des ersten Problems die des zweiten nach sich ziehen wird, während das erste Problem noch nicht gelöst ist, wenn man nur weiß, wann zwei Kurven kongruent *oder* symmetrisch sind. Es war daher durchaus sachgemäß, daß Lie sich auf die Formulierung des ersten Problems, also auf die Frage nach der Äquivalenz gegenüber Bewegungen beschränkt hat. Tatsächlich gründet er indessen seine Theorie ausschließlich auf Größen, die nicht nur bei Bewegungen ungeändert bleiben, sondern auch die eben genannte Transformation zulassen, also nicht nur *Bewegungsinvarianten*, sondern überdies auch *Umlegungsinvarianten* sind; wie das ein Blick auf seine Formeln zeigt.[1]) Daß man nun aus Umlegungsinvarianten allein nicht eine Theorie der Äquivalenz gegenüber Bewegungen ableiten kann, dürfte einleuchten.

So verläuft die Untersuchung der regulären Kurven von Anfang an in falscher Bahn, es wird Unmögliches unternommen.[2])

Aber hier erhebt sich nun ein Bedenken: In Lies Theorie kommt doch die Torsion (τ) einer Raumkurve vor, und diese ist nur Bewegungs-, nicht auch Umlegungsinvariante! Gewiß kommt sie vor, aber nur als Quadratwurzel $(\sqrt{\tau^2})$. *Die Torsion ist also bei Lie ungenügend definiert.* Wie die Krümmung wirklich nur eine zweiwertige Umlegungsinvariante ist, so ist es in Lies Theorie (die eben die Unterscheidung von Bewegungs- und Umlegungsinvarianten ignoriert) auch die Torsion.[3])

1) Lie und Scheffers, S. 676, Nr. (7).

2) Im Falle der in Minimalebenen gelegenen Kurven läßt sich auch die Äquivalenz gegenüber der Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen nicht durch die von Lie aufgestellten Invarianten ausdrücken.

3) Lie und Scheffers, S. 678, 679.

Bei Scheffers dagegen (Lehrbuch der Kurventheorie, S. 205) ist die Definition der Torsion äußerlich in Ordnung. Gleichwohl liegt auch seiner Darstellung die irrige Meinung zugrunde, daß „wesentliche" Differentialinvarianten, wenn sie sich nur irgendwie durcheinander „ausdrücken" lassen, einander vertreten können. Vgl. den weiteren Text.

In der Einleitung haben wir angedeutet, daß es dem Kritiker auch bei aller Vorsicht nur schwer möglich ist, nicht mißverstanden zu werden. Wie wahr das ist, davon haben wir nns seit der Niederschrift jener Bemerkung aufs neue überzeugen müssen. Wir fügen daher nachträglich noch folgendes hinzu: Wir denken

Hiermit kommen wir nun zu einem dritten Einwand gegen Lies Theorie der Raumkurven und gegen seine Methodik überhaupt. Hat man nämlich das Recht, die bezeichnete Größe $\sqrt{\tau^2}$ trotz ihrer Mehrdeutigkeit so zu behandeln, als wenn sie völlig bestimmt wäre, und also zu sagen, daß „die“ Torsion bei kongruenten Raumkurven an entsprechenden Stellen „genau denselben Wert“ haben muß ($\tau = \tau_1$), so darf man ebenso auch mit der Krümmung $\left(\frac{1}{r}\right)$ verfahren. Und wirklich ist Lie so zu Werke gegangen, statt der Gleichung $r^2 = r_1^2$ hat er die Gleichung $r = r_1$ angesetzt. Damit mußte er zu unrichtigen, nämlich zu bloß hinreichenden, nicht auch notwendigen Kriterien für die Äquivalenz komplexer Raumkurven kommen.[1])

Nach diesen Kriterien, bei deren Abfassung außerdem auch die Zweiwertigkeit des Bogenelementes unbeachtet geblieben ist (!), könnten beispielsweise Kurven mit den natürlichen Gleichungen

$$r = \frac{1}{s} - 1,\ \tau = 0; \quad r = -\frac{1}{s} - 1,\ \tau = 0;$$

$$r = -\frac{1}{s} + 1,\ \tau = 0; \quad r = \frac{1}{s} + 1,\ \tau = 0;$$

nicht zueinander kongruent sein (während das Gegenteil zutrifft). Denn in diesem Falle wird die Gleichung $\frac{dr}{ds} = f(r)$ durch vier verschiedene analytische Funktionen $f(r)$ erfüllt, während es angeblich dieselbe — es heißt sogar „genau“ dieselbe — Funktion sein soll. Es hätten offenbar etwa Gleichungen der Form

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \Phi(r^2), \quad \tau = \Psi(r^2)$$

gebildet werden müssen. Es handelt sich auch hier *nicht* um ein einfaches Versehen; nach Lie ist es eben gleichgültig, ob man in solchen Formeln r^2 und $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$ oder r und $\frac{dr}{ds}$ oder irgendwelche anderen „unabhängigen“ Funktionen dieser Größen benutzt[2]). Um nutzlose Er-

---

gar nicht daran, behaupten zu wollen, daß Lie das Wesen des Torsionsbegriffs, oder zum Beispiel auch der Unterschied von Kongruenz und Symmetrie unbekannt gewesen sei. Wir haben es ausschließlich mit der Frage zu tun, ob diese Begriffe in dem besprochenen Werke in sachgemäßer Weise verwertet worden sind oder nicht. Nicht benutzte Privatkenntnisse des Autors gehen den Kritiker nichts an.

1) Siehe z. B. Lie und Scheffers, S. 684 und Scheffers, S. 209.

2) Im reellen Gebiete pflegt man dem Krümmungsradius die Bedingung $r > 0$ aufzuerlegen, ohne damit übrigens viel anderes zu erreichen, als daß man bei analytischen Kurvenzügen auf den analytischen Charakter der Funktion $r(s)$ Verzicht leistet. Dieser Gebrauch, der natürlich den Schluß von $r^2 = r_1^2$ auf $r = r_1$

örterungen wenigstens nach Möglichkeit einzuschränken, erwähnen wir noch, daß wir es auch nicht für zulässig halten können, Lies Kriterien etwa durch „sinngemäße“ Interpretation, durch eine nachträgliche Erklärung „retten“ zu wollen, wonach das Wort Funktion in diesem Falle einen Inbegriff mehrerer Funktionen bezeichnen sollte. Die Definition des Begriffs analytische Funktion läßt es nicht zu, $\sqrt{x^2}$, das System der beiden Funktionen x und $-x$, als analytische Funktion von x zu bezeichnen, und eine Änderung jener Definition dürfte nicht ohne triftige Gründe vorgeschlagen werden. Außerdem würde auf solche Art der Schlußfehler bloß verschleiert, der eben in der Benutzung des für den vorliegenden Zweck zu vagen Begriffs der analytischen Abhängigkeit liegt.

In dem noch übrigen Falle der krummen Minimallinien haben die irrtümlichen Anschauungen, die natürlich auch hier zugrunde liegen, das Ergebnis in viel geringerem Maße beeinflußt. Die hier benutzten Differentialinvarianten sind charakteristisch für die Bewegungsgruppe, nicht bloße Umlegungsinvarianten; was die Verfasser freilich sich und ihren Lesern nicht zum Bewußtsein gebracht haben. Abgesehen hiervon bleibt auszustellen, daß in dem Ergebnis der etwas umständlichen Rechnungen (Theorem 41, S. 704) unnötiger Weise eine gewisse Quadratwurzel erscheint und eine Rolle spielt, die nach dem soeben über verwandte Wurzelgrößen Gesagten nicht als unbedenklich gelten kann. Man erhält einen einwandsfrei abgefaßten Lehrsatz, wenn man statt der von Lie mit J_6 bezeichneten irrationalen Invariante deren Quadrat setzt.

Immerhin ergibt sich, wenn wir jetzt zusammenfassen, ein nicht sehr erfreuliches Gesamtbild. Der Fundamentalsatz über gewisse Differentialgleichungen ist teils unzutreffend, teils nicht richtig begründet. Eine große Familie krummer Linien ist demzufolge ganz übersehen worden, bei einer zweiten sind alle Kriterien inkorrekt — auch schon im reellen Gebiet — und auch die Behandlung der dritten Familie ist nicht einwandsfrei ausgefallen. Diese unbefriedigenden Resultate aber haben ihre Quelle in nicht unbedeutenden Mängeln der angewandten Methodik. An entscheidender Stelle erscheint die ominöse Methode des Konstantenzählens, wohl zu unterscheidende Grundbegriffe (analytische Mannigfaltigkeit und System von solchen, Bewegungsinvariante und Umlegungsinvariante) werden miteinander verwechselt, und mit mehrwertigen Größen wird durchweg auf unzulässige Art umgegangen. Dazu kommen noch formale Mängel, die wir nicht besprochen

rechtfertigt, hat den besprochenen Irrtum offenbar nicht veranlaßt, wohl aber mag er dazu beigetragen haben, daß der einmal begangene Fehler unbemerkt bleiben konnte.

haben, deren einige aber die Geduld des Lesers auf eine ziemlich harte Probe stellen.

Ein Teil des Gesagten genügt, die angebliche Mustergültigkeit dieses Beispiels als hinfällig zu erweisen. Somit wird man sich kaum der Folgerung entziehen können, daß eine Neubearbeitung der Äquivalenztheorie der Raumkurven nötig sein wird.

Ein verehrter Freund des Verfassers meint nun, der Kritiker habe in solchem Falle die Pflicht, die neue Darstellung selbst zu liefern. Wir haben von vornherein diese Absicht gehabt; denn

„Das ist klarste Kritik von der Welt,
Wenn neben Das, was ihm mißfällt,
Einer was Eigenes Besseres stellt".

Es scheint uns aber doch nützlich, bei dieser Gelegenheit auszusprechen, daß unseres Erachtens eine *Verpflichtung* der Art Niemandem aufgebürdet werden kann. Es gibt keine undankbarere Aufgabe, als die Konzepte Anderer ins Reine zu schreiben. Auch würde die Forderung, daß nur „positive" Kritik geübt werden soll, alle Kritik gerade dort abschneiden, wo sie am meisten not tut: Wo nämlich eine Lösung zu schwieriger Probleme bloß vorgetäuscht wird, wie vielfach in der abzählenden Geometrie, und, in früherer Zeit, im Falle des Dirichletschen Prinzips. Weierstraß' Kritik dieses Prinzips war nicht „positiver" Natur, ohne daß man sie doch als unfruchtbar brandmarken dürfte. Wer aber will immer ein Urteil darüber haben, ob positive Kritik möglich ist?

Vorläufig wollen wir, unter Übergehung von Lies eigener Erörterung des allgemeinen Äquivalenzproblems, in Kürze festzustellen versuchen, was seine Invariantentheorie, soweit sie entwickelt vorliegt, bei korrekter Handhabung für eine Aufgabe der besprochenen Art zu leisten vermag, und wir wollen, so gut wir es können, den „Grundirrtum" aufdecken, aus dem alle die besprochenen Mängel entstanden sind und wohl auch entstehen mußten.

Hier dürfte nun zunächst daran zu erinnern sein, daß Lie in seiner allgemeinen Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen die Eigenschaften entwickeln wollte, die allen diesen gemeinsam sind. Das aber konnte der Natur der Sache nach durchaus nur dann erzielt werden, wenn gleichzeitig darauf Verzicht geleistet wurde, den ganzen jedesmal in Betracht kommenden Raum zu umfassen, und in der Regel auch darauf, die Gesamtheit der Transformationen einer Gruppe mitzunehmen. *In dieser Beschränkung scheint uns eine sehr wertvolle Leistung im Begriffe der Gruppenerweiterung zu liegen, der gerade durch seinen elementaren Charakter wesentlich beigetragen hat zur Klärung des zuvor nur in Beispielen und ziemlich unsicher aufgetretenen wichtigen Begriffs Differential-*

invariante. Es handelt sich hier um einen Grundbegriff, der kaum eine geringere Bedeutung hat als etwa der Begriff Riemannsche Fläche. Für eine Umgebung einer Stelle im Raume der einzelnen erweiterten Gruppe und eine Umgebung der identischen Transformation ließ sich eine gewisse Vollständigkeit erreichen, indem die Bestimmung der invarianten Funktionen der Gruppe sowie der zugehörigen invarianten Gleichungssysteme zurückgeführt wurde auf die Integrationstheorie vollständiger Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Lösungen dieser Gleichungen, eben die „Invarianten" der erweiterten Gruppen, die gesuchten Differentialinvarianten, konnten dann, theoretisch, allgemein durch Potenzreihen dargestellt werden.

Sehen wir davon ab, daß manchmal die Voraussetzungen sich hätten präziser fassen lassen, besonders in den für Anfänger bearbeiteten Vorlesungen, *so glauben wir die Meinung vertreten zu können, daß die besprochene Theorie im ganzen das leistet, was sie leisten soll, und was man billiger Weise verlangen kann.* Auch wollen wir hervorheben, daß, wo immer eine vollständige Invariantentheorie einer speziellen Gruppe entwickelt werden wird, Lies Invarianten einen wesentlichen Bestandteil von ihr ausmachen werden.

Eine ganz andere Frage aber ist es nun, ob der Weg gangbar ist, auf den Lies allgemeine Theorie notwendig verweist, ob es im konkreten Falle durchführbar sein wird, mit einer Invariantentheorie „im kleinen" zu beginnen, und diese dann zu einer Invariantentheorie „im großen" zu erweitern. Auch schon unter sehr einfachen Verhältnissen scheint uns von der Zerlegung der Umgebung einer bestimmten Stelle (und der mit dieser äquivalenten Stellen) in „kleinste" invariante Mannigfaltigkeiten bis zur Herstellung einer „endlichen Zahl von Äquivalenzkriterien" für den ganzen Raum und die ganze Gruppe ein so weiter Weg zu liegen, daß hier, wenn irgendwo, das Wort am Platze sein dürfte:

Tra dire e fare c'è di mezzo il mare.

Denn es wird nun nichts Geringeres verlangt werden müssen, als daß alle jene Umgebungen bestimmter Stellen aneinander gesetzt werden, bis schließlich der ganze Raum ausgefüllt ist; daß die Singularitäten der einzelnen Invarianten, deren Auftreten in weiterer Entfernung man natürlich nicht hindern kann, erörtert werden, und daß insbesondere darüber entschieden werde, ob und wie die verschiedenen invarianten Gebiete, die man von einer oder von mehreren Stellen ausgehend gefunden hat, um solche Singularitäten herum miteinander analytisch zusammenhängen. Was Folge einer notwendigen Beschränkung war, wird nun der Anwendung der Theorie verderblich. *Eben um ihrer Allge-*

meinheit willen ist diese Theorie, am konkreten Falle gemessen, schon in der Anlage zu speziell. Denn eine „allgemeine“ Theorie, die nur mit „unabhängigen“ durch Potenzreihen dargestellten Invarianten arbeitet, und für die irgend ein System „unabhängiger Funktionen“ dieser sogenannten wesentlichen Invarianten dasselbe leistet wie die Invarianten selbst, wie es ja in der Tat auch aus Invarianten besteht, eine solche Theorie kann unmöglich ohne weiteres der Tatsache gerecht werden, daß bei dem Äquivalenzproblem im großen zwischen ein- und mehrwertigen Invarianten ein prinzipieller Unterschied vorhanden ist, und daß die verschiedenen Zweige mehrwertiger Invarianten *gleichberechtigte* Elemente sind: Durch die Potenzentwickelung ist schon ein Zweig vor den übrigen ausgezeichnet, ja es ist nur dieser eine Zweig offiziell bekannt, *und es kann im konkreten Falle sogar fraglich bleiben, ob es noch andere Zweige gibt.*

Wo man aber die Verzweigung vollkommen übersieht, da hat man doch bei Figuren, über deren Äquivalenz noch zu entscheiden ist, kein Mittel zur Verfügung, die Bezeichnung der einzelnen Zweige so zu wählen, daß aus der Gleichsetzung einzelner Werte von Invarianten *notwendige* Bedingungen der Äquivalenz erhalten werden könnten: an Stelle der invarianten Werte müssen *Wertsysteme* treten, so lange das Äquivalenzproblem noch nicht gelöst ist, erst nachher wird eine bestimmte Zuordnung der einzelnen Werte möglich.[1])

Natürlich wird man in den — sehr speziellen — Fällen der letzten Art besser tun, die mehrwertigen Invarianten womöglich gar nicht erst in die Formulierung der einzelnen Lehrsätze einzuführen: in der Theorie der Raumkurven würde an Stelle der Krümmung deren Quadrat genügt haben.

Hiermit steht ein anderer Mangel im Zusammenhang, der vorhin ebenfalls schon hervorgetreten ist. Der in einem engen Bereiche ar-

---

1) Es seien z. B. r und r' die beiden durch die Gleichung $r + r' = 0$ verbundenen Werte des Krümmungsradius einer geeigneten Raumkurve an bestimmter Stelle; r_1 und r_1' seien die entsprechenden Größen, gebildet für eine zweite Kurve. Dann kann man, wenn eine Zuordnung beider Kurven durch eine Bewegung bekannt ist, die Zeichen r_1 und r_1' so wählen, daß $r_1 = r$, $r_1' = r'$ wird. Wo aber eine solche Zuordnung nicht bekannt, vielleicht auch gar nicht vorhanden ist, da bleibt die Wahl der Zeichen dem Zufall überlassen, und es kann dann nachträglich ebenso gut $r_1 = r'$, $r_1' = r$ gefunden werden. Daher hat es keinen Sinn, zu sagen „der“ Krümmungsradius „müsse“ an entsprechenden Stellen „genau denselben Wert“ haben; Gleichheit gleichbezeichneter Werte tritt vielmehr *nur auf Grund einer besonderen Festsetzung* ein, die erst nach Lösung des Äquivalenzproblems möglich wird. Ein auch sonst häufiger Fehler: es wird zwischen Definition und Folgerung nicht genügend unterschieden.

beitenden Theorie sind alle Systeme von invarianten Funktionen gleich lieb, die sich gegenseitig durcheinander *irgendwie* analytisch „ausdrücken“ lassen. Lies *Theorie kennt daher, jedenfalls in der bis jetzt vorliegenden Form, kein Mittel, bei der Anwendung auf die Äquivalenz im großen die Invarianten kontinuierlicher Gruppen von solchen gemischter, den kontinuierlichen übergeordneter Gruppen zu unterscheiden; wobei noch zu bedenken ist, daß diese übergeordneten Gruppen nicht einmal im voraus bekannt zu sein brauchen.* Im einzelnen Falle kann die Ausfüllung dieser Lücke sehr leicht sein, in der Regel aber wird man sich vor einer unübersteigbaren Mauer von Eliminationsschwierigkeiten befinden. Durch Differentialgleichungen läßt sich diese Unterscheidung jedenfalls nicht bewirken. Man wird also nicht ohne weiteres wissen können, ob *im kleinen hinreichende Bedingungen* und Bestandteile von solchen ($\tau^2 = \tau_1^2$) es auch noch im großen sein werden.

Übrigens bleiben hier, wie schon bei Gelegenheit der Parameterdarstellung der analytischen Kurven, auch die Erscheinungen unerörtert, die im Auftreten natürlicher Grenzen ihren Ursprung haben. Findet sich unter den Äquivalenzbedingungen z. B. eine Gleichung von der Form $J = J_1$, wo J eine Differentialinvariante bedeutet, die alle möglichen Werte annehmen kann, und ist $\Phi(J)$ eine eindeutige analytische Funktion mit natürlicher Grenze, so ist klar, daß die Gleichung $\Phi(J) = \Phi(J_1)$ die Gleichung $J = J_1$ selbst dann nicht vertreten kann, wenn die Funktion Φ eine eindeutige Umkehrung zulässt.

In den zahlreichen Fällen, in denen man mit Invarianten überhaupt nicht auskommt, treten zu den erörterten Schwierigkeiten noch andere und sehr viel größere.

Gewiß scheint uns hiernach zu sein, daß in Lies Theorie der Äquivalenz im kleinen Bestandteile fehlen, die eine Theorie der Äquivalenz im großen schlechterdings nicht entbehren kann, daß dort Unterschiede verwischt werden (und verwischt werden müssen), die hier, bei dem tiefer dringenden Problem, wesentlich sind; wie der Unterschied im algebraischen Charakter der Begriffe Krümmung und Torsion. *Ein gangbarer Weg, auf dem man zu einer „endlichen Zahl von Äquivalenzkriterien“ kommen könnte, ist nicht nachgewiesen.* Da man notwendige und hinreichende Kriterien braucht, so werden noch anders geartete Hilfsmittel nötig sein. Dann aber wird man mit der Möglichkeit zu rechnen haben, daß diese auch für sich allein schon zur Lösung des Äquivalenzproblems führen können (soweit eine solche möglich ist), daß also — wie es in einigen Beispielen zutrifft — Lies „allgemeine Theorie“ im konkreten Falle entbehrt werden kann. Es wäre das übrigens ein Schicksal, das vielleicht auch anderen modernen Theorien widerfahren

kann, deren einige kaum brauchbarer erfunden werden dürften, wenn man es je einmal für erforderlich halten sollte, von ihnen die Anwendungen zu machen, um derentwillen sie doch wohl da sein sollen.

Eine reinliche Scheidung zwischen dem, was Lies Theorie unmittelbar zu leisten vermag, und dem, was im einzelnen Falle zu tun bleibt — mochte dies nun viel oder wenig sein, — war jedenfalls nötig, wenn an irgend einem Beispiele die Tragweite der allgemeinen Theorie erläutert werden sollte. In Lies Darlegung finden wir aber keine Spur davon, daß ihr Urheber sich das klar gemacht hätte. Die unzweifelhaft bei ihm vorhandene theoretische Einsicht, daß seine Begriffe und Theoreme nur in beschränkten Bereichen Geltung haben,[1]) hat als eine fremdartige von außen her aufgedrängte Forderung in Lies schaffensfrohem intuitivem Geiste wohl nie recht Wurzel gefaßt.[2]) Sie wurde wohl kaum anders denn als eine lästige Fessel empfunden, die bei erster Gelegenheit abgeschüttelt werden durfte. So hat, wie wir gesehen haben, Lie auch in der Theorie des Gesamtraumes von mehrwertigen Invarianten nicht anders geredet, als ob sie einwertig wären; und jenes Weglassen überzähliger Gleichungen besteht ebenfalls darin, daß eine im kleinen bei gehöriger Vorsicht mögliche Operation unter ganz anders gearteteten Verhältnissen eine nunmehr unerlaubte Anwendung findet. Hier hätte wohl die gewöhnliche Invariantentheorie, in der man längst die Einführung überzähliger (voneinander abhängiger) Invarianten als *unerläßlich* erkannt hatte, zur Vorsicht mahnen sollen. Aber leider hat Lie diese algebraische Disziplin, von der er — gleich anderen — nicht viel gehalten zu haben scheint, wohl nur ganz von weitem gekannt (vgl. Kap. 23 bei Lie und Scheffers). Er pflegte ja auch sonst ein Problem als (für ihn) interesselos anzusehen, sobald es „nur" zu algebraischen Schwierigkeiten führte.

Dürfen wir uns hiernach die Meinung bilden, daß bei der Frage nach der Äquivalenz im großen im bestimmten Falle die wirklichen Schwierigkeiten dort beginnen können, wo die allgemeine Theorie uns im Stiche läßt, und *daß diese Schwierigkeiten im Gebiete eben der Operationen liegen werden, die* Lie *als ausführbar zu betrachten pflegte,* so kann es wohl auch noch nicht als völlig ausgemacht gelten, daß bei solchen Problemen die Theorie der partiellen Differentialgleichungen überall den Ausgangs- und Mittelpunkt der Untersuchung bilden muß (wie es Lies Ansicht war). Eine geduldige und vorurteilslose Vertie-

1) Lie und Engel, Transformationsgruppen I. Leipzig 1888. Kap. 2 u. Kap. 5.
2) Vgl. auch M. Noether. Math. Annal. Bd. 53 (1900) S. 1 u. ff., insbes. S. 19.

fung in spezielle oder wenigstens verhältnismäßig spezielle Probleme, an deren einfacheren, wenn man es gründlich nimmt, vielleicht auch schon einiges zu lernen sein wird, eine Vertiefung in solche Aufgaben, wie die wichtigeren Gruppen algebraischer Transformationen sie liefern, wird unter derartigen Umständen als eine nützliche Tätigkeit gelten dürfen. In einer Zeit aber, die nur zu gerne vergißt, daß die vielumworbene „Allgemeinheit der Methode“ nicht Selbstzweck sein kann, daß auch die größten Bäume in der Erde stehen und besonders weit verbreitete und feinverzweigte Wurzeln brauchen — *in einer solchen Zeit darf wohl bemerklich gemacht werden, daß bei wirklich liebevoller Behandlung auch nur einer einzigen konkreten Aufgabe die außerordentliche Täuschung gar nicht möglich gewesen sein würde, der sogar ein Mathematiker von unzweifelhaftem Genie sich hingeben konnte.* Es sollte Das wohl Denen zu denken geben, die die Worte allgemein und speciell mechanisch gleich Ausdrücken des Lobes und Tadels zu brauchen lieben.

Daß von dieser unserer Kritik nur ein einzelner Punkt von Lies groß angelegter Theorie getroffen wird, ist selbstverständlich, soll aber doch nicht ungesagt bleiben, damit nicht ferner Stehenden ein Anlaß zu unliebsamen Mißverständnissen geboten werde. Auch hoffen wir, daß man aus einem offenbar ganz extremen Fall nicht übertriebene und einseitige Schlüsse ziehen wird. Gewiß ist bei Lie, wie anderwärts, noch manches zu bessern, aber die Kategorien Richtig und Falsch sind, so gewiß sie für die Urteilsbildung immer im Vordergrunde stehen müssen, doch bei weitem nicht die einzigen, die bei der Bewertung wissenschaftlicher Leistungen in Betracht kommen. Herr Noether, der Lie einen warmen Nachruf gewidmet hat, ist keineswegs blind gewesen gegen die Mängel von dessen Mathematik. Wir glauben, daß das von Noether entworfene sympathische Bild von Lies Wesen und Gesamtleistung in seinen Hauptzügen jeder Kritik standhalten wird. Zuweilen werden wir uns auch an einen Ausspruch des Pianisten Bülow erinnern dürfen, der lieber Rubinstein falsch spielen hörte, als manchen Anderen richtig.

Zu der Studyschen Abhandlung.

Von F. Engel in Greifswald.

Die kritischen Betrachtungen, die Study über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen anstellt, erscheinen erst, nachdem wir beide schriftlich und mündlich eingehend über die darin besprochenen Fragen verhandelt haben, und ich kann meinem Freunde Study nur dankbar dafür sein, daß er mir die Gelegenheit zu solchen Verhandlungen gegeben hat.

Unter diesen Umständen möchte ich nicht unterlassen, mich gleich hier über meine Stellung zur Sache auszusprechen, und so erkläre ich denn, daß ich die Studysche Kritik im wesentlichen als berechtigt und zutreffend anerkenne. Namentlich gestehe ich unumwunden zu, daß die Darstellungen, die Lie selbst von seiner Invariantentheorie gegeben hat, an schweren Mängeln leiden, und daß Lie auch die Tragweite seiner Theorie, besonders die seiner Äquivalenzkriterien überschätzt hat.

Dagegen möchte ich auch darüber keinen Zweifel lassen, daß ich Studys Ansichten nicht in allen Punkten teile.

Vollkommen einig sind wir in der Beurteilung alles dessen, was Lie über den Gegenstand hat drucken lassen, soweit es sich um den Wortlaut handelt. Meinungsverschiedenheiten bestehen zwischen uns beiden nur über solche Begriffe, die Lie gar nicht oder nicht genügend definiert hat, und über eine Reihe von Sätzen, die er nicht scharf, zum Teil sogar unrichtig formuliert hat. Was sich Lie dabei gedacht und ob er sich etwas Richtiges gedacht hat, wie weit er sich überhaupt einzelne Dinge wirklich klar gemacht hat, darüber können wir uns nicht einigen. Das aber sind Fragen, die sich nach der Natur der Sache gar nicht entscheiden lassen, die vielmehr jeder für sich beantworten muß, ohne darauf rechnen zu können, daß er auch andre von der Richtigkeit der gewonnenen Ansicht überzeugen wird. Über solche Fragen kann wohl ein Freund mit dem andern streiten, wie wir beide es ausgiebig getan haben, aber es würde zu nichts führen, diesen Streit vor der Öffentlichkeit fortzusetzen. In dem vorliegenden Falle werde ich das jedenfalls nicht tun.

Nur zwei Bemerkungen will ich noch hinzufügen, die sich auf den Inhalt der Studyschen Arbeit beziehen.

Daß Lie die krummen Linien in den Minimalebenen übersehen hat, war mir schon vor längerer Zeit aufgefallen, bevor mir Study das mitteilte. Ich halte das für ein einfaches Vergessen, über das ich mich allerdings gerade bei Lie wundern muß. Dieses Vergessen würde an und für sich entschuldbar sein, doch hat es inzwischen, weil es nicht früh genug richtig gestellt worden ist, noch andre Irrtümer veranlaßt, und daher hat Study allerdings recht, es nicht als harmlos gelten zu lassen. Ich selbst fühle mich dabei mitschuldig, weil ich unterlassen habe, darauf hinzuweisen, sobald es mir aufgefallen war.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die von Study erwähnte Tatsache, daß Lie zu seinem Schaden die projektive Invariantentheorie nur oberflächlich gekannt hat. Ich möchte es nämlich bei dieser Gelegenheit einmal aussprechen, daß leider auch die Invariantentheoretiker fast durchweg — eine rühmliche Ausnahme bildet Study selbst — sich um Lies Theorien überhaupt nicht gekümmert haben, obgleich sie aus den von Lie eingeführten Begriffen recht viel hätten lernen können, namentlich für eine anschaulichere und durchsichtigere Fassung der Grundprobleme ihrer eignen Theorien.

Wenn ich nun auch Studys Kritik als berechtigt anerkenne, so fühle ich mich doch als Lies ältester und vertrautester Schüler verpflichtet, etwas zu tun, was der Kritiker allerdings nicht nötig hat, nämlich zu zeigen, daß jedenfalls die Begriffe, auf denen Lie seine Invariantentheorie aufgebaut hat, nicht an sich mangelhaft sind, sondern eine vollständig scharfe Definition zulassen, und daß ebenso seine Äquivalenztheorie keineswegs von Grund aus verfehlt ist, vielmehr bis zu einem gewissen Grade in Ordnung gebracht werden kann, wenn sich auch nicht alle Ansprüche, die Lie gemacht hat, aufrecht erhalten lassen. Ich behalte mir daher vor, in der eben bezeichneten Richtung eine Ergänzung zu der Studyschen Kritik zu liefern, und werde diese Ergänzung, die aus leicht begreiflichen Gründen ziemlich umfangreich ausfallen wird, an einer andern Stelle veröffentlichen.

Greifswald, im Januar 1908.

Willkürliche Schöpfungen des Verstandes?

Von Gerhard Hessenberg in Bonn.

Wenn ich im folgenden wieder einmal die Paradoxien der Mengenlehre gegen einige Lösungsversuche in Schutz nehme, so geschieht das, wie ich vorweg erklären will, nicht den Paradoxien zuliebe. Mit ihnen wird die produktive Mengenlehre so gut fertig werden, wie die Durchbildung des Stetigkeitsbegriffs mit den alten Sophismen über die Unmöglichkeit der Bewegung aufgeräumt hat. Und man kann ihr, im Hinblick auf diesen Präzedenzfall, sogar einige Jahrtausende Zeit dazu lassen. Ich stimme also in Herrn Schoenflies' Schlachtruf: „Wider alle Resignation und wider alle Scholastik" freudig ein und glaube, daß das Schwinden der Skepsis bereits deutliche Anzeichen in der Literatur gezeitigt hat.

Der mangelnde Respekt vor den Paradoxien soll uns aber nicht hindern, solche Lösungsversuche zu verwerfen, die nicht haltbar sind, namentlich wenn sie auf Argumentationen beruhen, die für speziell-mathematische Fragen von Bedeutung und — infolge ihrer Fehlerhaftigkeit — auch gefährlich sind. Ich rechne dazu vor allem diejenigen Versuche, die die Bedeutung der *Existenzfrage* für die Paradoxien übersehen oder verkennen. Es liegt in der Natur diffiziler Probleme, die die Grundlagen unseres Denkens angehen, daß die Selbstverständlichkeit gewisser Grundvoraussetzungen zu einer Verkennung ihrer Bedeutung führt. Der eine sieht sie gar nicht, der andere sieht sie, aber er betont sie nicht. Des letzteren Fehlers habe ich mich schuldig gemacht, indem ich in einer Untersuchung der Paradoxien[1]) die Existenzfrage der paradoxen Begriffe nicht hinreichend hervorgehoben habe. Nunmehr vermißt infolgedessen Herr Schoenflies[2]) bei mir die Angabe näherer Gründe für die Ablehnung seiner Lösungsversuche, und so will ich vor allem das Versäumte nachholen.

1) „Grundbegriffe der Mengenlehre", Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge, Band I, Heft IV. Auch als Sonderdruck erschienen. Göttingen 1906, bei Vandenhoeck & Ruprecht. Hier kommt im wesentlichen Kap. XXIII und und XXIV in Betracht.

2) „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten", zweiter Bericht. Diese Jahresberichte, der Ergänzungsbände zweiter Band. 1908. Es kommt insbesondere Kap. I, § 7 u. f. in Betracht.

I.

1. Bereits Herr Korselt[1]) hat hervorgehoben, daß widerspruchsvolle Begriffe sowohl Hilfsmittel wie Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung sein können. Dann, und nur dann nämlich, wenn ihre Existenz problematisch ist, wenn z. B. in einem indirekten Beweis die Nichtexistenz erwiesen werden soll. Daraus folgt zunächst, daß ein widerspruchsvoller Begriff von *problematischer Existenz* niemals zu einer Paradoxie Anlaß geben kann, da man aus seinem Widerspruch ohne weiteres auf seine Nichtexistenz schließt. Es gibt keine Paradoxie des regulären Siebenflachs oder der Zahl Anej, die kleiner als 1, aber größer als jede Zahl unter 1 ist.

Zu den wesentlichen Bedingungen einer Paradoxie gehört also, daß außer der Behaftung mit einem Widerspruch einem Begriff auch die Existenz zukommt, besser gesagt: zuzukommen *scheint*. Dann aber ist es unzulässig, wie es Herr Schoenflies tut, einfach aus dem Widerspruch auf die Nichtexistenz zu schließen. Und ebenso verfehlt ist der von den Skeptikern gezogene Schluß aus der Existenz paradoxer Mengen auf die Unzuverlässigkeit der mengentheoretischen Schlußweisen überhaupt. Vielmehr ist angesichts einer Paradoxie stets eine doppelte Prüfung notwendig: Aus welchen Prämissen folgt *erstens* die Existenz des paradoxen Begriffs, aus welchen anderen *zweitens* sein Widerspruch?

Insbesondere führt das Übersehen der Existenzfrage zu folgendem Zirkel: „Dieser Begriff darf nicht gebildet werden, weil er einen Widerspruch enthält. Woher aber kommt der Widerspruch? Davon, daß dieser Begriff gebildet wird, obwohl es verboten ist, ihn zu bilden.“

Das Verbot, einen Begriff zu bilden, wird uns späterhin noch ausführlicher beschäftigen.

2. Wäre durchweg in der Mathematik die Widerspruchslosigkeit das einzige bindende Kriterium der Existenz, so gäbe es keine Paradoxien. Dem ist aber nicht so. Für mathematische Grundbegriffe wird die Existenz durchweg postuliert. Die Geometrie z. B. kümmert sich nicht im mindesten um die Frage, ob ihre Grundlagen ein widerspruchsloses System bilden, — wobei ich die Grundlagentheorie nicht zur Geometrie im engeren Sinne rechne. Der Beweis der Widerspruchslosigkeit der Geometrie wird durch ihre logische Abbildung auf Zahlenmengen erbracht. Deren Existenz aber beruht auf der postulierten Existenz des Kontinuums, die sich wieder auf ein engeres Postulat — die Existenz der Zahlenreihe, — und ein umfassenderes — die Existenz der Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge, — stützt.

1) Dieser Jahresbericht, Bd. 15, S. 215.

Für diese beiden Postulate ist ein Beweis bisher nicht erbracht und dürfte auch so bald nicht erbracht werden.

3. Mit der Konstatierung *„daß in eine Paradoxie widerspruchsvolle Begriffe eingehen,"*[1]) ist also bestenfalls die *Tatsache der Paradoxie* konstatiert, was bei allgemein anerkannten Paradoxien eine überflüssige Mühe ist, — niemals aber ist darin ihre Lösung enthalten.

Daß z. B. die Menge aller Dinge, das „All", und die Menge aller Ordnungszahlen, das „W", widerspruchsvolle Begriffe sind, ist so lange bekannt wie die darauf beruhenden Paradoxien. Und da diese Widersprüche allem Anschein nach unbehebbar sind, wird man vor allem nachprüfen müssen, aus welchen Postulaten trotz der Widersprüche die Existenz des All und des W zu folgen scheint. Gelingt es, diese Postulate so einzuschränken, daß die Existenz der paradoxen Begriffe nicht mehr gefordert wird, — wobei man darauf zu achten hat, daß man nicht die Existenz der Mengenlehre selbst gefährdet — dann, und dann *erst*, ist man berechtigt, aus dem Widerspruch auf die Nichtexistenz zu schließen. Dieses Verfahren hat unlängst Zermelo[2]) in seiner Axiomatik eingeschlagen, und es ist ihm gelungen, überhaupt jede independente Mengendefinition auszuschalten, ohne den gesicherten Besitzstand der Mengenlehre anzutasten.

II.

4. Man beweist nach dem Cantorschen Diagonalverfahren, daß *jede abzählbare* Untermenge M des Kontinuums[3]) eine *echte* Untermenge des K ist. Dieser Beweis ist ein Existenzbeweis, nämlich der Beweis der Existenz von Elementen des K, die nicht Elemente von M sind. Und zu den engeren Voraussetzungen, auf denen er sich aufbaut, gehört erstens die Existenz der Untermenge M, zweitens die Existenz einer umkehrbar eindeutigen Abbildung Φ von M auf die Zahlenreihe. Daraus ergibt sich, daß das n-te Element von M existiert, es existiert also in seiner Dezimalbruchentwicklung die n-te Stelle s_n. Da s_n eine ganze Zahl zwischen 0 und 9 ist, existiert auch $s_n' = 9 - s_n$ und ist ebenfalls eine ganze Zahl zwischen 0 und 9. Demnach existiert eine

---

1) Schoenflies l. c. S. 39.

2) Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. Bd. 65. 1908. Vgl. hierzu und zu den Ausführungen unter VI auch: K. Grelling und L. Nelson: Bemerkungen zu den Paradoxieen von Russell und Burali-Forti. Abh. d. Fries'schen Schule, Bd. II. Heft 3.

3) Im folgenden wird das Kontinuum mit K bezeichnet und durch die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 dargestellt gedacht, wobei die Dezimalzahlen alle als unendliche Brüche geschrieben sein sollen ($\frac{1}{2} = 0{,}49999\ldots$).

Belegung der Zahlenreihe mit den Ziffern s'_n, d. h. der unendliche Dezimalbruch $\delta' = 0, s'_1 s'_2 s'_3 \ldots$ Er ist Element von K und von jedem Element von M verschieden.[1])

5. Es ist wesentlich, daß die Existenz von δ' lediglich aus der von M und Φ *ohne jede Einschränkung* folgt. Gäbe es auch nur *eine* abzählbare Teilmenge Δ des K, für die ein von allen Elementen von Δ verschiedenes Element δ' des K nicht existierte, so könnte Δ mit K identisch sein, d. h. es könnte die Nichtabzählbarkeit des K nicht bewiesen werden.

Die Nichtabzählbarkeit des K ist bereits in dem Satze enthalten, daß jede *abzählbare* Untermenge auch eine *echte* Untermenge des K ist. Man kann aber auch alle Stadien des Beweises nochmals durchlaufen, indem man $M = K$ setzt. Man findet sodann, daß δ' widerspruchsvoll ist: es ist ein von *allen* Elementen des K verschiedenes Element des K. Demnach kann δ' nicht existieren, und da seine Existenz aus der des K und der Abbildung Φ gefolgert war, erstere aber der ganzen Betrachtung zugrunde liegt, so kann Φ nicht existieren, d. h. das K ist nicht abzählbar.

III.

6. Jeder Beweis der Abzählbarkeit des K führt notwendig auf den *Schein* einer Paradoxie; bisher sind aber auch nur solche Beweise gegeben worden, bei denen die Paradoxie ohne weiteres als *scheinbar* nachgewiesen werden konnte. Man sollte sie daher ruhig „Sophismen" und nicht „Paradoxien" nennen; vor allem tut man ihnen mit der Bezeichnung *„Antinomie"* zu viel Ehre an.

Das *„Sophisma Richard"* hat folgenden Ursprung: Die Elemente des K sind wohldefinierte und wohlunterschiedene Objekte. Das heißt, zu jedem von ihnen gehört eine Definition, die dieses Element *eindeutig* definiert und von allen andern unterscheidet.

Eine Definition besteht aus einer endlichen Anzahl von Worten, jedes Wort aus einer endlichen Anzahl von Buchstaben. Eine Definition ist also eine endliche Kombination[2]) aus der endlichen Menge der Schriftzeichen[3]), einschließlich der Gliederungszeichen (Interpunktion, Worttrennung usw.). Die Reihe der endlichen Kombinationen der Ele-

1) Auszunehmen ist der Fall, daß δ' eine Dezimalzahl $g\,10^{-m}$ ist. Dann ist aber $\delta' + \frac{1}{9} \cdot 10^{-m}$ sicher nicht in M enthalten. Bezeichnet man übrigens $0, s_1\, s_2\, s_3 \ldots$ mit δ, so ist $\delta' = 1 - \delta$.

2) Mit Wiederholung.

3) Man könnte noch sämtliche Zeichen des mathematischen Kalküls hinzunehmen, nur müßte man für ihre rein lineare Anordnung sorgen.

mente einer endlichen Menge ist aber abzählbar. Daher ist die Menge aller Definitionen abzählbar, und im speziellen die Menge derjenigen Definitionen, die je ein Element des K eindeutig definieren.[1] Da diese dem K äquivalent ist, ist das K abzählbar.

7. An dieser Argumentation, — die sich wörtlich auf jede nichtabzählbare Menge übertragen läßt, z. B. auf die zweite Zahlklasse, — kann man vor allem die angebliche Definierbarkeit jeder einzelnen Irrationalzahl bestreiten, womit die Identität des Kontinuums mit der Menge Δ aller definierbaren Irrationalzahlen hinfällig wird. Doch wird die Paradoxie damit nicht beseitigt.

Diese Richardsche Menge Δ ist nämlich abzählbar, und es läßt sich infolgedessen nach dem allgemeinen Cantorschen Satz ein Element δ' des K definieren, welches nicht in Δ enthalten ist. Da aber dieses Element *definiert*, sogar direkt angegeben wird, ist es nach der Definition von Δ doch Element von Δ.

Eine kleine Modifikation der Schlußweise läßt den Widerspruch an Δ selbst auftreten: Ist Δ_0 eine abzählbare Teilmenge von Δ, so

1) Herr Schoenflies erhebt gegen diesen Beweis den Einwand, daß es Definitionen gibt, die mehr als ein Element des K definieren, und er behauptet, Richard und König hätten dies übersehen, indem sie stillschweigend annahmen, daß *jede Definition nur ein Objekt definiere.* Wenn die Herren Richard und König etwas stillschweigend angenommen haben, so war es höchstens das umgekehrte, daß *jedes Objekt eine Definition bestimme*, und zwar gilt dies nach Definition von allen Objekten der von ihnen betrachteten Menge.

Gegen die Beschränkung auf solche Definitionen, die nur *ein Element* des K definieren, erhebt Herr Schoenflies den weiteren Einwand, daß solche Definitionen gleichwohl unendlich viele *Objekte* festlegen, nämlich die *Stellen* des Dezimalbruchs. Das hat aber niemand bestritten, und es hat mit der Paradoxie auch gar nichts zu tun. Die Definition: „$\frac{\pi}{4}$ ist der Limes der alternierenden Summe der reziproken ungeraden Zahlen", oder „$\frac{\pi}{4} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{2\lambda+1}$" definiert freilich unendlich viele Stellen, aber nur *einen* Dezimalbruch zwischen 0 und 1. Oder ist jede Ziffer, mit der eine Stelle eines Dezimalbruchs zwischen 0 und 1 belegt wird, selbst ein Dezimalbruch?

Die Schoenfliessche Definition, der die Elemente einer nichtabzählbaren Teilmenge des K genügen, liefert eine *definierbare Menge von Objekten*, während die Richardsche Argumentation einer *Menge von definierbaren Objekten* gilt. Ferner verschiebt sie das ganze Problem lediglich auf ein anderes, indem man zu der Frage gezwungen wird, wieviel monoton ins Unendliche wachsende Funktionen sich definieren lassen. Da es nach der Richardschen Argumentation wiederum nur abzählbar viele definierbare gibt, während die Menge aller solcher Funktionen nichtabzählbar ist, erhält man die ganze Frage rein zurück. Im übrigen ist das Kontinuum selbst ein viel einfacheres Beispiel einer endlich definierten nichtabzählbaren Menge von Dezimalbrüchen.

definiert sie nach dem Cantorschen Verfahren ein Element δ', welches nicht in Δ_0, wohl aber, als *definiertes* Element des K, in Δ enthalten ist. Somit ist jede *abzählbare* Teilmenge von Δ eine *echte* Teilmenge von Δ, also Δ selbst nicht abzählbar, obgleich seine Abzählbarkeit eingangs bewiesen wurde.

IV.

8. Die Richardsche Betrachtungsweise ist darum ein reines Sophisma, weil der Begriff der Definierbarkeit ein unklarer ist. Was ich für Objekte definieren kann, das hängt von der Entwicklung der Sprache, der Abstraktionsfähigkeit, der mathematischen Hilfsmittel ab. Jede Neuschaffung eines Wortes, eines Zeichens, eines Algorithmus erweitert den Bereich des Definierbaren, ist aber andererseits ein Werk menschlicher Willkür. Ob irgendein Ding definierbar ist oder nicht, das ist nicht „*definit*" im Sinne Zermelos.[1]) Ich muß zum mindesten das Objekt als von der Definition unabhängig existent voraussetzen, wenn die Disjunktion überhaupt einen Sinn haben soll. Ob aber die Entwicklung meiner Erkenntnis einen Weg einschlägt, der mich zur Definition eines heute noch undefinierten Objektes hinführt, das ist in keiner Weise entscheidbar, entschieden oder irgendwie vorausbestimmt. Die Menge Δ genügt daher nicht einmal den Cantorschen Postulaten der Wohldefiniertheit.

9. Bei genauer Angabe der zulässigen Definitionsmittel kann unter Umständen die Menge *aller* mit den gegebenen Mitteln definierbaren Objekte einen Sinn haben. Eine solche Menge ist z. B. die Menge aller algebraischen Zahlen. Ferner ist im Gebiet der transfiniten Ordnungszahlen durch die drei Operationen der Addition, Multiplikation und Potenzierung, angewandt auf ω und die endlichen Zahlen, ein Abschnitt der zweiten Zahlenklasse bestimmt, der nur definierbare Elemente enthält. Auf ihn folgt die erste Lösung der Gleichung $\varepsilon = \omega^\varepsilon$, die eben wegen dieser Gleichung den genannten Definitionsmitteln gegenüber irreduzibel, also nicht definierbar ist. Bezeichne ich sie mit ε_1, so habe ich meine Definitionsmittel erweitert und kann bis zur zweiten Lösung ε_2 der genannten Gleichung vordringen. Bezeichne ich allgemein die Lösungen dieser Gleichung mit ε_α, so gelange ich bis zu der ersten Zahl φ, für die $\varphi = \varepsilon_\varphi$ ist usf. Man sieht, daß somit die *ganze zweite Zahlklasse* im weitesten Sinne aus definierbaren Elementen besteht. *Aber da sie dauernd zur Einführung neuer Definitionsmittel zwingt, ist der Richardsche Beweis ihrer Abzählbarkeit undurchführbar.*

---

1) Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. Bd. 65, 1908.

10. Erzwinge ich aber diese Abzählbarkeit durch Festlegung der zulässigen Definitionsmittel und das Verbot ihrer Erweiterung, dann ist das Element δ' nicht mehr mit diesen Mitteln definierbar, da seine Definition die Menge Δ selbst voraussetzt, die bereits alle Definitionsmittel verbraucht hat. Dies ist der wesentliche Teil derjenigen Lösung, die nach Poincaré von Richard selbst gegeben wurde. Läßt man aber die Forderung der Festlegung der Definitionsmittel fort, so wird gerade diese Lösung im höchsten Grade bedenklich, indem sie die Gestalt des Einwandes der nicht-prädikativen Definition annimmt. In der Tat hat Poincaré auf Grund dieses Einwandes nicht nur den Wohlordnungssatz, sondern auch den Äquivalenzsatz angefochten, damit zugleich aber die Anwendung des Schlusses von n auf $n+1$ in seiner kettentheoretischen Gestalt.[1])

V.

11. Betrachten wir nun die Lösung, die Herr Schoenflies auf S. 29f. des zweiten Berichtes über Punktmengen gibt. Er sieht zunächst von der speziellen Bedeutung von Δ ab, — was uns ermöglicht, seine Argumentation an anderen Mengen durch Übertragung nachzuprüfen, — und konstatiert sodann, daß *nur zwei* Möglichkeiten vorliegen: „Eine jede wohldefinierte Menge Δ ist entweder abzählbar oder nichtabzählbar."

Hiermit ist zunächst Δ als wohldefinierte Menge anerkannt, ohne daß von irgendwelcher Beschränkung der Definitionsmittel die Rede ist. Das Proton Pseudos des ganzen Sophisma ist also übernommen.

12. Fragen wir weiter, was uns die Disjunktion zwischen Abzählbarkeit und Nichtabzählbarkeit helfen kann. Sie beruht auf dem Satz des Widerspruchs, und gerade für die Menge Δ versagt dieser, da sich sowohl ihre Abzählbarkeit wie ihre Nichtabzählbarkeit beweisen läßt. Die Disjunktion ist also völlig zwecklos.

Sie ist auch noch aus einem anderen Grunde unbrauchbar: Ist nämlich Δ abzählbar, so ist der Beweis der Nichtabzählbarkeit fehlerhaft, und umgekehrt; aber diese Erkenntnis hilft mir den Fehler nicht aufdecken, der im Beweise gemacht ist. Und gerade die Verstecktheit des Fehlers bewirkt doch den Schein der Paradoxie.

Endlich aber: Wie kann ich anders entscheiden, ob Δ abzählbar oder nicht abzählbar ist, als indem ich eines von beiden *beweise?* Angenommen ich bewiese, — wie es Herr Schoenflies tut, — die

1) Vgl. hierzu Zermelo, Neuer Beweis der Möglichkeit einer Wohlordnung, Math. Ann. Bd. 65. Ferner Grundbegriffe der Mengenlehre, Abh. d. Fries'schen Schule, Kap. VI, § 18, Kap. XXIII.

Nichtabzählbarkeit. Dann habe ich mit den Argumentationen der Paradoxie zusammen *einen* Beweis *für*, *zwei* Beweise *gegen* die Abzählbarkeit. Aber entscheidet hier die Majorität für das richtige?

13. Die Ausführungen des Herrn Schoenflies haben folgenden Wortlaut: „Ist Δ zunächst tatsächlich *abzählbar*, so läuft die obige Definition darauf hinaus, ein Element δ' zu definieren, das von *jedem* Element von Δ verschieden ist. Dann ist also diese Definition *widerspruchsvoll*. Es hat aber gar nichts Besonderes, aus einem richtigen Vordersatz mittelst einer widerspruchsvollen Annahme sein kontradiktorisches Gegenteil abzuleiten; das ist innerhalb wie außerhalb der Mengenlehre auf die mannigfachste Art möglich."

Hier müssen wir zunächst betonen, daß die *Definition* von δ' keine *Annahme* ist, denn die Existenz von δ' folgt ohne weiteres aus der Abzählbarkeit von Δ nach dem Cantorschen Satz. Ferner ist die Definition nicht widerspruchsvoll, denn sie lautet: „Man bilde den Dezimalbruch $\delta = 0, s_1 s_2 s_3 \ldots$, dessen $n$te Stelle mit der $n$ten Stelle des $n$ten Elementes von Δ übereinstimmt. Sodann setze man $\delta' = 1 - \delta$." Die erste Hälfte der Definition enthält materiell keinerlei Widerspruch, auch an δ sind keine widersprechenden Eigenschaften zu bemerken. Herr Schoenflies müßte also die Definition von $1 - \delta$ verbieten. Aber kann ein Objekt, dessen Existenz außer Zweifel steht, durch das Verbot seiner Definition aus der Welt geschafft werden? Das geht ebensowenig, wie es der Kriminalpolizei gelingen kann, einen Schwerverbrecher dadurch unschädlich zu machen, daß sie auf seine steckbriefliche Verfolgung verzichtet.

14. Aber geben wir einmal zu, daß δ' nicht existiere. Dann ist Δ eine abzählbare Teilmenge des K, von der Beschaffenheit, daß es nicht möglich ist, ein Element von K anzugeben, welches nicht Element von Δ ist. Der Cantorsche Satz von der Nichtabzählbarkeit des K ist also falsch oder zum mindesten unbewiesen. (s. § 5.)

15. Herr Schoenflies fährt fort: „Ist zweitens Δ *nicht abzählbar*, so enthält die Vorschrift materiell keinen Widerspruch, die Richardsche Argumentation stellt vielmehr einen *richtigen indirekten Beweis* der Nichtabzählbarkeit von Δ dar, der ja auch mit dem klassischen Beweis identisch ist, mit dem Cantor die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums gezeigt hat. Nur weil die obige Definition in diesem Gewande auftritt, konnte sie auch bei wirklich abzählbarem Δ den Schein der Widerspruchslosigkeit erwecken. — Der richtige Schluß, der hier zu ziehen ist, ist also der der Nichtabzählbarkeit von Δ."[1])

1) Als Bestätigung dieses Schlusses schließen sich nunmehr die oben besprochenen Einwände gegen den Beweis der Abzählbarkeit von Δ an.

Offen gestanden, ist es mir nicht klar, wie nach Beseitigung der Paradoxie in *beiden möglichen* Fällen nun doch der eine Fall allein als zutreffend erschlossen wird. Ferner war bereits betont, daß hier bestenfalls *zwei* Beweise der Nichtabzählbarkeit gegen *einen* des Gegenteils stehen. Von diesem einen ist aber in der ganzen Argumentation überhaupt nicht die Rede; er wird erst nachträglich noch in die Diskussion gezogen.

Eigentümlich berührt mich ferner die Betonung der Analogie mit dem Cantorschen Beweis, dessen „Gewand" sich die Richardsche Argumentation umgehängt haben soll. Sollte es Herrn Schoenflies wirklich entgangen sein, daß es sich in der Paradoxie um eine *wörtliche Durchführung* des für *jede* abzählbare Teilmenge des K gültigen Cantorschen Gedankengangs an einer *speziellen* Teilmenge des K handelt?

16. Das Bedenklichste an der ganzen Argumentation ist aber folgender Punkt. Setzen wir für Δ das K ein (wozu wir auch nach Herrn Schoenflies eigenen Worten berechtigt sind), so ergibt sich:

„Entweder ist das K *abzählbar*. Dann läuft der Cantorsche Beweis des Gegenteils darauf hinaus, ein Element δ' des K zu definieren, welches von *jedem* Element des K verschieden ist. Dann ist also diese Definition widerspruchsvoll. Es hat aber nichts Besonderes usw. (s. o.). Ist zweitens K nicht abzählbar, so enthält die Vorschrift, δ' zu bilden, materiell keinen Widerspruch, die Cantorsche Argumentation stellt vielmehr einen *richtigen indirekten Beweis* der Nichtabzählbarkeit des K dar."

Das heißt also: Der Cantorsche Beweis ist nur zulässig, wenn der zu beweisende Satz wahr ist. Ich muß also entweder voraussetzen, was ich beweisen will, oder ich muß einen anderen Beweis der Nichtabzählbarkeit aufsuchen, der erst den Cantorschen Beweis rechtfertigt.

17. Da es mir nur darauf ankommt, die Gefahren der ganzen hier besprochenen Paradoxienwiderlegung aufzuweisen, kann ich auf die verlockende Ausspinnung des letzten Gedankens verzichten. Zugleich hoffe ich, daß die in Herrn Schoenflies' Argumenten enthaltenen Gefährdungen der Cantorschen Beweise in ihrer Bedeutung meine ausführliche Zerpflückung rechtfertigen, bei der es mir gewiß nicht darum zu tun war, einen an Leistungen, Erfahrungen und Jahren weit über mir stehenden Mann aus reiner Freude am Nörgeln anzugreifen.

VI.

18. Sowenig wie das Element δ' können die Russellsche Menge R aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten, die Menge $\{M\}$ aller Mengen und die Menge W aller Ordnungzahlen durch ein Verbot ihrer

Definition beseitigt werden, solange man Postulate zuläßt, aus denen ihre Existenz folgt. Es kommt dann das Verbot lediglich auf eine *Ignorierung* hinaus mit dem gleichen Erfolg der Undurchführbarkeit wie im täglichen Leben. Wenn ich mir vornehme, Herrn X zu ignorieren, so muß ich jedesmal, wenn ich instinktiv zum Grusse an den Hut greife, erst aufpassen, ob ich nicht gerade Herrn X zu grüßen im Begriff bin. Und wenn ich mich auf eine Ignorierung von W einlasse, so muß ich jedesmal bei der harmlosen und elementaren Prozedur des Anhängens eines Elementes nachsehen, ob ich es nicht an W anzuhängen im Begriff bin.

19. Die „Menge aller Dinge", das „All", ist nicht nur, als Menge höchster Mächtigkeit, widerspruchsvoll, sondern ihre Existenz läßt sich aus den Cantorschen Postulaten gar nicht folgern, da sie *alle* Dinge, also auch *alle nicht wohldefinierten* enthält. Man bedenke, daß sie nicht nur alle Dinge enthält, die es gibt, — sonst wäre sie variabel, — sondern auch alle, die es gegeben hat und geben wird, ja, nach Zermelos Ansicht auch alle, die es *nie* gegeben hat und *nie* geben wird. Größeren Ernstes der Behandlung ist das All nicht wert.

20. Anders steht es mit den drei obengenannten Mengen. Die üblichen Postulate, auf die sich bisher jede independente Mengendefinition gestützt hat, lassen sich etwa so fassen:

I. Eine Menge existiert, wenn sie mindestens ein Objekt enthält, wenn ferner alle in ihr enthaltenen Objekte wohldefiniert sind, und wenn endlich von jedem wohldefinierten Objekt feststeht, ob es zu ihr gehört oder nicht.

II. Eine Menge ist ein wohldefiniertes Objekt.

III. Von jedem wohldefinierten Objekt steht fest, ob es eine Menge ist, oder nicht.[1])

Man mag diese Postulate noch weiter fassen oder aus anderen herleiten, jedenfalls kann niemand ihre anscheinende Harmlosigkeit bezweifeln, wenigstens nicht die Tatsache, daß man sie jahrelang für harmlos gehalten und unbefangen angewandt hat. Man kann noch als besonderes Postulat hinzufügen, daß es wenigstens *ein* wohldefiniertes Ding geben soll. Dann ist gewiß, daß wenigstens die eine Menge

1) Diese Postulate scheinen mir, wenn nicht in Cantors Definitionen enthalten, so doch in allen Anwendungen der Mengenlehre stillschweigend benutzt worden zu sein. Die Ansicht, daß jeder Begriffsumfang eine Menge ist, geht sogar weit darüber hinaus. Die von Cantor in den Math. Ann. Bd. 23 gegebene Definition enthält bereits alles wesentliche dessen, was Zermelo als „Definitheit" bezeichnet, sie läßt aber indepedente Definitionen in obigem Sinne zu. Die Forderung in Math. Ann. Bd. 46 ist sicher viel zu weit gehalten.

existiert, die aus diesem Ding besteht. Eine unmittelbare Folgerung unserer Postulate ist ferner die Existenz der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}(M, N)$ zweier Mengen.

21. Unsere Postulate ergeben aber ohne weiteres die Existenz der Menge $\{M\}$ aller Mengen. Denn erstens gibt es wenigstens eine Menge, zweitens ist jede Menge ein wohldefiniertes Objekt, drittens steht von jedem wohldefinierten Objekt fest, ob es eine Menge ist, oder nicht.

Ferner existiert von $\{M\}$ die Teilmenge R aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten.[1]) Denn von jeder Menge M als einem wohldefinierten Objekt, steht es fest, ob sie Element von M ist oder nicht, d. h. ob sie sich selbst enthält oder nicht. Ob R echte Teilmenge von $\{M\}$ oder mit $\{M\}$ identisch ist, bleibt dahin gestellt. Man kann zwar noch postulieren — oder vielleicht auch beweisen, — daß keine Menge sich selbst enthält. Dann ist R mit $\{M\}$ identisch und $\{M\} - R$ leer. In der ersten Zeit des Triumphzuges des Russellschen Paradoxons wurde immer wieder die Zulässigkeit der Disjunktion zwischen Mengen, die sich enthalten, und solchen, die sich nicht enthalten, mit dem Hinweis bestritten, daß es Mengen der ersten Art gar nicht gäbe. Analog wandte man gegen die logische Fassung des Paradoxons ein, daß es prädikable Begriffe nicht gäbe. Dies ist aber gar kein Einwand, geschweige denn der Nachweis eines logischen Fehlers. Wenn ich sage, daß jeder ausgewachsene Mensch entweder kleiner als ein Zentimeter oder nicht kleiner als ein Zentimeter ist, so behaupte ich damit noch keineswegs, daß es ausgewachsene Menschen der ersten Art geben muß. Sonst dürfte ich ja auch die Disjunktion nicht in dem bekannten Beispiel anwenden: „Zwei Mengen sind entweder äquivalent, oder die eine ist von größerer Mächtigkeit als die andere, oder sie sind inkomparabel.“ Denn der dritte Fall ist ja ausgeschlossen.[2])

22. Ob nun R mit $\{M\}$ identisch ist oder nicht, in jedem Fall besitzt es widersprechende Eigenschaften, der Satz vom Widerspruch versagt: R ist sowohl Element von R wie auch nicht Element von R. Ist insbesondere $R = \{M\}$, so ist R als Menge ein Element der Menge aller Mengen, andererseits darf aber keine Menge sich selbst enthalten.

1) Wäre sie Null, was hier zur Nichtexistenz gerechnet wird, so gäbe es bekanntlich nur ein Ding, das mit der aus ihm bestehenden Menge identisch wäre. Diese triviale Mengenlehre enthält m. W. keine Paradoxie.

2) Ebensowenig ist der Begriff eines „reitenden Kavalleristen“ widerspruchsvoll; ein Widerspruch entsteht erst, wenn ich annehme, daß es auch nichtreitende Kavalleristen gibt. Das Russelsche Paradoxon macht aber von der Existenz sich selbst enthaltender Mengen gar keinen Gebrauch. — Vgl. diesen Jahresber., Bd. 15, S. 22, Fußnote 1.

Der Unterschied liegt hier im Gegensatz zur allgemeineren Annahme nur in der einfacheren Ableitung der widersprechenden Eigenschaften, nicht in diesen selbst. Und die Paradoxie liegt darin, daß trotz dieser Eigenschaften die Existenz von R und $\{M\}$ aus den Postulaten folgt, so daß der Schluß aus dem Widerspruch auf die Nichtexistenz hinfällig wird, jedenfalls aber den Widerspruch nur verschiebt.

23. Zur Konstruktion der Paradoxie des W bedürfen wir nur des weiteren Satzes, daß jede geordnete Menge einen Ordnungstypus definiert; mir scheint dieser Satz notwendig aus dem allgemeinen Verfahren der Abstraktion zu folgen. Dieses ist aber noch nicht unzweideutig charakterisiert worden, Russells Definition z. B., nach der der Ordnungstypus von M die Menge aller zu M ähnlichen Mengen ist, ist unhaltbar. Jedenfalls kann die Existenz des Ordnungstypus nicht bestritten werden, ohne daß man die ganze Theorie der Ordnungszahlen gefährdet; die Beseitigung der Paradoxie kann auch hier nur durch engere Fassung der Postulate I bis III erreicht werden, und zwar scheint mir gerade an diesem Beispiel ersichtlich, daß nur die Ausschaltung jeglicher independenter Mengendefinition zum Ziele führen kann. Der prinzipielle Unterschied zwischen W und den Zahlklassen liegt gerade darin, daß letztere durch das Postulat der Menge aller Teilmengen gefordert werden, während W nur durch den schrankenlosen Gebrauch des Wortes „alle" definiert werden kann.

Über die Verbote, W mit einer anderen Menge zu vereinigen oder wenigstens diese Vereinigung zu ordnen, ist schon so vieles gesagt worden, daß ich die Kritik solcher Verbote als erledigt betrachten kann. Ich will nur noch hinzufügen, daß mit der Zulassung der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}(W, \{m\})$ auch ihre Ordnung zugelassen ist, da sich ein ordnendes Teilmengensystem durch *Vereinigung* aller Reste von W mit $\{m\}$ und nochmalige Vereinigung der so gebildeten Menge mit $\{\{m\}\}$ herstellen läßt.

VII.

24. Der Versuch, widerspruchsvolle Begriffe durch das Verbot ihrer Definition zu beseitigen, kann durch Berufung auf ein Wort gerechtfertigt werden, das von einem Meister unserer Wissenschaft stammt:

„Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes."

Liegt es in der Freiheit meines Geistes, Zahlen zu schaffen, so kann ich z. B. die Schaffung der widerspruchsvollen Zahl δ' im Richardschen Paradoxon oder auch die der Ordnungszahl W — obschon Dedekinds Ausspruch nur den endlichen Zahlen galt, — *unterlassen.* Nun glaube ich zwar gezeigt zu haben, daß dem nicht so ist. Aber

es verlohnt sich trotzdem, auf den Sinn des Wortes von der freien Schöpfung etwas näher einzugehen.

25. Da Dedekind selbst den Schöpfungsprozeß völlig in die Logik verlegt, scheint „Geist" hier so viel zu bedeuten, wie „Verstand". Und da der Verstand, als Vermögen, Begriffe zu bilden und im Urteil zu verknüpfen, durchaus willkürlich verfährt, so scheint das Wort *„frei"* mit *„willkürlich"* gleichbedeutend zu sein. Man darf wohl annehmen, daß Dedekind wie auch Weber mit bewußter Absicht die scharfe Ausdrucksweise *nicht* gewählt haben:

„Die Zahlen sind willkürliche Schöpfungen des Verstandes".

Aber diese Mißdeutung scheint zweifellos dem Verbot von gewissen Definitionen zugrunde zu liegen.

26. Es bedarf wohl keiner weiteren Ausführung, daß die vorbildliche Objektivität der Mathematik gerade darin ihren Grund hat, daß die bewußte und unbewußte Willkür des Verstandes für sie in einem Maße ausgeschaltet ist, das keine andere Wissenschaft erreicht. Ob ich die Wahrheit überhaupt suchen *will*, ob im speziellen die mathematische, und diese wieder in Geometrie, Arithmetik, Mengenlehre oder wo sonst, das ist freilich Sache meines *Willens*. Aber die Wahrheit, die ich finde, samt den Gegenständen, von denen sie handelt, ist meiner Willkür entrückt und kann darum objektiv von jedermann nachgeprüft werden.

Wo die Willkür in die Mathematik hereinspielt, wie wir es beim Begiff der „Definierbarkeit" gesehen haben, da versagt sofort die mathematische Schlußweise; und wo Willkür eine Definition, einen Schluß verbieten will, richtet sich die Waffe sofort gegen die eigensten Interessen dessen, der sie benutzt.

27. Willkürlich ist nur der Name und das Zeichen, das wir einer Zahl beilegen. Und ein gewecktes Kind, das bis 10 zählen gelernt hat und „noch nicht weiß, *wieviel* 7 und 5 gibt", weiß im allgemeinen bloß nicht, welchen *Namen* die neue Zahl hat. Überhaupt sind mathematische Köpfe unter den Schülern auch ohne Lehrbuch stets dem Lehrstoff, besonders im Rechenunterricht, voraus. Schaffen sie sich ihre Zahlen willkürlich? Und schaffen sich verschiedene Völker verschiedene Zahlen, wie sie sich verschiedene Sprachen, Weltanschauungen und Religionen schaffen?

28. Diejenige Funktion des menschlichen Geistes, die die Zahlen schafft, ist offenbar der Willkür selbst entrückt. Sie greift ferner der Erfahrung in weitestem Umfange vor; es ist zum mindesten fraglich[1]),

1) Gesinnungsgleiche Anhänger Kants mögen es entschuldigen, daß ich mich so vorsichtig ausdrücke, um keine erkenntnistheoretischen Diskussionen uferlosen Umfangs zu entfesseln.

ob sie sich überhaupt auf irgendwelche Erfahrung anders stützt, als insofern sie der Anregung bedarf, um in das Bewußtsein zu treten. Sie liegt endlich außerhalb des reflektierenden Bewußtseins, denn dieses findet die Zahlen bereits vor, wenn es sich auf sie richtet. Und alle Logik, die nachträglich diesen Auffindungsprozeß zergliedert, stößt wieder auf irreduzible Begriffe, die sich nicht in rein logische Bestandteile auflösen lassen. Schien es unlängst so, als sei diese Auflösung gelungen, so kam doch sofort die Ernüchterung der Paradoxien nach, um uns wieder daran zu erinnern, daß Kant noch nicht veraltet ist.

29. Unser „Geist" besitzt also Funktionen, die von der Erfahrung logisch unabhängig, aber auch nicht dem *Verstande* angehörig, frei von jeder Willkür selbsttätig wirken. Jakob Friedrich Fries[1]) hat für das Vermögen dieser Tätigkeit das Wort „*Vernunft*" angewandt und damit eine, im Sprachgebrauch des täglichen Lebens bereits vorhandene, feinfühlige Unterscheidung wissenschaftlich klargestellt und festgelegt. Arbeitet der *Verstand willkürlich*, so schafft die *Vernunft* ihre Wahrheiten *selbsttätig*. Sagen wir daher:

„*Die Zahlen sind selbsttätige Schöpfungen der Vernunft*",

so treffen wir damit noch alles, was Dedekind und Heinrich Weber sagen wollten, wir unterbinden aber Auslegungen und Mißdeutungen, die die mathematischen Wahrheiten der Willkür preisgeben. Denn „*frei*" kann sowohl „*selbsttätig*" wie „*willkürlich*", „*Geist*" sowohl „*Vernunft*" wie „*Verstand*" bedeuten.

VIII.

30. Der Vollständigkeit halber muß noch gesagt werden, daß der Zahlbegriff nicht das einzige ordnende Prinzip ist, welches in der Vernunft seinen Ursprung hat. Außer der Raum- und Zeitanschauung gehören nach Fries auch die aus den Kantschen Kategorieen entspringenden metaphysischen Grundsätze zu den Erkenntnissen der Ver-

1) J. F. Fries wurde 1773 in Barby geboren, war 1801—04 Privatdozent in Jena, 1805—16 Professor der Philosophie (seit 1812 auch der Physik) in Heidelberg. 1816 nach Jena zurückgekehrt, wurde er wegen seiner Teilnahme am Wartburgfest 1819 suspendiert, aber 1824 auf Betreiben Karl Augusts als Professor der Mathematik und Physik wieder angestellt. Er starb 1843. Um das Lebenswerk dieses bedeutenden Mannes der unverdienten Vergessenheit zu entreißen, begründeten seine Schüler Apelt, Schleiden, Schlömilch (der Mathematiker) und Schmidt die „Abhandlungen der Fries'schen Schule", von denen zwei Hefte (1847 und 1849) erschienen. Die von den den Romantikern verschuldete Zerfahrenheit der Fachphilosophie und die daraus folgende Verachtung aller Philosophie auf Seiten der Naturwissenschaft, ferner die politischen Zustände waren die Ursache, daß die Abhandlungen damals wieder eingingen.

nunft. Und wie der Zahlbegriff sind ja auch diese, besonders das Kausalgesetz, neuerdings zu den willkürlichen Festsetzungen gerechnet worden. Ich will nun nicht auf philosophisches Detail eingehen, um diesen sogenannten „Konventionalismus“ zu widerlegen, sondern ich will nur auf einige seiner Konsequenzen hinweisen, die ganz analoge Gefahren, vielleicht aber viel größeren Umfanges, in sich bergen, wie die Auffassung der Existenz der Zahlen als einer von meiner Willkür abhängigen Sache.

31. Nur kurz sei vorausgeschickt, daß die Erklärung des Kausalgesetzes als einer *zweckmäßigen* Konvention einen doppelten Zirkel einschließt. Der Begriff des Zweckes ist bekanntlich ohne den der Ursache sinnlos, denn der Zweck ist die vorausgewollte *Wirkung*. Den Begriff der Ursache zu einem bestimmten Zwecke einführen, heißt also, ihn voraussetzen. Sodann aber soll der Zusatz „zweckmäßig“ die Auffassung der „Konvention“ als einer rein willkürlichen unterbinden. Damit aber wird die Willkür nicht beseitigt, sondern lediglich in die *gewollte* Wirkung verlegt; ob etwas zweckmäßig ist, kommt darauf an, welchen *Zweck* ich verfolge, und diesen festzusetzen liegt in meiner Willkür.

32. Neuerdings hat Herr Dingler[1]) eine Darstellung des logischen Aufbaus der wissenschaftlichen Grundgesetze gegeben, bei der das Kausalgesetz als reine Festsetzung erscheint: „Wir kommen überein, in allen Fällen, wo das betreffende Gesetz [ein aus einem speziellen Falle nach dem Satz vom Grunde konstruiertes Naturgesetz] in der Beobachtung nicht zu gelten scheint, seine Geltung dadurch *zu urgieren*, daß wir das Nichtgelten *nicht dem Gesetze*, sondern *„anderen Ursachen“* zuschreiben. Oder besser: Wir wollen jedesmal, wenn ein einmal festgesetztes Gesetz eine Ausnahme erleidet, nicht sagen, daß jetzt das Gesetz falsch sei, sondern wir wollen sagen: *das Gesetz gilt unentwegt weiter, nur ist es hier durch eine „andere Ursache verdeckt“*. Diese andere Ursache ist dann noch zu bestimmen.“

Ob hiermit nur die Unmöglichkeit einer empirischen Widerlegung des Kausalsatzes demonstriert werden soll, oder ob dieser selbst als willkürliche Festsetzung nachgewiesen sein soll, das geht nicht ganz klar aus Herrn Dinglers Ausführungen hervor. Er selbst betont ausdrücklich das rein methodisch-formale seiner Synthese und lehnt jede Untersuchung über phylogenetische oder ontogenetische Entwicklung der Erkenntnis ab. Im Schlußwort dagegen steht: „Es *scheint*, daß alle „unmittelbar einleuchtenden Sätze“ unserer Wissenschaft auf reine Festsetzungen zurückzuführen sind“.

1) Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften insbesondere der mathematischen. München, bei Th. Ackermann. 1907.

33. In den „Annalen der Naturphilosophie“, Bd. VI, stellt Herr Philipp Frank[1]) folgende These auf: „Das Kausalgesetz, das Fundament jeder theoretischen Naturwissenschaft, läßt sich durch Erfahrung weder bestätigen noch widerlegen, aber nicht aus dem Grunde, weil es eine a priori denknotwendige Wahrheit wäre, sondern weil es eine reine konventionelle Festsetzung ist.“ Und nach Durchführung seines „Beweises“ kommt er zu dem noch schärferen Ausspruch, daß „Erfahrung einen Rahmen ausfüllt; ... nur daß die alten Philosophen[2]) diesen Rahmen für ein notwendiges Gewächs der menschlichen Organisation hielten, während wir in ihm ein Erzeugnis menschlicher Willkür erblicken.“

Die Argumentation, die hierbei angewandt wird, beschränkt sich auf wissenschaftliche Beispiele und zeugt damit vor allem von jener im schlechten Sinne „akademischen“ Überschätzung der wissenschaftlichen Erfahrung als einer *qualitativ* von den Erfahrungen des täglichen Lebens verschiedenen Erkenntnis. Durch ihre methodische Ausbildung ist gewiß die wissenschaftliche Erfahrung geeigneter als die viel flüchtigere des Tages, einer Zergliederung und Prüfung der letzten Grundlagen aller Erfahrung als Unterlage zu dienen. Aber da die Wissenschaft auf diesen Grundlagen ebenso naiv und unbefangen aufbaut wie die Erfahrung des Praktikers, ist sie für die weitere Frage nach dem Erkenntnisgrund ihrer obersten Sätze nicht brauchbarer, im Gegenteil vielfach ungeeigneter als die gemeine Erfahrung. Und so kommt auch Frank zu seiner kühnen Schlußfolgerung lediglich dadurch, daß er die offensichtliche Willkür, die bei der Aufstellung physikalischer und chemischer *Erklärungshypothesen* den Forscher leitet und leiten darf, auf das *Ziel* dieser Hypothesen überträgt. Weil ich mein Bedürfnis nach Aufsuchung von Gesetzmäßigkeiten durch willkürliche Bildung und Erweiterung von Begriffen, wie des Zustandes[3]), befriedigen kann, darum soll dieses Bedürfnis selbst ein Erzeugnis meiner Willkür sein.

34. Ein Beispiel des täglichen Lebens führt derartige Schlußweisen mit einer Sicherheit ad absurdum, wie sie von wissenschaftlichen Theorien kaum geboten werden kann. Ich höre z. B. nachts ein Geräusch unter meinem Bette und fahre auf. Von naheliegenden Möglichkeiten schwirren mir zahlreiche durch den Kopf. Eine Maus hat geknabbert; ein Luftzug hat ein Stück Papier bewegt; mein Hund ist im Zimmer;

1) Kausalgesetz und Erfahrung. S. 441—450.

2) Kant ist also auch ein alter, soll wohl heißen veralteter Philosoph.

3) Mit diesem Begriff wird übrigens in der genannten Arbeit eine stilgerechte „Quaternio terminorum“ verübt.

ein Einbrecher hat sich eingeschlichen; ich habe nur lebhaft geträumt; vielleicht bin ich auch, ohne es zu wissen, fieberkrank und habe Halluzinationen. Je nachdem, ob ich Papier im Zimmer herumfahren lasse und bei offenem Fenster schlafe, einen Hund halte, mich vor Mäusen oder Einbrechern fürchte, unruhig träume oder hypochondrisch bin, kann ich eine dieser Möglichkeiten oder noch andere bevorzugen und mit weitgehender Willkür mein Verhalten einrichten. Ich kann unters Bett leuchten, dem Hund pfeifen, das Fenster schließen oder als Phlegmatiker sagen: ich bin zum Nachdenken zu bequem, ich schlafe einfach weiter.

Welch ein Spielraum für meine Willkür! Er ist so groß, daß ich sogar festsetzen kann, das Geräusch habe gar keine Ursache gehabt. Denn als ich es vernahm, habe ich erst willkürlich festgesetzt, daß irgendein unbekanntes Etwas dieses Geräusch verursacht habe, und daß ich nach dieser Ursache suchen müsse!

IX.

35. Spott ist nicht immer die vielseitigste Waffe, wenn auch zumeist eine wirkungsvolle. Der Ernst der Angelegenheit ist hier für Spott allein zu groß. Zwar haben Gelehrte vom Range eines Poincaré, Dedekind, Weber sich wohlweislich gehütet, die Konsequenzen ihres „*Konventionalismus*“ auf die Spitze zu treiben. Aber was hilft die Zurückhaltung der Meister, wenn die vom naseweisen Lehrling entfesselten Besengeister das reinigende Bad wissenschaftlicher Kritik in eine Überschwemmung von Gedankenlosigkeit „verwässern“. In Anlehnung an Boltzmanns Worte gegen Ostwalds Theorie des Glückes möchte ich hier sagen: Ich bedaure meinen leichtfertigen Ton gegen die Argumentationen Franks. Denn wenn der Wissenschaft ein Faustschlag versetzt wird, der sie auf das Niveau des Dogmatismus hinabstößt, so ist es bitterer Ernst!

36. Wenn ich willkürlich festsetze, daß die Welt vor 5000 Jahren von einer der meinigen ähnlichen, nur mit entsprechend anderen Kräften ausgestatteten Intelligenz aus einem Chaos geschaffen worden ist und seit dieser Zeit ihren Gang abläuft, so stelle ich ein Dogma auf, welches zwar mit keinen Tatsachen in Widerspruch steht und stehen kann, wohl aber von der Naturwissenschaft aufs entschiedenste abgelehnt werden wird. Der Geologe und der Paläontologe werden mir ihre Funde vorweisen und und ihre Jahrmillionen herausrechnen, ich aber werde sagen: „Auf Grund meines Dogmas hat der Weltenschöpfer bei Aufsetzung der Erdkruste auf den Eisenkern, — ihr seht, ich erkenne sogar die modernsten Errungenschaften der Seismologie an, — diese plastischen Formen aus Kohle und anderem Gestein in die

Kruste eingebettet. Seine Gründe sind mir, wenn auch im einzelnen nicht bekannt, so doch durchaus verständlich, auf Wunsch nenne ich euch mehrere davon, und auch ihr tätet besser, an Stelle eurer schwindelerregenden Bilanzen euch an der Kunstfertigkeit zu freuen, von der diese Gebilde zeugen." Solche Argumentationen sind mit völliger Konsequenz durchführbar und auch durchgeführt worden.

37. Warum lehnt die Naturwissenschaft solche Theorien ab? Weil sie den kausalen Ablauf des Geschehens, das „Grundgesetz aller theoretischen Naturwissenschaft" durchbrechen. Wenn dieses aber ebensogut eine willkürliche Festsetzung ist wie eine Schöpfungslegende, welches *moralische* Existenzrecht besitzt dann die Naturwissenschaft? Ist sie um einen Deut besser als jener Scholastizismus, der sie Jahrhunderte darniedergehalten, den sie im schwersten Kampfe darniedergerungen hat? Soll das Wort: „*Wider alle Scholastik*" nichts mehr besagen als dies: „Auf zum Kampf in einer reinen Machtfrage und Kraftprobe"?

38. Natürlich kann man nicht, um dieser Folgerung zu entgehen, die willkürliche Festsetzung machen, daß das Kausalgesetz keine willkürliche Festsetzung ist. Aber gehen wir der Frage auf den Grund, woher denn unsere Überzeugung vom „Wert der Wissenschaft" und von der Unhaltbarkeit jeder Scholastik stammt, so werden wir bei den „alten" und „veralteten" Philosophen manche Antwort finden, die noch sehr des Nachdenkens wert ist[1]); wir werden sehen, daß die *Selbstachtung der Naturwissenschaft* unabänderlich mit der *Achtung vor der Philosophie* verbunden ist. Diese mit der Scholastik über Bord werfen, heißt das Kind mit dem Bade ausschütten, heißt der Naturwissenschaft die Wurzeln ihrer Kraft abgraben.

Bonn, im Februar 1908.

---

1) Sehr treffend schreibt Prof. Dr. Edmund König-Sondershausen in „Kant und die Naturwissenschaft" (Heft 22 der Monographiensammlung „Die Wissenschaft", Braunschweig, bei Vieweg, 1907), einem Buche, das allen nur dringend empfohlen werden kann, die sich für Philosophie interessieren: Es „sollten wenigstens diejenigen, die dem wissenschaftlichen Denken eine vorwiegend ökonomische Funktion zuweisen, darauf bedacht sein, daß Gedankenarbeit, die schon einmal getan ist, nicht nochmals von neuem begonnen würde, um vielleicht nur mangelhaft erledigt zu werden. Diese Gefahr liegt aber da sehr nahe, wo Naturforscher in die Erörterung erkenntnistheoretischer und metaphysischer Prinzipienfragen eintreten. Hier hat die Philosophie in bezug auf genaue Fragestellung und eingehende Diskussion der möglichen Lösungen so gründlich vorgearbeitet, daß ein einzelner auf eigene Hand den gleichen Gegenstand behandelnder Denker fast immer hinter dem bereits Geleisteten zurückbleiben wird." (S. 5.) Vgl. auch L. Nelson: Ist metaphysikfreie Naturwissenschaft möglich? Abh. d. Fries'schen Schule, Bd. II. Heft 3.

Enno Jürgens.

Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Von M. Krause in Dresden.

Am 5ten Januar 1907 starb in der Vollkraft des reifen Mannesalters der ordentliche Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in *Aachen*, Enno Jürgens.



Geboren am 30. März 1849 zu Oberstein a. d. N. besuchte Jürgens die Realschule zu *Jever*, wohin sein Vater im Jahre 1857 als Oberamtsrichter versetzt war. Als Lehrer der Mathematik hatte er sich des späteren Rostocker Physikers Matthiessen zu erfreuen, der ihn zu seinen Lieblingsschülern zählte und ihm ein fortdauerndes freundliches Gedenken bewahrte. Nach einjähriger Unterbrechung des Schulunterrichtes trat er zum Gymnasium seiner Vaterstadt über, das er Ostern 1869 mit dem Zeugnis der Reife verließ.

Im Sommersemester desselben Jahres bezog er die Universität *Heidelberg*, um sie erst im Jahre 1873 nach erfolgter Promotion zu verlassen. Die Heidelberger Hochschule erfreute sich in jenen Jahren einer Zeit besonders hoher Blüte, auf einer ganzen Anzahl von Gebieten wirkten hervorragende Männer, insbesondere waren auf dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Gebiete seit längeren Jahren die Professoren Bunsen, Helmholtz und Kirchhoff tätig. Zu ihnen trat im Jahre 1869 Professor Koenigsberger, welcher sehr bald neben Kirchhoff eine besondere Anziehungskraft auf die Studierenden

der Mathematik ausübte. Wirkte der letztere durch die ruhige, klare und sorgsame Art seines Vortrages, so riß der erstere durch die frische, durchsichtige und zündende Art seiner Vorlesungen seine Zuhörer in fortdauernder Begeisterung mit sich. Die Zahl der Zuhörer war nach dem heutigen Maßstab gemessen keine zu große, wohl aber befanden sich unter ihnen eine Anzahl strebsamer Jünglinge aus den verschiedensten Ländern, die sich später hochgeachtete Namen in ihrer Wissenschaft erworben haben wie die Physiker Eotvös, Schuller, K. Onnes, die Mathematiker König, Köpcke, Maschke, Pringsheim, Rethy, Rausenberger u. a. In diese geistig bewegte Atmosphäre trat Jürgens und stand bald völlig unter dem Banne der Vorlesungen von Kirchhoff und Koenigsberger, denen er mit größtem Fleiße, ja mit einer gewissen Andacht folgte. Der große Einfluß derselben hat ihn nie verlassen, stets hat er sich mit größtem Danke seiner damaligen Lehrer erinnert, und als im Jahre 1886 die Heidelberger Universität das 500jährige Jubiläum feierte, da war er es, der zum Zeichen dieses Dankes im Namen der technischen Hochschule zu *Aachen* seiner geliebten *Ruperto-Carola* eine Festschrift widmete.

Daneben verbanden ihn rege persönliche Beziehungen mit einer Anzahl gleichstrebender junger Männer, darunter mehrerer der vorhin genannten. In jener Zeit war es, wo auch ich den Dahingegangenen kennen lernte. Ich fand in ihm einen frohsinnigen, lebensfrischen treuen und zuverlässigen Gefährten, der mit gleicher Begeisterung die Schönheiten des Ortes wie seiner Wissenschaft in sich aufnahm. Die freundschaftlichen Beziehungen, die uns damals miteinander verbanden, haben bis an das Lebensende von Jürgens gedauert, sie sind es, die mich zu den folgenden Zeilen veranlassen, obgleich ich in den letzten Jahrzehnten dem Verewigten an den Stätten seiner Wirksamkeit nicht habe nahestehen können.

Im Jahre 1873 bezog Jürgens die Berliner Universität, wo er wiederum die glücklichsten Verhältnisse antraf. Weierstraß und Kronecker standen damals auf der Höhe ihres Ruhmes. Seit Jahren kamen die Jünger der Mathematik nach *Berlin*, um der reichen Wissensschätze, welche die Vorlesungen der genannten Meister darboten, teilhaftig zu werden. Auf Jürgens wirkten vor allem die funktionentheoretischen Vorlesungen von Weierstraß und gaben ihm in Fortsetzung der Heidelberger Studien die Grundlage seines mathematischen Denkens, der er sein Leben lang treu geblieben ist. In dem blühenden mathematischen Verein der Universität fand er daneben reiche weitere persönliche Anregung und Förderung.

Am Ende des Jahres 1874, als er sich gerade zum Staatsexamen

melden wollte, gab Weierstraß ihm den Rat, sich in *Halle* zu habilitieren. Jürgens folgte demselben. Heine ebnete ihm in liebenswürdigster Weise die Wege und übergab ihm für das Sommersemester 1875 ein größeres Kolleg über elliptische Funktionen, das er ursprünglich auf seinen Namen angezeigt hatte. Unter solchen Umständen konnte Jürgens mit 16 Zuhörern sein Lehramt beginnen.

Sein Aufenthalt in Halle dauerte bis zum Ende des Wintersemesters 1882/1883. Da ihm ein Staatsstipendium verliehen wurde, sah er sich zu einer größeren Lehrtätigkeit veranlaßt, als sie im allgemeinen bei einem Privatdozenten üblich ist. Seine Vorlesungen erstreckten sich im wesentlichen auf die höhere Analysis, inkl. der Differentialgleichungen und die analytische Geometrie — seine Lehrerfolge können nach den mir von Herrn Gutzmer freundlichst zur Verfügung gestellten Listen als recht erfreulich bezeichnet werden, da die Zahl der Zuhörer bis zu 38 im S. S. 1882 stieg. So große Freude Jürgens an seiner Lehrtätigkeit hatte, so klagte er doch bisweilen über das große Maß von Zeit und Kraft, die sie beanspruchten — es blieb ihm zu eigenen Arbeiten nicht die gewünschte Muße.

Vorübergehend war Jürgens auch Lehrer an der Latina der Hallenser Franckeschen Stiftungen.

Mit besonderer Liebe und Dankbarkeit gedenkt er in den Briefen, die aus jener Zeit stammen, des großen Einflusses, den die Persönlichkeit und die Arbeiten von Cantor auf ihn machten. Dieser Einfluß zeigte sich auch bei seinen Arbeiten, da er während des Hallenser Aufenthaltes seine eigenen Untersuchungen auch auf die Mengenlehre ausdehnte.

Im Frühjahr 1883 erhielt Jürgens einen Ruf an die technische Hochschule in *Aachen*. Nach dem Tode von Hattendorf wurde neben der von letzterem bekleideten ordentlichen Professur in *Aachen* eine Dozentur für Mathematik eingerichtet, um das Abhalten regelmäßiger Repetitoria für Elementarmathematik und seminaristischer Übungen sowie eine günstigere Gliederung des Lehrstoffes zu ermöglichen. Die ordentliche Professur erhielt Stahl, die Dozentur wurde Jürgens übertragen, wobei er sich wieder einer Empfehlung von Weierstraß zu erfreuen hatte. Nach dem Fortgang von Stahl im Jahre 1885 übernahm Jürgens zunächst provisorisch im W. S. 1885/1886 dessen Vorlesungen. Zu Ostern 1886 trat v. Mangoldt als ordentlicher Professor in den Lehrkörper der technischen Hochschule ein, während sehr bald darauf die bisherige Dozentur von Jürgens in eine etatsmäßige Professur verwandelt wurde. Letzterer übernahm nunmehr die Vorlesungen über höhere Analysis, um sie neben den andern schon genannten in regelmäßigem Turnus mit v. Mangoldt weiterzuführen.

Damit hatte er das ersehnte Ziel erreicht und diejenige Lebensstellung errungen, die er bis an sein Lebensende innegehabt hat.

Im Jahre 1898 trat noch eine Erweiterung seiner Lehrtätigkeit ein, da er nach Angliederung eines zweijährigen Jahreskursus über Handelswissenschaften an die technische Hochschule gemeinsam mit v. Mangoldt ein Kolleg über Versicherungsmathematik und kaufmännisches Rechnen übernahm. Im Jahre 1903 trat er in das Kuratorium der Handelshochschule ein.

Auch in Aachen legte Jürgens das Schwergewicht seiner Tätigkeit auf das Dozieren, seine Freude hieran war eine immer größere, und man darf wohl sagen, daß er als Lehrer der Jugend sein größtes Glück und seine größte Zufriedenheit gefunden hat. So schreibt Herr Heffter: „Als Dozent war Jürgens ein begeisterter Vertreter seiner Wissenschaft, die er seinen Zuhörern so anschaulich und lebendig als möglich zu übermitteln suchte. Die heilige Flamme der Begeisterung leuchtete ihm noch aus den Augen, wenn er nach beendeter Vorlesung aus seinem Auditorium heraustrat".

Denselben Eindruck hatte ich aus den Gesprächen mit ihm. Wiederholt hob er mir gegenüber hervor, daß es ihn immer aufs tiefste ergriffe, wenn er die reinen und klaren Lehren der höheren Mathematik seinen Hörern entwickeln könne, daß ihm dann immer wieder von neuem die Schönheit derselben in überwältigender Weise vor Augen trete. Da er es überdies in hervorragender Weise verstand, auf die technischen Bedürfnisse seiner Zuhörer die gebührende Rücksicht zu nehmen, so war er bei den letzteren sehr beliebt. Seine Lehrtätigkeit hat daher reichen Segen gebracht, und seine Schüler erinnern sich mit Vorliebe der anregenden Belehrung, die sie bei ihm gefunden.

Am Ende des Jahres 1906 erkrankte er und entschlief trotz der treuesten Pflege sanft und unerwartet am 5ten Januar v. J. tief betrauert von den Seinigen, seinen vielen Schülern und seinen Freunden, die ihn wegen seiner Geradheit und Aufrichtigkeit, seiner Liebe zur Wahrheit und seiner Gegnerschaft gegen alles Unwahre und Unlautere hochschätzten und wert hielten.[1])

Die literarische Tätigkeit von Jürgens war keine große — wohl aber zeichnen sich die vorhandenen Arbeiten durch Schlichtheit und Klarheit der Sprache sowie durch Gründlichkeit aus, und jede von ihnen hat das betreffende Wissensgebiet auf das entschiedenste geklärt und erweitert.

Seine ersten Arbeiten sind aus den Anregungen entstanden, die er im Heidelberger Seminar durch Koenigsberger erhielt. Anfang

1) Cf. Aachener Anzeiger vom 9. Januar 1907.

der siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts fesselten die grundlegenden Arbeiten von Fuchs in besonders hohem Maße die mathematische Welt. Jürgens wurde auf dieselben aufmerksam gemacht, und aus dem Studium derselben entstand seine Heidelberger Doktorarbeit aus dem Jahre 1873 und seine Hallenser Habilitationsschrift aus dem Jahre 1875, die zu gleicher Zeit im 80[ten] Bande des Crelleschen Journals erschien.

Die letztere zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile wird die Natur der Integrale einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{d x^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \cdots p_m y = 0$$

untersucht, deren Koeffizienten in der Nähe eines Punktes $x = a$ eindeutig sind und in ihm unstetig werden, und zwar insbesondere für den Fall, daß die zugehörende Fundamentalgleichung gleiche Wurzeln besitzt. Hamburger hat zuerst gezeigt, daß, falls eine Wurzel eine μ-fache ist, ihr μ Integrale zugeordnet werden können, die im allgemeinen in mehrere gesonderte Gruppen zerfallen, die miteinander in keinem Zusammenhang stehen, so zwar, daß die Relationen zwischen den Koeffizienten der mit Logarithmen behafteten Glieder immer nur innerhalb der Funktionen einer solchen Partialgruppe stattfinden.

Dieses Resultat leitet Jürgens im ersten Teile auf einem neuen und einfachen Wege ab und hat damit in der Literatur entschiedene Beachtung und Anerkennung gefunden.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit den Multiplikatoren der vorgelegten Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die auch ihrerseits einer Differentialgleichung derselben Ordnung Genüge leisten. Es wird gezeigt, daß man dem in der vorhin angedeuteten Weise gruppierten Systeme von Integralen der ursprünglichen Differentialgleichung ein ebenso geformtes System von Multiplikatoren zuordnen kann, welches gleich viele Gruppen und in jeder gleich viele Untergruppen von gleicher Anzahl der Elemente enthält. Diese Resultate sind in der Allgemeinheit der Form zuerst von Jürgens aufgestellt worden.

Jürgens ist später, im Jahre 1882, noch einmal auf die Theorie der Differentialgleichungen zurückgekommen, und zwar auf ein enger begrenztes Problem derselben.

F. Neumann hat zuerst gezeigt, daß das zweite Integral der Differentialgleichung der Kugelfunktionen:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{d z^2} - 2z \frac{d y}{d z} + n(n+1) y = 0$$

mit Hilfe des ersten in der Form dargestellt werden kann:

$$Q^n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{z-x}.$$

Heine hatte im 60ten Bande des Crelleschen Journals eine wesentliche Verallgemeinerung dieses Resultates für gewisse Kategorien von Differentialgleichungen 2ter Ordnung gegeben. Hieran knüpft Jürgens zunächst in der genannten Arbeit an und findet als Grundlage derselben den folgenden Satz.

Es sei eine Differentialgleichung nter Ordnung vorgelegt:

$$\varphi(z)\,y + \varphi_1(z)\frac{dy}{dz} + \cdots \varphi_n(z)\frac{d^n y}{dz^n} = 0,$$

in welcher die Funktionen $\varphi(z)$ ganze rationale Funktionen von z sind. Versteht man unter y ein Integral derselben und setzt in die linke Seite der Differentialgleichung, nachdem z mit x vertauscht ist, für die abhängige Veränderliche den Ausdruck ein:

$$\eta = \int_{a}^{\beta} \frac{y\,dz}{x-z},$$

so ist das Resultat eine rationale Funktion von x.

Dieser Satz gibt Anlaß zu einer ganzen Anzahl weiterer und interessanter Beziehungen, u. a. folgt aus ihm eine neue Methode, um eine ausgedehnte Klasse von linearen Differentialgleichungen, auf deren rechte Seiten rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen stehen, zu integrieren, vorausgesetzt, daß man die entsprechende homogene Differentialgleichung zu lösen imstande ist.

Einige andere Arbeiten von Jürgens beziehen sich auf die Mengenlehre.

Als Cantor den Beweis geliefert hatte, daß es möglich sei, die Punkte eines ebenen Kontinuums umkehrbar eindeutig den Punkten eines linearen Kontinuums zuzuordnen, da fühlten die Geometer, wie Schoenflies sich in seinem neuesten Werke über die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten ausdrückt, den Boden schwanken, der ihr Lehrgebäude trug. Es galt die hier entstandene Unsicherheit zu beseitigen und die Schärfe der Begriffe herzustellen. Hierzu haben zwei Arbeiten von Jürgens wesentlich beigetragen, in erster Linie eine Arbeit aus dem Jahre 1879, deren hauptsächlichste Resultate schon auf der Naturforscherversammlung in Kassel im Jahre 1878 von ihm vorgetragen worden waren.

Jürgens war der erste, der in einwandfreier Weise nachwies, daß

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 5. HEFT. MAI.

AUSGEGEBEN AM 22 JUNI 1908



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908.

Das nächste Heft wird im Juli ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

Seite

2. Abteilung.

bei der eindeutigen und *stetigen* Abbildung einer Ebene auf eine andere eine flächenhafte Umgebung in eine flächenhafte übergeht[1]), und zwar bildet die Grundlage der Untersuchung der folgende allgemeine Satz:

Wenn zwei unabhängige reelle Veränderliche x_1 und x_2 als rechtwinklige Punktkoordinaten in der Ebene aufgefaßt alle Stellen im Innern und auf einem Kreise durchlaufen, wenn von ihnen zwei andere reelle Veränderliche y_1 und y_2 eindeutig und stetig abhängen und dabei dasselbe Wertepaar y_1, y_2 zu einer endlichen Anzahl von Wertepaaren x_1, x_2 gehört, so enthält, indem auch die Veränderlichen y_1 und y_2 in einer zweiten Ebene als rechtwinklige Punktkoordinaten angesehen werden, der von den Punkten y_1, y_2 gebildete Teil dieser Ebene ein zweifach ausgedehntes Stück der Ebene, etwa die ganze Fläche eines Kreises in sich.

Für den Fall, daß dasselbe Wertepaar y_1, y_2 zu einem einzigen Wertepaare x_1, x_2 gehört, folgt das vorhin angedeutete Resultat.

Als eine weitere Folgerung ergibt sich der Satz, daß kein Teil des dreifach ausgedehnten Raumes, welcher eine Kugel ganz enthält auf irgendeinen Teil der Ebene eindeutig und stetig abgebildet werden kann. Für diesen Satz hatte Lüroth in demselben Jahre 1878, in welchem Jürgens ihn auf der Naturforscherversammlung zu Kassel vortrug, schon einen andern Beweis gegeben.

Jürgens hat seinen Satz nicht nur auf die Mannigfaltigkeitslehre angewendet — als Anwendung auf die Theorie der ganzen rationalen Funktionen ergibt sich ein neuer und einfacher Beweis dafür, daß jede algebraische Gleichung Wurzeln besitzt.

Eine zweite Arbeit von Jürgens aus dem Jahre 1899 bezog sich auf die Verallgemeinerung der für die Mengenlehre gefundenen Resultate auf Räume höherer Dimensionen.

Durch die speziellen Untersuchungen lag es nahe, im allgemeinen Falle etwa folgenden Satz als zu Recht bestehend anzusehen:

Zwei Gebilde, deren Elemente beziehentlich durch n reelle Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$ und durch m reelle Koordinaten $y_1, \ldots y_m$ in eindeutiger nnd stetiger Weise bestimmt werden, können unter sich, falls m und n voneinander verschieden sind, keine eindeutige und stetige Zuordnung zulassen. Beweise für diesen Satz waren in den Jahren 1878 und 1879 von Thomae, Netto und Cantor gegeben worden.

Jürgens weist in seiner zweiten Arbeit nach, daß diese Beweise als stichhaltig nicht angesehen werden können.

Wie großes Gewicht den Ausführungen von Jürgens in den beteiligten Kreisen zugeschrieben wurde, dürfte am besten daraus ent-

1) cf. Schoenflies S. 155.

nommen werden, daß Capelli die genannte Arbeit in das Italienische übersetzt und in das von ihm herausgegebene Giornale di Matematiche vor kurzem aufgenommen hat.

Jürgens hat sich schließlich noch in einigen Arbeiten mit der angenäherten Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen und der numerischen Berechnung von Determinanten beschäftigt, wobei das letzte Problem auf das erste zurückgeführt wird. Um ein System linearer Gleichungen aufzulösen, wird dasselbe zunächst so umgeformt daß die Diagonalglieder sämtlich positiv und die übrigen ihrem absoluten Betrage nach verhältnismäßig klein sind. Nachdem das geschehen, können die Unbekannten mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit in bequemer Weise durch eine gleichmäßig fortschreitende Rechnung ermittelt werden.

Jürgens produktive Tätigkeit ist mit den vorliegenden Arbeiten nicht abgeschlossen, indessen liegen mir hierüber eingehendere Nachrichten nicht vor — nur so viel konnte ich einer freundlichen Mitteilung von Frau Professor Jürgens entnehmen, daß er in den letzten Jahren mit der Abfassung eines zweibändigen Lehrbuches über höhere Mathematik beschäftigt war, dessen erster Band nahezu fertig vorliegt, dessen zweiter Band auch schon ziemlich weit fortgeschritten ist, und auf das er große Hoffnungen setzte. Der Tod hat ihm die Feder aus der Hand genommen und damit die Vollendung eines Werkes verhindert, das sicherlich eine Fülle von Anregungen und neuen Gedanken einem weiten Leserkreise dargebracht hätte.

Arbeiten von Jürgens.

1. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Heidelberg 1873.
2. Die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen. Crelle Band 80. 1875.
3. Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Funktionen. Leipzig 1879. (Die hauptsächlichsten Resultate dieser Arbeit finden sich schon im Tageblatt der 51ten Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte 1878.)
4. Das Integral $\int_a^x \frac{y\,dx}{x-z}$ und die linearen Differentialgleichungen. Math. Annalen 19. 1882.
5. Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme und numerischen Berechnung von Determinanten. Festschrift Aachen 1886.
6. Der Begriff der n fachen stetigen Mannigfaltigkeit. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Band 7. 1899.
7. Numerische Berechnung von Determinanten. ibidem Band 9. 1901.
8. Festrede zur Vorfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. Aachen 1903.

Neuer Beweis eines Satzes von W. Burnside.

Von I. Schur in Berlin.

Zu den wichtigsten neueren Resultaten über endliche Gruppen gehört der von W. Burnside[1]) im Jahre 1900 veröffentlichte Satz:

Jede transitive Permutationsgruppe in p Symbolen ist, wenn p eine Primzahl ist, entweder auflösbar oder zweifach transitiv.

Burnside hat diesen Satz, der als eine wesentliche Ergänzung der Galoisschen Sätze über Gleichungen von Primzahlgrad anzusehen ist, zunächst durch Betrachtungen aus der Theorie der Gruppencharaktere gewonnen. Später hat Burnside einen zweiten Beweis[2]) angegeben, bei dem er zwar von der Theorie der Gruppencharaktere keinen Gebrauch macht, aber noch gewisse Zerlegungssätze aus der Lehre von den periodischen linearen Substitutionen benutzt.

Im folgenden soll ein neuer Beweis des Satzes mitgeteilt werden, der mit wesentlich elementareren Hilfsmitteln operiert und sich auch für Vorlesungszwecke zu eignen scheint.

1. Der Ausgangspunkt meines Beweises ist ein ganz ähnlicher wie bei Herrn Burnside.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von Permutationen in n Symbolen $0, 1, \ldots, n-1$, so nenne ich die Form

$$F = \sum_{\varkappa, \lambda}^{n-1} {}_0\, a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

eine bilineare Invariante der Gruppe, wenn F jede Permutation A der Gruppe zuläßt, d. h. wenn F ungeändert bleibt, falls die Variabeln $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ und $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ *gleichzeitig* der Permutation A unterworfen werden. Führt nun A die Ziffer α in α' über, so läßt F die Permutation A stets und nur dann zu, wenn für je zwei Indizes $\varkappa$ und λ

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa'\lambda'}$$

ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar eine notwendige und hinreichende Bedingung für die zweifache Transitivität der Gruppe $\mathfrak{G}$: es muß näm-

---

1) *On some properties of groups of odd order*, Proceedings of the London Math. Soc., Vol. XXXIII, p. 174.

2) *On simply transitive groups of prime degree*, Quarterly Journal, Vol. 37 (1906), p. 215.

lich, wenn $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv sein soll, in jeder bilinearen Invariante F von $\mathfrak{G}$

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn},$$

$$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = a_{21} = \cdots = a_{n-1,n}$$

sein. Dagegen besitzt eine nur einfach transitive Gruppe auch bilineare Invarianten F, deren Koeffizienten nicht diesen Bedingungen genügen. Setzt man nun

$$E = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} x_\varkappa y_\varkappa,$$

$$J = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n-1}{}_0\, x_\varkappa y_\lambda,$$

so erscheint eine zweifach transitive Gruppe $\mathfrak{G}$ dadurch charakterisiert, daß jede bilineare Invariante von $\mathfrak{G}$ die Gestalt $aE + bJ$ besitzt, wo a und b Konstanten sind. Die bilinearen Formen $aE + bJ$ gehören aber zu jeder Gruppe als Invarianten.

Es ist noch folgendes zu bemerken. Sind

$$F = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda, \qquad G = \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

zwei bilineare Invarianten von $\mathfrak{G}$, und setzt man

$$c_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\varkappa\mu} b_{\mu\lambda},$$

so ist, wie man leicht erkennt, auch die Bilinearform

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

eine Invariante von $\mathfrak{G}$. Diese Form H bezeichnet man als das symbolische Produkt FG. Insbesondere ist auch, wenn das aus λ Faktoren bestehende „Produkt" $FF \ldots F$ mit F^λ bezeichnet wird, zugleich mit F jede Form

$$(1) \qquad a_0 F^0 + a_1 F + a_2 F^2 + \cdots + a_m F^m, \qquad (F^0 = E)$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_m$ Konstanten sind, eine Invariante von $\mathfrak{G}$. Bedeutet nun $\varphi(x)$ die ganze rationale Funktion $a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, so soll die Form (1) kurz mit $\varphi(F)$ bezeichnet werden.

2. Es sei nun $n = p$ eine Primzahl und $\mathfrak{G}$ eine transitive Gruppe. Eine solche Gruppe enthält nach dem Cauchy-Sylowschen Satze einen Zyklus P der Ordnung p, und es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$P = (0, 1, \ldots, p-1)$$

angenommen werden. Soll nun $F = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$ eine bilineare Invariante von $\mathfrak{G}$ sein, so muß F insbesondere auch die Permutation P zulassen. Daher muß F, wie leicht ersichtlich ist, die Gestalt

$$F = a_0 \sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_\varkappa y_\varkappa + a_1 \sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_\varkappa y_{\varkappa+1} + a_2 \sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_\varkappa y_{\varkappa+2} + \cdots + a_{p-1} \sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_\varkappa y_{\varkappa+p-1}$$

besitzen. Hierbei ist $y_\alpha = y_\beta$ zu setzen, falls $\alpha \equiv \beta \pmod{p}$ ist.

Man bezeichne nun die Form

$$\sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_\varkappa y_{\varkappa+1}$$

mit R; dann wird, wie man leicht erkennt,

$$\sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_\varkappa y_{\varkappa+\lambda} = R^\lambda$$

und

$$R^p = E.$$

Die bilineare Form F kann daher auch in der Gestalt

$$F = a_0 E + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_{p-1} R^{p-1}$$

geschrieben werden. Jede bilineare Invariante von $\mathfrak{G}$ ist mithin eine ganze rationale Funktion $\varphi(R)$ von R.

Die Bedingung dafür, daß F auch bei den übrigen Permutationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ ungeändert bleiben soll, besteht nun lediglich darin, daß gewisse unter den Koeffizienten a_λ einander gleich werden. Man kann sich daher auch auf die Betrachtung von bilinearen Invarianten F beschränken, bei denen die Koeffizienten a_λ rationale Zahlen sind.

3. Es sei nun $\mathfrak{G}$ nicht zweifach transitiv. Dann gehört zu $\mathfrak{G}$ mindestens eine Invariante

$$F = \varphi(R) = a_0 E + a_1 R + \cdots + a_{p-1} R^{p-1}$$

mit rationalen Koeffizienten, die nicht die Form $aE + bJ$ besitzt. Berücksichtigt man, daß

$$J = E + R + R^2 + \cdots + R^{p-1}$$

ist, so erkennt man, daß die $p-1$ Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ nicht alle einander gleich sein dürfen. Ist also ϱ eine primitive p-te Einheitswurzel, so wird die algebraische Größe $\varphi(\varrho)$ eine nicht rationale Zahl. Diese Größe möge einer irreduziblen Gleichung des Grades

$$e = \frac{p-1}{f} \qquad (e > 1)$$

genügen. Dann läßt sich nach einem bekannten Satz der Kreisteilungslehre eine ganze rationale Funktion $\psi(x)$ bestimmen, so daß $\psi[\varphi(\varrho)]$ eine f-gliedrige Gaußsche Periode wird.[1]) Es sei etwa

$$\psi[\varphi(\varrho)] = \varrho + \varrho^{\gamma} + \varrho^{\gamma^2} + \cdots + \varrho^{\gamma^{f-1}},$$

wo γ mod. p zum Exponenten f gehört. Diese Gleichung besagt nichts anderes, als daß

$$x + x^{\gamma} + x^{\gamma^2} + \cdots + x^{\gamma^{f-1}} = \psi[\varphi(x)] + \chi(x)\{x^0 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}\}$$

wird, wo $\chi(x)$ eine gewisse ganze rationale Funktion bedeutet. Diese Gleichung bleibt auch richtig, wenn man hierin für x die bilineare Form R einführt. Dann wird, da offenbar $R^{\lambda}J = J$ ist,

$$\chi(R)\{R^0 + R + \cdots + R^{p-1}\} = \chi(R) \cdot J = cJ,$$

wo c die Summe der Koeffizienten von $\chi(R)$ bedeutet. Da nun

$$\psi[\varphi(R)] = \psi(F)$$

und cJ Invarianten von $\mathfrak{G}$ sind, so ergibt sich, daß auch

$$H = R + R^{\gamma} + R^{\gamma^2} + \cdots + R^{\gamma^{f-1}} = \psi(F) + cJ$$

eine Invariante von $\mathfrak{G}$ ist.

4. Wir untersuchen nun, bei welchen Permutationen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p-1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}$$

die Bilinearform H ungeändert bleibt. Da

$$H = \sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_{\varkappa}(y_{\varkappa+1} + y_{\varkappa+\gamma} + y_{\varkappa+\gamma^2} + \cdots + y_{\varkappa+\gamma^{f-1}})$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_{\alpha_\varkappa}(y_{\alpha_\varkappa+1} + y_{\alpha_\varkappa+\gamma} + y_{\alpha_\varkappa+\gamma^2} + \cdots + y_{\alpha_\varkappa+\gamma^{f-1}})$$

ist und H durch die Permutation A in

$$\sum_{\varkappa=0}^{p-1} x_{\alpha_\varkappa}(y_{\alpha_{\varkappa+1}} + y_{\alpha_{\varkappa+\gamma}} + y_{\alpha_{\varkappa+\gamma^2}} + \cdots + y_{\alpha_{\varkappa+\gamma^{f-1}}})$$

übergeführt wird, so müssen für jeden Wert von $\varkappa$ die Zahlen

$$\alpha_{\varkappa+1},\ \alpha_{\varkappa+\gamma},\ \alpha_{\varkappa+\gamma^2},\ \ldots,\ \alpha_{\varkappa+\gamma^{f-1}}$$

mod. p betrachtet, abgesehen von der Reihenfolge, mit den Zahlen

$$\alpha_\varkappa + 1,\ \alpha_\varkappa + \gamma,\ \alpha_\varkappa + \gamma^2,\ \ldots,\ \alpha_\varkappa + \gamma^{f-1}$$

übereinstimmen.

1) Vgl. etwa H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. 1 (zweite Auflage), § 175.

Es sei nun

$$g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$$

eine ganze rationale Funktion des Grades $k < p$ mit ganzzahligen Koeffizienten, die den p Kongruenzen

$$g(\varkappa) \equiv \alpha_\varkappa \,(\text{mod. } p) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1)$$

genügt; z. B. ist

$$g(x) = -\sum_{\varkappa=0}^{p-1} \alpha_\varkappa \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}{x-\varkappa}$$

eine solche Funktion. Dann wird wegen der erwähnten Eigenschaft der Zahlen $\alpha_\varkappa$ für jeden Exponenten r

$$(2) \qquad \sum_{\mu=0}^{f-1} \{g(\varkappa) + \gamma^\mu\}^r \equiv \sum_{\mu=0}^{f-1} \{g(\varkappa + \gamma^\mu)\}^r \;(\text{mod. } p).$$

Man beachte nun, daß wegen $\gamma^{\mu f} \equiv 1$ (mod p)

$$x^f - 1 \equiv (x-1)(x-\gamma)(x-\gamma^2)\ldots(x-\gamma^{f-1}) \;(\text{mod. } p)$$

ist. Hieraus folgt, daß

$$s_\lambda = 1 + \gamma^\lambda + \gamma^{2\lambda} + \cdots + \gamma^{(f-1)\lambda}$$

kongruent f oder kongruent 0 mod. p ist, je nachdem λ durch f teilbar ist oder nicht. Ist daher $0 < r < f$, so wird

$$(3) \quad \sum_{\mu=0}^{f-1} \{g(\varkappa) + \gamma^\mu\}^r = \sum_{\lambda=0}^{r} \binom{r}{\lambda} s_\lambda \{g(\varkappa)\}^{r-\lambda} \equiv f\{g(\varkappa)\}^r \;(\text{mod. } p).$$

Man setze ferner

$$\{g(x)\}^r = h(x).$$

Dann wird nach der Taylorschen Formel

$$h(x+y) = h(x) + y\frac{h'(x)}{1!} + y^2\frac{h''(x)}{2!} + \cdots,$$

wobei zu beachten ist, daß $\frac{h^{(\lambda)}(x)}{\lambda!}$ eine Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Daher erhalten wir

$$\sum_{\mu=0}^{f-1} h(\varkappa + \gamma^\mu) = f h(\varkappa) + s_1 \frac{h'(\varkappa)}{1!} + s_2 \frac{h''(\varkappa)}{2!} + \cdots$$

$$\equiv f\left\{h(\varkappa) + \frac{h^{(f)}(\varkappa)}{f!} + \frac{h^{(2f)}(\varkappa)}{(2f)!} + \cdots\right\} \;(\text{mod. } p).$$

Aus (2) und (3) ergibt sich daher für jedes $\varkappa$ die Kongruenz

$$\frac{h^{(f)}(\varkappa)}{f!} + \frac{h^{(2f)}(\varkappa)}{(2f)!} + \cdots \equiv 0 \;(\text{mod. } p).$$

Es muß mithin die Funktion

$$\frac{h^{(f)}(x)}{f!} + \frac{h^{(2f)}(x)}{(2f)!} + \cdots$$

mod. p durch $x^p - x$ teilbar sein. Da nun der Grad dieser Funktion, falls sie nicht identisch verschwindet und $kr < p$ ist, gleich $kr - f$ wird, so ergibt sich, daß die Zahl $kr - f$ für $r = 1, 2, \ldots, f-1$ entweder negativ oder größer als $p - 1 - f$ ist; insbesondere ist $k - f$ wegen $k < p$ negativ, also $k < f$.[1]) Hieraus folgt aber leicht, daß $k = 1$ sein muß. Denn es sei s die kleinste Zahl, die der Bedingung

$$ks \geqq f$$

genügt. Wäre $k > 1$, so müßte $s < f$, also nach unserem Ergebnis

$$ks > p - 1$$

sein. Daher wäre

$$k(s-1) > p - 1 - k > p - 1 - f.$$

Wegen $e = \frac{p-1}{f} > 1$ ist aber $p - 1 \geqq 2f$, also $p - 1 - f \geqq f$. Folglich würde sich

$$k(s-1) > f$$

ergeben. Dies widerspricht aber der über s gemachten Voraussetzung.

Folglich ist $g(x)$ eine lineare Funktion, d. h. jede Substitution A der Gruppe $\mathfrak{G}$ hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \varkappa \\ a + b\varkappa \end{pmatrix}.$$

Eine solche Gruppe ist aber nach dem bekannten Galoisschen Satz stets auflösbar.

Die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik.[2])

Von FELIX KLEIN in Göttingen.

Die Bestrebungen, welche in dem Bestehen der Göttinger Vereinigung für angewandte Physik und Mathematik ihren prägnanten Ausdruck finden, sind älter als die Vereinigung selbst, aber hatten zu-

1) Für $f = 1$ ist $\alpha_{\varkappa+1} \equiv \alpha_\varkappa + 1$, also $\alpha_\varkappa \equiv \alpha_0 + \varkappa$, d. h. $k = 1$.

2) Festrede, gehalten bei der Feier des 10 jährigen Bestehens der Vereinigung am 22. Februar 1908, abgedruckt aus der Internationalen Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik vom 25. April 1908.

nächst mit allerlei Schwierigkeiten und Mißverständnissen zu kämpfen. Wenn das Ziel klar war: zwischen dem Universitätsbetriebe der exakten Wissenschaften und ihren technischen Anwendungen wieder eine Brücke zu schlagen und hierfür die Hilfe hervorragender Vertreter der Großindustrie mit heranzuziehen, so erwiesen sich die Versuche, die zur Erreichung dieses Zieles gemacht wurden, lange Zeit hindurch als vergeblich. Endlich, Neujahr 1897, erfolgte ein erster entscheidender Schritt vorwärts. Es war uns gelungen, das warme Interesse unseres jetzigen verehrten Vorsitzenden, des Herrn v. Böttinger zu gewinnen, der nach geeigneten Vorverhandlungen mit der Regierung Herrn v. Linde und mich zu einer Besprechung nach Berlin einlud, auf Grund deren der Göttinger Universität eine erste Summe von 20,000 Mark zur Gründung eines Maschinenlaboratoriums zur Verfügung gestellt wurde, dessen Einrichtung und Leitung die Regierung Herrn Mollier (damals Dozent an der Technischen Hochschule in München) übertrug. So begannen wir, Ostern 1897, mit dem Bau des ersten Pavillons unseres heutigen Instituts für angewandte Mechanik.

Aber nun kamen, wie es bei technischen Unternehmungen oder Erfindungen auch sonst zu gehen pflegt, die Anfangsschwierigkeiten. Das Prinzip ist da, nach welchem der neue Flieger sich in die Lüfte erheben soll, aber es fehlt der konstante Motor, der dauernd für die erforderliche Betriebskraft sorgt, es fehlt namentlich auch an Stabilität. Wir sollten das bald erfahren: Herr Mollier wurde noch im Sommer als Nachfolger Zeuners nach Dresden berufen, und wir mußten uns glücklich schätzen, daß Herr Eugen Meyer, Dozent an der Technischen Hochschule in Hannover, die Fertigstellung der bei uns begonnenen Einrichtung kommissarisch übernahm. Würde es uns gelingen, ihn dauernd zu uns herüberzuziehen? Dazu mußte vor allen Dingen Sicherheit für planmäßige Weiterführung des begonnenen Werkes geschaffen werden.

Und hier ist es nun, wo als rettender Genius die Göttinger Vereinigung auf dem Plane erschien. Herrn v. Böttinger war es gelungen, außer den Herren v. Linde und Kraus, die sich schon bei der ersten Spende beteiligt hatten, die Herren Kuhn, Rieppel und Wacker sowie die Firma Krupp für ein dauerndes Zusammenwirken zu gewinnen. Am 26. Eebruar 1898 fand, hier in Göttingen, die konstituierende Versammlung statt, bei der sich von seiten der Göttinger Universität Herr Kurator Höpfner und von älteren Professoren die Herren Riecke, Voigt, Wallach, Nernst und ich beteiligten, vor allen Dingen aber auch die neuernannten Leiter der in erster Linie zu entwickelnden Institutionen: Herr Eugen Meyer und Herr Descoudres, letzterer zwecks

Ausgestaltung des in den Räumen des physikalischen Instituts bereits begonnenen elektrotechnischen Unterrichts.

Ich würde die mir zur Verfügung stehende Zeit weit überschreiten müssen, wenn ich Ihnen jetzt ausführlicher schildern wollte, wie die Göttinger Vereinigung aus dem so gegebenen Anfang heraus durch allerlei Fährlichkeiten hindurch sich nicht nur hat behaupten können, sondern ständig gewachsen ist und sich immer weitere Ziele hat stecken können; Sie finden eine Reihe Angaben hierüber in der Festschrift, welche wir 1906 aus Anlaß der Eröffnung der neuen physikalischen Institute an der Bunsenstraße veröffentlicht haben. Nehmen Sie nur das Anwachsen unserer Mitgliederzahl. Eine Reihe unserer Freunde, denen wir ein treues Gedächtnis bewahren werden, sind ja bereits abgeschieden; verschiedene Professoren, die unserem Kreise angehörten, sind Berufungen nach auswärts gefolgt; aber neue werte Mitglieder in größerer Zahl sind beigetreten, so daß wir im Augenblick 26 Vertreter der Industrie und 20 Angehörige der Universität zählen, die wir alle herzlich begrüßen, ganz besonders diejenigen, welche am heutigen Tage neu zugetreten sind.

Fürwahr, ein gütiges Geschick hat alle die Zeit hindurch über uns gewaltet.

Und nun lassen Sie mich als Göttinger Professor namens meiner Kollegen vor allen Dingen dem Gefühl *lebhaftesten Dankes* Ausdruck geben, der uns gegenüber unseren Mitgliedern aus den Kreisen der Industrie, nicht minder aber auch gegenüber der Staatsregierung für weitestgehende Unterstützungen und Förderung beseelt.

Die populäre Auffassung vom Wesen der Göttinger Vereinigung, meine Herren von der Industrie, trifft einen wichtigen Punkt, aber ist doch sehr einseitig. Man hat sich die Formel gebildet, die sich durch ihre Einfachheit empfiehlt: *daß Sie das Geld geben, worüber wir dankbar quittieren, um neues zu bekommen.*

Nun ist ja kein Zweifel, daß Geld für das Gedeihen unserer wissenschaftlichen Institute außerordentlich wesentlich und notwendig ist; ich werde darauf noch zurückkommen und möchte hier vorab irgendwelchen Überzeugungen, die in dieser Hinsicht bestehen sollten, jedenfalls nichts abbrechen. Ich möchte im Bilde sagen, daß Geld für unsere Institute notwendig ist, wie das Wasser für die Landwirtschaft, und will damit zugleich der populären Meinung gegenüber die Art ihrer Hilfstätigkeit schon in etwas charakterisieren. Was der Landwirtschaft frommt, ist nicht plötzliche Wasserzufuhr, sondern eine rationelle Bewässerung, deren System man in dem Maße ausdehnt, wie es sich bewährt. So geben Sie, fortwährend weiter ausschauend, unter eingehen-

der verständnisvoller Mitwirkung an allen Einzelheiten unserer Entwicklung.

Aber damit ist Ihre Tätigkeit zu unseren Gunsten noch lange nicht erschöpft.

Ich habe Ihnen, und Ihrem Vositzenden insbesondere, des ferneren zu danken für *Ihre nie ermüdende Fürsprache* an maßgebender Stelle, die uns um so nützlicher ist, als die entscheidenden Instanzen des Staatslebens längst gewöhnt sind, hervorragenden Vertretern des praktischen Lebens williger Gehör zu leihen als uns bloßen Theoretikern.

Und doch ist das alles noch nicht das Beste, was Sie uns gewährt haben und fortgesetzt zugute kommen lassen. Dies ist, daß *Sie sich uns selbst geben* in Ihrer Wertschätzung unseres Tuns, Ihrer Freundschaft, in dem Vorbilde Ihrer weitausgreifenden, alle menschlichen Verhältnisse umfassenden, im höchsten Sinne gemeinnützigen Tätigkeit. Wir haben unter Ihrer Führung wiederholt die großartigen Stätten Ihrer Wirksamkeit besuchen dürfen, wo das pulsierende Leben der Neuzeit mit allen seinen Problemen dem Beschauer sozusagen greifbar entgegentritt. Da erfüllen uns — wie einer meiner Kollegen bei festlicher Gelegenheit in zutreffender Weise sagte — zweierlei, nur scheinbar einander widersprechende Empfindungen: *Demut* und *Stolz*. Demut, weil der stille Gelehrte diesen großen Betrieben gegenüber unmittelbar so wenig bedeutet, und Stolz doch wieder, daß wir einen gewissen Anteil an diesen Dingen haben, dem Sie durch freundliche Wertschätzung unserer Persönlichkeit beredten Ausdruck geben. Und mit neuen Gedanken gefüllt: wie sich der einzelne in das Ganze einfügt, wie wir unsere Berufstätigkeit weiter möchten entwickeln und immer fruchtbringender möchten gestalten können, kehren wir zu unserer Arbeit zurück.

Ich muß versuchen, den hohen Dank, den wir nicht minder der Staatsregierung schulden, gleichfalls in einige bezeichnende Worte zu fassen. Das vorgesetzte Ministerium hat sich nicht darauf beschränkt, die Bestrebungen der Göttinger Vereinigung durch geeignete Maßnahmen der Verwaltung fortschreitend zu unterstützen, sondern es hat darüber hinausgehend durch allseitige Weiterentwicklung der für uns in Betracht kommenden Göttinger Universitätseinrichtungen für diese Bestrebungen den denkbar günstigsten Boden bereitet. In welchem Umfange dies geschehen ist, wird auch der Fernerstehende ermessen, wenn ich angebe, daß wir im Gebiete der Mathematik und Physik 1898 über nur *fünf Ordinariate* verfügten, jetzt aber über *zehn*, und daß gleichzeitig nicht nur die von früher her bestehenden Institute sinngemäße Förderung erhalten haben, sondern daß vier neue wichtige Institute hinzugekommen sind. Es sind das zunächst diejenigen drei, für die sich unsere Göttinger

Vereinigung in erster Linie eingesetzt hat: die Institute für *angewandte Mathematik*, für *angewandte Mechanik* und für *angewandte Elektrizität.* Dazu tritt aber noch das wichtige Institut für *Geophysik*, nnd, wenn ich es hier anreihen darf, da es in unseren Interessenbereich eigentlich mit hineingehört, als fünftes das Institut für *anorganische Chemie.* Göttingen ist solcherweise, was unsere Disziplinen angeht, wieder in die vorderste Reihe der deutschen Hochschulen gerückt worden!

Dem tiefempfundenen Danke, den wir dem Herrn Minister und seinen Räten für diese Entwicklung zollen, meine ich, ohne damit anderweitigem Verdienst etwas abzubrechen, noch eine persönliche Note geben zu sollen, indem ich den Mann besondere nenne, der von Anbeginn an unser zuverlässiger Berater und unsere mächtige Hilfe gewesen ist, und der auch heute noch, wo ihn Kränklichheit gezwungen hat, von seinem hohen Amte zurückzutreten, als treuer Freund uns zur Seite steht: Exzellenz Althoff.

Ein Mann, der aus dem Großen schafft wie Althoff, schafft auch viele Gegensätze, und ich würde das, was ich zu sagen habe, nur abschwächen, wenn ich dies nicht erwähnen wollte und nicht hinzufügte, daß auch in den Kreisen unserer Universität Althoff gegenüber gelegentlich Mißstimmung anzutreffen ist. Demgegenüber werden wir von der Göttinger Vereinigung nicht müde werden, laut zu verkünden, daß wir diesen wunderbaren Mann von seiner großen, seiner schöpferischen, seiner idealen Seite haben kennen lernen, wie er die Anforderungen, welche die Neuzeit an die Hochschulen stellt, in großem Überblick umfaßt, wie ihn das Ungewohnte der dabei hervorkommenden Probleme nur anfeuert, wie er es versteht, aus dem einzelnen, dem er Vertrauen geschenkt, die höchste Leistungsfähigkeit herauszuholen und dann wieder die finanziellen und verwaltungstechnischen Schwierigkeiten, die sich der Durchführung der anzustrebenden Einrichtungen entgegenstellen, mit immer neuen Methoden schließlich doch siegreich zu überwinden. So haben wir es 1905 bei Eröffnung der physikalischen Neubauten in einer Adresse ausgesprochen, die in unserer Festschrift abgedruckt ist, und so werden wir seiner auch in Zukunft gedenken. Und damit diese Gesinnung mit dem heutigen Tage auch äußerlich verbunden bleibe, haben wir soeben in unserer Geschäftssitzung beschlossen, Althoff zu zu bitten, die höchste Ehre, die wir zu vergeben haben, die *Ehrenmitgliedschaft der Göttinger Vereinigung*, freundlichst annehmen zu wollen.

Wollen Sie mir nunmehr gestatten, hochgeehrte Anwesende, mit kurzen Worten die Ziele zu bezeichnen, welche die Göttinger Vereinigung von ihrer Gründung an verfolgt hat, die Resultate, die wir erreicht zu

haben glauben, die Aufgaben, welche wir vor uns sehen. Aus einer gewissen abstrakten Freude an Konsequenz bitte ich dabei meine Ausführungen um dieselben drei Punkte gruppieren zu dürfen, welche ich vor zehn Jahren in meinem Bericht bei der konstituierenden Versammlung unserer Vereinigung voranstellte: *Lehrerbildung, wissenschaftliche Forschung, Bedeutung unseres Vorgehens für die Gesamtuniversität.*

Das *Problem der Lehrerbildung,* d. h. der zweckmäßigen Ausbildung unserer Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik, ist in der Tat der eigentliche Ausgangspunkt für die Konstituierung der Göttinger Vereinigung gewesen. Die mächtige *Ingenieurbewegung* der neunziger Jahre, welche, allgemein zu reden, auf vollere Geltendmachung aller mit Industrie und Technik verknüpften Interessen innerhalb unseres Staatslebens hinzielte, hatte die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, daß die Ausbildung unserer Lehramtskandidaten im Laufe der Dezennien eine zu einseitig theoretische geworden war. Schon die „höheren Schulen" klagten in dieser Hinsicht über die ihnen von der Universität zuströmenden Kandidaten unserer Fächer, um so mehr aber die technischen Fachschulen, deren steigende Wichtigkeit jeder billig Denkende zugeben mußte.

Hier haben wir eingesetzt, indem wir in erster Linie an der Göttinger Universität die erforderlichen ergänzenden Unterrichtseinrichtungen schufen, bald aber weiter ausgriffen, um eine allgemeine Entwicklung in dem uns notwendig scheinenden Sinne einzuleiten. Dabei hat uns die Unterstützung der Staatsregierung nicht gefehlt, die bald mit zwei besonders wichtigen Maßnahmen hervortrat. Ich meine erstlich den Umstand, daß die neue preußische Prüfungsordnung für das Lehramtsexamen, die 1898 erschien, eine besondere Lehrbefähigung für angewandte Mathematik einführte. Ferner aber, daß 1900 im Anschluß an die sogenannte zweite Berliner Schulkonferenz das Prinzip der Gleichwertigkeit der verschiedenen Gattungen höherer Schulen proklamiert wurde, womit für die Weiterentwicklung und den Geltungsbereich des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts neue Möglichkeiten gegeben sind.

Es hieße, im hier versammelten Kreise wohlbekannte Dinge unnötig wiederholen, wenn ich schildern wollte, wie seitdem auf dem Gebiet des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts eine allgemeine Reformbewegung Platz griff, wie insbesondere die *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* eine vielgliedrige Kommission zur Bearbeitung aller einschlägigen Fragen ernannte. — Der stattliche Band, in welchem die Kommission soeben (Neujahr 1908) ihre Arbeiten zusammengefaßt hat, gipfelt in einem ausführlichen Bericht über die zweckmäßige Ausgestaltung der Hochschulausbildung unserer mathematisch-naturwissen-

schaftlichen Lehramtskanditaten (unter gleichförmiger Berücksichtigung der mathematisch-physikalischen wie der chemisch-biologischen Disziplinen). Und bereits hat sich ein großer *Deutscher Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* gebildet, der das, was die Kommission in langen Beratungen erarbeitet hat, in die Tat übersetzen will, wobei von vorne herein auf vielfaches Entgegenkommen der Regierungen gerechnet werden kann.

Ich darf dies alles am heutigen Tage erwähnen, weil die Göttinger Vereinigung an dieser ganzen Entwicklung teils direkt teils indirekt einen wesentlichen Anteil gehabt hat, und weil sie nicht müde geworden ist, die Göttinger Universitätseinrichtungen für die Ausbildungen unserer Lehramtskandidaten immer weiter zu entwickeln und im Sinne der von der Naturforscherkommission vertretenen Anschauungen zu vorbildlichen zu machen. Ein Teil der Beschlüsse, die wir soeben in unserer Geschäftssitzung gefaßt haben, liegt wieder in der hiermit bezeichneten Richtung. Damit aber Mißverständnisse, welche über diese Seite unserer Tätigkeit hin und wieder bestehen möchten, in Zukunft möglichst zurücktreten, will ich ausdrücklich hervorheben, daß wir uns bei unserem Vorgehen zugunsten verbesserter Lehrerbildung von vorne herein *von den Übertreibungen eines einseitigen Utilitarismus* immer ferngehalten haben. Wir haben neben den praktischen Seiten der Lehrerbildung die Wichtigkeit theoretischer Unterweisung immer gelten lassen, wir haben aber namentlich auch, so oft Gelegenheit war, betont, daß wir selbstverständlich Mathematik und Naturwissenschaft, wo sie an der Schule vernachlässigt sind, mehr in den Vordergrund gebracht wünschen, daß wir aber die Bedeutung anderer Unterrichtsfächer darum nicht verkennen und sehr bereit sind, uns mit Vertretern dieser anderen Gebiete über die allgemeine Hebung unserer Unterrichtsverhältnisse zu verständigen.

Wenn ich nun ferner, hochgeehrte Anwesende, von der *wissenschaftlichen Forschung* in unseren Instituten reden soll, so brauche ich hier im Universitätskreise kaum zu betonen, daß ohne solche der akademische Unterricht nicht bestehen kann, er vielmehr sofort unwürdiger Verflachung anheimfallen würde, wenn wir uns darauf beschränken wollten, nur fremde Ergebnisse zu vermitteln. Von anderer Seite aber hat man uns allerdings bei der Durchführung der erforderlicher Einrichtungen allerlei Schwierigkeiten gemacht. Es gab Eifersüchteleien mit den Technischen Hochschulen; insbesondere aber hat man gefragt, was unsere kleinen Institute gegenüber den ungeheuren Problemen der technischen Praxis überhaupt bedeuten wollen? Und es gab kluge Leute, die meinten, die Diagnose auf engen Eigennutz stellen zu sollen, als arbeiteten

wir in unseren Instituten für Patente im Interesse unserer industriellen Auftraggeber, und anders dergleichen.

Nun, wir haben geantwortet, und ich wünsche es heute zu wiederholen, weil eine genauere Kenntnis der tatsächlich vorliegenden wissenschaftlichen Verhältnisse der Natur der Sache nach wenig verbreitet ist und ohne solche nur schwer ein zutreffendes Urteil gewonnen werden kann: daß das Grenzgebiet zwischen Mathematik und Physik einerseits, Technik andererseits bei seiner großen Vielseitigkeit Inangriffnahme der Probleme von den verschiedensten Seiten verlangt, und daß der Untergrund der Universitätstradition — oder soll ich geradezu sagen: unserer Göttinger Tradition — in dieser Hinsicht so eigenartig und wertvoll erscheint, daß auch kleinere bei uns begründete Institute *etwas Spezifisches zustande zu bringen sehr wohl in der Lage sind.* Wer aber unser Vorgehen auf niedere Motive zurückführen will, der möge nachgerade hören, daß er die *vornehme* Position unterschätzt, welche die Mitglieder der Göttinger Vereinigung in Wissenschaft und Industrie einnehmen.

Vielleicht war es überflüssig, auf die alten Einwände so weit einzugehen. Haben sich doch längst die erfreulichsten Beziehungen zwischen uns und solchen maßgebenden Kreisen der Technik entwickelt, die uns früher vielleicht ferner standen. Der Direktor des Ingenieurvereins ist nun schon seit Jahren unser wertes Mitglied, und die 1899 beim Jubiläum der Berliner Technischen Hochschule begründete Industriestiftung hat mancherlei Arbeiten in unseren Laboratorien weitgehend unterstützt. Zwischen der Göttinger Universität aber und den Technischen Hochschulen hat sich ein ausgiebiger Dozentenaustausch entwickelt. Soll ich hervorheben, wieviel wir hier an Ort und Stelle den ausgezeichneten Lehrkräften und Forschern verdanken, die von Hannover zu uns herübergekommen sind? Nach anderer Seite kann ich anführen, daß es keine norddeutsche Technische Hochschule gibt, die nicht Vertreter der Mathematik oder Physik oder Mechanik von Göttingen berufen hätte. Und ich nehme an, daß man im allgemeinen Ursache hat, mit dem, was die Herren bei uns gelernt haben, zufrieden zu sein.

Kein Zweifel, daß sich diese Beziehungen, nachdem das erste breite Mißtrauen gewichen ist, immer weiter im positiven Sinne entwickeln werden. In dieser Hinsicht darf ich anführen, daß unsere bisherigen Einrichtungen eben nun durch *zwei interessante Versuchsanstalten*, die von berufenster Seite bei uns errichtet werden, vervollständigt werden sollen. Die *Motorluftschiffstudiengesellschaft in Berlin*, Ihnen allen durch das Parsevalsche Luftschiff wohlbekannt, erbaut im Anschluß an unser Institut für angewandte Mechanik ein Laboratorium, in welchem syste-

matische Luftwiderstandsversuche an Ballonmodellen ausgeführt werden sollen. *Die Marine* aber (in Verbindung mit der *allgemeinen Militärverwaltung*) errichtet bei uns eine Station für drahtlose Telegraphie, wo die Methoden der ungedämpften elektrischen Wellen, die in unserm Institut für angewandte Elektrizität ihren Ursprung genommen haben, im großen zur Prüfung und Entwicklung gebracht werden sollen. Wir werden so die Freude haben, in unmittelbarer Beziehung mit den zentralen Instanzen an der Weiterführung zweier neuester Errungenschaften der Technik in unserer Weise mit unseren Hilfsmitteln mitarbeiten zu dürfen.

Und nun die Bedeutung unseres Vorgehens für die Universität als solche!

Da ist selbstverständlich das erste, daß überhaupt eine positive Beziehung zur Technik gewonnen ist. Ich brauche nicht auszuführen, wieviel neue Lebenselemente damit unsern mathematischen und physikalischen (oder auch den chemischen und den landwirtschaftlichen) Studien zugeführt sind. Die Beziehung zur Technik interessiert sehr viel weitere Kreise der Universität. Insbesondere haben wir gern der Aufforderung maßgebender Instanzen entsprochen, allgemein orientierende Vorlesungen für die *Studierenden der Jurisprudenz und der Staatswissenschaften* einzurichten. Es ist das ein wichtiger Fortschritt zum Besseren. Aber er kann erst ganz zur Wirkung kommen, wenn schon auf der Schule, in den Jahren der jugendlichen Entwicklung, für die Auffassung naturwissenschaftlicher und überhaupt realer Vorgänge eine gewisse Grundlage gelegt wird. Ich werde aber heute Ihre Zeit nicht dafür in Anspruch nehmen dürfen, daß ich die wichtigen hier sich anschließenden Gedankenreihen weiter verfolge, was mehr eine Aufgabe des schon genannten Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht sein dürfte.

Ich möchte von viel greifbareren Dingen zu Ihnen reden. Nämlich von der *materiellen Bedrängnis der kleineren Universitäten* und von der Notwendigkeit, unsere Anstalten durch private Organisationen nach Art der Göttinger Vereinigung und sonst durch Bezugnahme von allerlei Art zu stützen. Wie sind denn die tatsächlichen Verhältnisse? Die Regierung steigert ihre Aufwendungen für die kleineren Universitäten zwar von Jahr zu Jahr, aber die Aufgaben wachsen rascher, als daß die staatliche Leistungsfähigkeit, die durch die breiten Bedürfnisse der allgemeinen Wohlfahrt in einer früher nicht gekannten Weise in Anspruch genommen sind, mitkommen könnte. Es fehlen an den kleineren Universitäten — und Göttingen macht da keine Ausnahme — *es fehlen nicht nur eine Menge Einrichtungen, welche vorhanden sein sollten, sondern viele der vorhandenen kranken an Blutarmut.* Es wäre kaum an-

gebracht, bei der heutigen Gelegenheit auf die in dieser Hinsicht vorliegenden traurigen Verhältnisse genauer einzugehen, aber die allgemeine Tatsache als solche soll scharf betont sein. Die Frage ist unabweisbar, ob wir tatenlos zusehen wollen, daß die kleineren Universitäten in ihrer Bedeutung solcherweise immer mehr herabgehen. Das darf und soll nicht sein! Denn das Studium am kleinen Platz hat in bestimmten Richtungen so viele Vorzüge vor dem in der großen Stadt, daß wir damit ein wichtiges Kulturelement verlieren würden.

Und hier gibt das Vorgehen der Göttinger Vereinigung das Beispiel, wie Abhilfe geschaffen werden kann. Möge der Staat zunächst überall wie bisher für den gleichmäßigen Unterbau sorgen. Möge er dann aber weiter die Hand reichen, wo durch *Selbsthilfe* der beteiligten Kreise der Ansatz zu weitergehender Entwicklung hervortritt! Dabei denke ich nicht nur an die Initiative einzelner Persönlichkeiten oder Gruppen, sondern ebensowohl an das Vorgehen der in Betracht kommenden öffentlichen Instanzen, der Stadt, des Bezirks, der Provinz. *Diese Initiative muß wachgerufen werden.* Dann wird jedes unserer kleinen Kulturzentren seine besonderen Einrichtungen und Leistungen aufzuweisen haben, mit denen es sich gleichwertig neben die großen stellt, und es wird, wo nicht der einzelnen kleineren Universität, so doch ihrer Gesamtheit die erforderliche allgemeine Bedeutung wiedergewonnen und auf absehbare Zeit gesichert sein!

Das Ausland bietet uns hinsichtlich der Durchführbarkeit und der Wirksamkeit des so formulierten Programms glänzende Beispiele. Und es ist gar nicht nötig, zu dem Zwecke etwa bis Amerika zu gehen, wo allerdings sehr viel Interessantes für uns zu lernen ist. Ich verweise vielmehr auf die *französischen Provinzuniversitäten*, die lange Zeit gegenüber der Präponderanz von Paris völlig zu verschwinden drohten, jetzt aber auf dem angedeuteten Wege jede in ihrer Art sich eine bemerkenswerte Bedeutung wiedererobern. Und auch in Deutschland selbst ergeben sich bei näherem Zusehen zahlreiche Ansätze in demselben Sinne. Die Göttinger Vereinigung ist nur ein besonders markantes Beispiel. Was ich empfehle, ist, daß diese verschiedenen Ansätze zu einem bewußten Programm zusammengefaßt und daraufhin systematisch weitergeführt werden. Auch wir hier in Göttingen sollen bei dem Erreichten nicht stehen bleiben, sondern unablässig weiterstreben. Nur so werden wir den erfreulichen Aufschwung, den uns das letzte Jahrzehnt brachte, zu einem dauernden machen.

Zu Pessimismus ist also kein Anlaß und für uns Mitglieder der Göttinger Vereinigung um so weniger, als ich von einem uns nahestehenden Unternehmen hier an Ort und Stelle erzählen kann, welches

die empfohlene Kooperation aller in Betracht kommenden Kreise sozusagen typisch hervortreten läßt. *Das ist die Göttinger Mechanikerschule.* Für den Fernerstehenden sei bemerkt, daß in Göttingen seit Dezennien hochentwickelte mechanische Betriebe bestehen, und daß schon seit Jahren der Wunsch hervorgetreten war, durch mehr systematische Ausbildung des jugendlichen Nachwuchses für die Weiterentwicklung dieses Gewerbes eine feste Grundlage zu schaffen. Aber es war infolge innerer Hemmungen für diese Bestrebungen eine Art Stillstand eingetreten, der durch das Eingreifen der Göttinger Vereinigung überwunden wurde. Jetzt vollzog sich die Ausgestaltung des Projekts in den letzten zwei bis drei Jahren in allergünstigster Weise, indem Staat und Stadt wetteiferten, durch weitgehende Unterstützung ihrerseits die erforderliche materielle Grundlage des Unternehmens zu sichern. Schon sind die untersten Klassen der neuen Schule eingerichtet, und bald wird sie vollausgebaut in einem neuen Gebäude ihre ganze Wirksamkeit entfalten. *Wo aber liegt* — so werden Sie fragen — *bei dieser Sache das Interesse der Universität?* Man kann zunächst antworten, daß eine leistungsfähige Feinmechanik an Ort und Stelle für alle unsere naturwissenschaftlichen Interessen in der Tat von größter Wichtigkeit ist. Aber wir denken an ein viel unmittelbareres Zusammenwirken der neuen Schule mit der Universität. Es müßte sich erreichen lassen, daß die jungen Mechaniker auf der Oberstufe der Schule, *ohne ihrem Beruf entfremdet zu werden*, in irgendwelcher Form die feinmechanischen Bedürfnisse unserer naturwissenschaftlichen Universitätsinstitute aus eigener Anschauung kennen lernen, dann aber umgekehrt, daß unsere Studierenden der Naturwissenschaft, insbesondere unsere Lehramtskandidaten, die für sie so dringend erforderliche praktische Ausbildung im unmittelbaren Verkehr mit den Mechanikern in den Lehrwerkstätten der neuen Schule finden.

Gelingt dieser Plan, so wird er bald über Göttingen hinausgreifend eine allgemein deutsche Bedeutung erlangen. Es ist aber gut, zu wissen, daß wir auch hierfür im Auslande Vorbilder finden, *wie denn die Einrichtungen für den naturwissenschaftlichen Unterricht im Auslande überhaupt vielfach den unseren vorangeeilt sind.* Deutsche Wissenschaft und deutsches Gewerbe müssen sich auf alle Weise zusammenschließen, *damit das letztere dem Auslande gegenüber konkurrenzfähig bleiben kann.* Ich spreche diesen Grundsatz um so lieber aus, als in ihm einer der tiefsten Beweggründe enthalten sein dürfte, der unsere Freunde von der Industrie bestimmt hat, der Göttinger Vereinigung beizutreten.

Doch ich kehre zur Göttinger Universität zurück, in deren Räumen wir hier tagen. Daß die Vereinigung „zur Förderung der angewandten

Physik und Mathematik" gerade an der Göttinger Universität entstand, ist kein Zufall, sondern entspricht durchaus der historischen Grundlage, auf der wir hier fußen. Wissenschaftliche Unterweisung verbunden mit der Berücksichtigung praktischer Interessen, Gründlichkeit der Forschung mit freiem Blick über die weiten Bedürfnisse des Lebens hin, das sind genau die Charakterzüge, welche der jugendlichen Georgia Augusta im 18. Jahrhundert eignen. In dieselbe Richtung weist sodann die große Tradition von Gauß und Weber aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Und wenn die zähe Art des niedersächsischen Stammes neuen Gedanken vielleicht nur langsam zugänglich ist, *so hält sie das einmal Begonnene um so unbedingter fest und läßt nicht nach, bis die volle Entfaltung erreicht ist.* So glauben wir, für die Bestrebungen unserer Vereinigung hier in der Tat den allergünstigsten Boden gefunden zu haben. Umgekehrt wird es der Vereinigung die größte Befriedigung gewähren, zum allgemeinen Gedeihen der Georgia Augusta, im Sinne zugleich des Zukunftsprogramms, das ich vorhin für die kleineren Universitäten entworfen habe, an ihrem Teile beitragen zu können. Ich meine, die heutige Festrede nicht besser schließen zu können, als daß ich im Namen der Göttinger Vereinigung ein Hoch auf die Göttinger Universität ausbringe, auf die Alma mater, die auch uns trägt und hütet; *möge sie weiter blühen und gedeihen, indem sie die ihr von alters her innewohnenden Kräfte gegenüber den wechselnden und immer vielseitiger werdenden Bedingungen der Neuzeit in immer neuer Weise glänzend zur Geltung bringt!*

Seki and Shibukawa.

By Yoshio Mikami at Ohara in Kazusa.

On the 15th of November 1907, H. M. the Emperor of Japan made honour to the memory of Shibukawa Sukezayemon and Seki Shinsuke by posthumoushy conferring on them the junior class of the fourth court rank. This extraordinary event has been born with grace and thankfulness by all men of science in Japan, because it is the first occasion of their being honoured with such a posthumous promotion. It was some time ago, that the philosophers, Itō Jinsai, Nakaye Tōju, Yamasaki Ansai and the tactician Yamaga Sokō — popular men who have ever been highly esteemed by Japan's all educated children in all times — had been honoured with the same title; but who could expect, or who had expected any promotion strewn

upon those forgotton persons, whose domain of action remains entirely neglected by all who are not especially concerned with the pursuits they had pursued? We cannot therefore be but happy in seeing the greatest of mathematicians and astronomers Japan has ever produced thus officially celebrated for their merits, — we are most happy who follow our great pioneers' pathway, especially we who pursue the way they had padded in their own days. We hope from now on, the government as well as the people of Japan should soon come to respect science and revere scientists as well as they do with patriots and loyalists. At any rate we feel it our duty to compose a short biographical notice of our great men just honoured, because we think they may deserve a mention in this place. Besides the Mathematico-physical Society in Tokyo has celebrated in the Spring of 1907 the 200 th anniversary after Seki's death, for, Seki died on the 24 th of the 10 th month in 1708. In Japan it is customary to celebrate the anniversary of one's death, not of his birth.

Seki Shinsuke Kōwa (or Takakazu) breathed his first breath at Fujioka in the Province of Kōzuke near Yedo as a younger son to a Shogunate samurai Uchiyama Hichibei; he was born in the third month of 1642, the same year when Galileo died and Newton was born. When very young, Seki was adopted by one Seki Gorozayemon and consequently he assumed his name. As a child his uncommon talent had already burst brightly forth, for only five years old, it is stated, he righty pointed out errors of calculations his elders were trying in the boy's presence. Except this one anecdote, however, we know nothing about Seki's premature careers. Nor about his life we know much. Although he is sometimes represented as a Shogunate samurai, he appears to have been in the service of the Lord of Kōshū, who later became the sixth Shogun of the Tokugawa line. Seki had first held the office of an account examiner and then that of a ceremonial officer.

According to some authorities Seki learned mathematics from Takahara, who was one of the direct pupils of Mōri, which does not however appear to be probable; for Seki lived in Yedo, while the other taught in Kyōto, three hundred miles apart in those old days when intercourse was utmostly inconvenient. In case this were not a fiction, Seki's scholarship under Takahara could not be but a nominal one. On the other hand most writers agree in representing him as a self-formed man. Which of these opinions might be true or untrue, it little signifies for us, because in any case Seki could not have been instructed anything above the instrumental process of sol-

ving numerical equations, whereas his sphere of attainment had to extend far wider.

A story tells of him that he once saw his servant assiduous in study, and being curious of the matter he inquired what the book was that he was studying. It was a Chinese treatise on mathematics, probably Chu Shih-chieh's Suang-hsiao Chi-mêng. Ingenious as he was, Seki felt interested in the subject, and learned the rudiments of the art of arithmetic from the servant, when he soon found himself versed in it, and thus pursuing his studies he was destined to make what he was.

That we may appreciate what was the real service rendered by Seki upon the mathematical development in Japan, we must first see how it had happened circumstances around when Seki made his appearance.

In the 17th century there were two sorts of mathematical instruments being used in Japan. The one was the soroban of to-day or the Chinese suang-pan, that was brought from China some time at the end of the previous century, although the exact date of its introduction is now gone lost, Mōri's story as the first Japanese who used the instrument not being reliable, as well as the story of his Chinese travel. It were perhaps merchants who had taught the use of this sort of abucus, whose origin in China is also as little known. The Suang-fa T'ung-tsung of 1692 written by Ch'êng Tai-wei, in which the use of the soroban is recorded, was early brought either by Mōri or from a different quarter, and those works like Yoshida's Jinkōki of 1627, etc., were compiled on the basis of the contents of this Chinese treatise. Seki no doubt studied it and had various influences exercised by it. But this work as well as its Japanese disguises were too powerless to lead Seki to the gigantic constructions he was to accomplish.

Another instrument then in circulation was the sangi's, or literally construed the calculating pieces, that consist of small wooden pieces of two colours, red and black, representing positive and negative quantities. This abucus had been in practice, it appears, as old as we can peep into the antiquity in China. It was introduced to Japan as early as soon after the introduction of Buddhism. The sangi arithmetic is not so convenient as the soroban affords in daily use calculations, but for solution of troublesome problems it adapts itself far better than the other. Thus the tengen-jutsu, or t'ien-yüan-shu in Chinese, that is, the method of heavenly element or monad, that was carried on a sangi board, became more and more practiced, when

mathematics began in Japan to be studied in the 17th century. This is the way of solving numerical equations, the same in principle as the well-known method of Horner.

How long the said process had been practiced in China we cannot easily tell. As it is generally believed, it has come down from the time of bussle, when the Chinese were struggling for existence against the Tartar invaders in the 13th century. The two names, Ch'in Chiu-shang and Li Yeh ever remain familiar with us as the authors of the heavenly element method, according to which higher equations of all degrees can be solved, although the same appears to have been used still earlier for equations of the second and third degrees, the former coming forth in the Chiu-shang Suang-shu, or the Arithmetical Rules in Nine Sections, that was written by Chang T'sang in the 2nd century B. C., and the latter being given by Wan Hsiao-t'ung in the beginning of the 7th century.

This process of the heavenly element is the same as Horner's method, as we have said, with the only difference that it is carried by means of calculating pieces. The Japanese employed these pieces from old times, but it was not until in the middle of the 17th century that the said process came to be studied in Japan. Chu Chih-chieh wrote in 1299 a work, Suang-hsiao Chi-mêng, that treated of the method. This work had been once lost in China, when a Korean edition was found and restored it in a later year. The book was however handed over to Japan in some way or other, and the Japanese soon found themselves eagerly devouring its contents. It was even so much studied that it appeared in reprints more than once during the time before Seki. Nay the Japanese had done more than blindly adhering to Chu's work, for Sawaguchi wrote in 1670 the Kokon Sampōki, in which he solved numerous problems by the application of the heavenly element method, when he met with double roots of an equation, although he did not happen to consider such to be legitimate but owed to some defects in the setting of the problems. The Chinese had known nothing of the sort.

Seki was born and brought up in such a time. He then studied the same art, when he found the algebraical manipulations could be simplified by writing down with symbols, and thus he came to the establishment of the so-called yendan-jutsu, or the explanation process. The questions set up in the end of Sawaguchi's work were solved by him by applying this process, and he brought out his results four years after Sawaguchi's publication. Sawaguchi, who was Seki's predecessor, is said to have gone to Seki for instruction.

In the process of the heavenly element the root of an equation is calculated digit after digit, no abridgment being executed. Seki effected such an abridgment and discovered how to deduce several digits in the root in a single operation. This is exactly the same as is done with Horner's method. But it must be taken in notice that Seki had lived a whole century before Horner.

In the theory of equations Seki made various discoveries; for example, he knew that an equation may have more than one roots, which do not necessarily restrict to positive ones; that any equation has in general as many roots as the number of its degrees is, while there are some equations where no such a maximum number of roots occur; that in this case the number of roots is always an even number less than the degree's number; etc. About these and allied subjects none of Seki's contemporaries leave any trace of research.

Not Seki succeeded only in constructing his theory of equations, he was also brilliantly successful in the establishment of a proper system of Japanese algebra. He first came with the yendan process and then founded the tenzan method. The distinction between the yendan and tenzan methods has been considered by mathematicians of old times as to imply an important signification, though as they stand before the modern mind the difference does not appear to be in so great an importance. At any rate the yendan as well as the tenzan methods both indicate algebra or rather algebraical methods. If however we are required to make a thorough distinction between these two terms, the yendan means explanation, while the other stands for a special system of algebra. In the yendan as well as the tenzan algebras, letters are employed to represent known and unknown quantities. When we reflect how troublesome the employment of letters has proved in the course of development of mathematics in the Western World, we cannot but admire Seki's skillful accomplishment of founding a written system of algebra on a ground where no previous arithmetic in a writing style existed, and moreover of introducing letters as symbols for quantities and freely using them. Indeed Seki was not the first person who used letters, for the Chinese recorded their manipulations on the sangi board by writing lines and letters, which was the very way that Seki served himself in applying for an independent written algebraical process. Notwithstanding all this, Seki's building up of a written algebra must be deemed no small success, only competent for a man of his genius.

Some of Seki's contemporaries, who did not belong to Seki's sect, and especially Miyagi Seikō, who dwelled in Kyōto, used the same yen-

dan symbols and the same algebraical proceedings as followed by Seki. It is not known whether these had been borrowed from Seki, or independently founded.

At the time when Seki was establishing his algebraical system or processes, there had existed an intercourse between Japan and Holland at the open port of Nagasaki. In those days the European algebra was already in its full sway. Why then may it not be questioned whether the tenzan or yendan algebra had been derived from its European kindred science? But such is little probable. And the fact that there had been a Japanese named Petrus Hartsingius who studied mathematics at Leyden and that there was still another person, Hatono Sōha, the physician, who returned from abroad, both contemporaries of Seki, does not appear to impend us to conclude on any influence of the European science on Seki's studies[1]). The algebra in Japan has come forth necessarily from no other hands than Seki's.

The word yendan was employed by Seki himself, while the term tenzan does not originate with him. According to tradition the tenzan algebra was called by its founder the kigen seihō, when Matsunaga, a pupil to Seki's pupil Araki, changed it for tenzan, because the feudal lord or daimyo of Nobeoka, his master, who was also versed in arithmetic, had desired so. It is true, as we know, that there is no writings of Seki that bear the title of the kigen seihō, nor any of his works remain in which a mention is made of the term under consideration. On this account some scholars would fain insist that the tenzan method was not complete in Seki's life-time, but was first finished at Matsunaga's hand or other's. Here we are not in a stand-point to enter into a further discussion, because a lack of materials leaves us in suspension.

Seki was born in 1642, that is, in the same year when Newton was born. The yenri or the circular principle, that is said to originate with Seki, is sometimes compared with the integral calculus of Newton and Leibnitz. Be this opinion proper or false, yet there reigned something congenial, we feel, between the two heroes of science, that breathed forth in the course of a same year, many and many miles apart in the farthest west and in the remotest east.

What is the circular principle that has displayed an important roll in the Japanese mathematics? In its later growth it has become a method with which numerous problems were solved and treated, such

1) Y. Mikami, Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des 17. Jahrhunderts. Bibliotheca Mathematica. III. Folge. VII. S. 364—366.

as the determination of volumes, lengths and surfaces of ellipse and ellipsoid, the intersection of two cylinders, or of sphere and cylinder, etc. But the theory before Ajima in the end of the 18th century concerned solely on the measurement of the circle, whence arose the term of yenri or the circular principle. The process usually attributed to Seki consists in finding a certain infinite series (a binomial series) and applying it in an ingenious way, finally arriving at a series that represents the square of a circular arc[1]). The process is by no means simple, and there are points that are not thorough, but the difficult paths being passed through and the final goal being attained, who cannot be but surprised to find the ingenuity of its author? Whether this process has come from Seki in actuality or has awaited for its completion the hands of his pupil Takebe Kenkō (or Katahiro), we can thereupon make no decisive conclusion at present, because the informations at hands are only meagre[2]). But in spite of all this Seki had done much in the advancement of the circular principle, it is undeniable. During the days of his predecessors, all that they could do were constrained in a mere numerical calculation, while Seki deviced a process by which a nearer approximation could be got from such values, a process that can be repeated unlimited number of times, which however he left undone for Takebe to supply. He also taught how fractional values could be obtained from the value already got in a decimal fraction. Besides Seki discovered a method of working with the length of an arc, that was given after his death in Ōtaka's Kwatsuyō Sampō, and that is very hard to understand. The value of $\pi = 355/113$ was found by Seki and given in the Kwatsuyō Sampō. This value was also published in Takebe's Kenki Sampō of 1681. It is not known whether Seki had learned of this value from the Records of the Sui Dynasty, where there is given a short notice on Tsu Ch'ungchih's (428—499) long lost precious production, the Chui-shu.

As to the method of the binomial expansion made use of in the circle measurement we are also destitute in means of definitely knowing of its origin. Being a dexterous hand in the matter of equations, it is not improbable to be attributed to Seki, yet in actuality he does not leave any thing behind him that concerns to it.

Thus if Seki could not be the unquestionable founder of the true yenri theory, yet his labours spent on the subject and the results arrived at, as far as we can know, were truly tremendous, so much so

1) P. Harzer, Die exakten Wissenschaften im alten Japan. Jahresbericht. Bd. 14. S. 314—315.

2) On this point I desire to be able to compose another essay.

that we can never dispense with his merits in the course of the development of the theory. Although his circular principle is nothing to be compared with the integral calculus in the Occidental mathematics, notwithstandingly appearing in the foremost of all Japanese mathematicians Seki well stands in a position exactly the same as Newton does in the scientific world of his country. When therefore Newton was adored almost to veneration, Seki has been looked upon always as a supernatural genius, and so he will continue as long. For, who does dare deny, Seki was a creative genius of the first rank?

The story of Seki's visit to Nara[1]), although may not be very authentic, reminds us that he might have been acquainted with some unknown authorities, which are usually taken for Tsu's Chui-shu. As we think, on the contrary, it is not also improbable he may have had some writings of Kuo Shou-ching (1230—1315), who was a great character as is shown in the composition of his own calendar system and his inventions of various astronomical instruments. Some authors make guess on Tsu's invention of an infinite series in the calculation of the circle. Should Kuo not have tried the same in course of his profoundest studies? On all this however we ever put on a doubt, and we mean nothing to disvalue Seki's performances, whatever manuscripts he might have been in possession of. We stand eternally in our admiration before the great person.

In the last place still a few words on Shibukawa Shunkai (or Harumi), who was a worthy contemporary of Seki. He was an astronomer, and his life's mission lay in the reform of a spoiled calendar. The Japanese is as a whole a courageous people, it may be known; but Shibukawa was a man of by far a dauntless and daring spirit, and so living under a despotic government, where they enjoyed no freedom of speech, and being as he was of a mean birth, he repeatedly addressed to the authorities and did not rest until he could prevail. Shibukawa may have been of a rather practical turn of mind, less scientific, — in this respect, his character widely differed from that of Seki who was a genuine scholar; he was as a Japanese gentleman a typical one, not unworth of our respect. The name of Shibukawa, it is true, is not so well known as that of the illustratious Inō Chūkei, but what does hold him short in fame of the farmer surveyor? Is it not because and only because the Japanese is a people little ob-

1) Y. Mikami, On reading P. Harzer's paper. Jahresbericht. Bd. 15, S. 256—257.

servant of science's cause? Yes, we well appreciate Shibukawa's service worthy of recommendation to the learned world.

Shibukawa Sukezayemon Shunkai was born in Kyōto in the 11th month of 1639, and he was adopted by one Yasui Santetsu, in Kawachi Province, an illustrious checker[1]) player. He therefore assumed the name of Yasui, which he afterwards substituted for Shibukawa. He himself was brought up as a checker master, on which capacity he served on the Shogunate. Thence he lived the year half in Yedo, half in Kyōto. He died in the 10th month of 1715 at the advanced age of 76.

We little know what kind of a calendar had been practiced in oldest times in Japan. Early after the introduction of the Chinese civilization the calendars brought from China were studied, and the Yüan-chia, I-fêng, T'ai-yen and other calendars were successively adopted, when at last the year 861 saw the Hsüan-ming calendar put in practice, a calendar that was computed in 822. After this time no reform was tried for centuries through. It was then natural that the public calendar did not tell good, which, however, no one could amend. It continued in this state until at the end of the 17th century, the error amounting already to two whole days.

Now learning was rising among the enlightened circle, and there were no few, — among whom we may mention Seki, — who were versed in the theory of the calendar. But not being authorised of any discussion, who could contemplate of reforming the calendar? It went on as erring as before. It was just at this juncture that Shibukawa made his appearance.

Shibukawa, being a checker master of the Shogunate, low as his situation was, had the advantage of attending in companies of powerful lords, and took good occasions of convincing them in the imminent necessity of a calendar reform. Meanwhile he had made repeated observations, and he knew well that his calendar system would answer best. But the making of the calendar was not being administered in the hands of the Shogunate but at the Imperial Court at Kyōto. He therefore addressed of his conviction to the calendar master in Kyōto, when he was not listened. It was only after his second application that he was taken into notice. Now a reform being attempted, Shibukawa was invited to Kyōto, to which the Shogun readily consented. They had however to adopt a Chinese calendar, which Shibukawa di-

1) „Go“ in Japanese, the board being provided with 19^2 ruled blanks, on which white and black checker-stones are displayed.

sputed. At last he prevailed and his calendar system was adopted in 1685, under the title of the Jōkyō calendar.

In the same year he was appointed an astronomer of the Shogunate, and then the actual authority of calendar making fell to Yedo. The office was held by his descendants to the end of the Shogunate government.

Shibukawa was a pupil to the mathematician and astronomer Ikeda, who it was that had instructed him in the new system of the calendar. On seeing the Jōkyō calendar published, therefore Ikeda made the complaints to the authorities that it was his own, not Shibukawa's, and applied to be justified. But as it had been made already public, he was only told that nothing could be remedied any more. On that account Shibukawa has been ever accused for his immorality not without cause. In any case however Shibukawa deserves the merit of being the actual reformer of the calendar.

We shall not here dwell on any further account of the labours committed by the greatest of astronomers Japan has ever produced. It will suffice to say that he wrote the Temmon Keitō or Jewel System of Astronomy that was highly valued in manuscripts, and that he was a skilled observer who added numerous stars to the list recorded by his Chinese predecessors.

Über die Approximation einer Funktion durch Polynome.

Von FRIEDRICH RIESZ in Löcse (Ungarn).

Einleitung.

Über die Annäherung einer beliebigen stetigen Funktion durch solche, die aus vorgeschriebenen linear zusammengesetzt sind, verdankt man Weierstraß zwei bereits klassisch gewordene Sätze. Der eine sagt aus, daß jede im Intervalle $(0, 2\pi)$ definierte stetige Funktion innerhalb dieses Intervalles durch eine Folge endlicher trigonometrischer Summen derart approximiert werden kann, daß die Konvergenz jener Folge für jedes innere Teilintervall $0 < a < x < b < 1$ eine gleichmäßige ist. Nach dem zweiten Satze läßt sich jede in einem Intervall definierte stetige Funktion durch Polynome gleichmäßig annähern.[1])

Beide Sätze sind seit Weierstraß auf mannigfache Art bewiesen worden. Wir heben von diesen Beweisen je einen, jene von Fejér

1) Bekanntlich stehen beide Sätze miteinander in innerem Zusammenhange.

und von Landau hervor, die einander in gewissem Sinne parallel laufen. Auszeichnende Merkmale beider Beweise sind nebst der Einfachheit der ganzen Beweisanordnung die explizite, äußerst einfache Darstellung der Annäherungsfunktionen.

Der erste Satz ist in der Beweisanordnung von Fejér[1]) als Korollar in dem Satze enthalten, daß die arithmetischen Mittel der Partialsummen der zu einer stetigen Funktion $f(s)$ gehörenden Fourierschen Reihe in jedem Intervalle $0 < a < x < b < 1$ gleichmäßig gegen die Funktion konvergieren. Explizite werden jene arithmetischen Mittel durch die Integraloperation

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \left(\frac{\sin n \frac{z-x}{2}}{\sin \frac{z-x}{2}} \right)^2 dz \tag{1}$$

definiert.

Für den Beweis des zweiten Satzes verwendet Landau in einer Arbeit, die er vor kurzem dem Circolo Matematico di Palermo vorlegte,[2]) die schon von Stieltjes und von Lerch benützten, durch die Integraloperation

$$P_n(x) = \frac{\int_0^1 f(z)(1-(z-x)^2)^n\, dz}{2\int_0^1 (1-u^2)^n\, du} \tag{2}$$

definierten Polynome. Landau zeigt, daß jene Polynome sich im Intervalle $0 < a < x < b < 1$ gleichmäßig für $n = \infty$ dem Grenzwerte $f(x)$ nähern; die $P_n(x)$ liefern somit für das Intervall (a, b) die gewünschten Annäherungspolynome. Die spezielle Wahl des Intervalles (a, b) ist bekanntlich nicht von Belang; die dadurch entstandene scheinbare Einschränkung der Allgemeinheit kann durch eine Substitution

$$x = A + By$$

beseitigt werden.

Die Resultate von Fejér und von Landau, in denen nun die betreffenden Weierstraßschen Existenzsätze als Korollare enthalten sind, beziehen sich zunächst in der Form, wie wir sie zitierten, ausschließlich auf die Annäherung stetiger Funktionen. Dagegen ergeben die Formeln (1) und (2) auch dann wohldefinierte trigonometrische Summen $S_n(x)$ resp. Polynome $P_n(x)$, wenn man die Stetigkeit der

---

1) Untersuchungen über Fouriersche Reihen (Mathematische Annalen Bd. 58, S. 51—69).

2) Erscheint in den Rendiconti des Circolo Bd. XXV.

Funktion $f(x)$ fallen läßt und an dieselben nur viel allgemeinere Forderungen, z. B. die absolute Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne stellt. Es ist nun nicht uninteressant zu untersuchen, wie sich die für unstetige $f(x)$ definierten $S_n(x)$ resp. $P_n(x)$ der Funktion $f(x)$ gegenüber verhalten.

Für die Fejérschen Summen sind die betreffenden Fragestellungen bereits erledigt. Zunächst hat Fejér selbst sein Resultat vertieft. Er setzt nur voraus, daß die Funktion $f(x)$ höchstens eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen besitzt, daß sie in jedem keine Unendlichkeitsstelle enthaltenden Intervalle im Riemannschen Sinne integriert werden kann, und daß jene Integrale bei Ausdehnung der entsprechenden Intervalle bis zu den Unendlichkeitsstellen gegen wohldefinierte Grenzwerte konvergieren. Unter diesen Voraussetznngen beweist Fejér,[1]) daß die $S_n(x)$ an jeder regulären Stelle (d. h. in jedem Stetigkeitspunkte und an jeder einfachen Sprungstelle) gegen $\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$ konvergieren; dabei ist die Konvergenz gleichmäßig in jedem Intervalle, das ausschließlich Stetigkeitspunkte enthält und auch von solchen begrenzt wird.

Lebesgue hat, nachdem er der Untersuchung statt des Riemannschen Integralbegriffes den von ihm eingeführten zugrunde gelegt hat, die Fejérschen Resultate in einem Punkte wesentlich gefördert.[2]) Zunächst bemerkt Lebesgue, daß die Fejérschen Resultate bei den Funktionen, die Fejér betrachtet, da hier die Unstetigkeitsstellen höchstens eine Menge vom Maße 0 ausmachen, mit Ausnahme einer solchen Menge überall die Konvergenz der Summen gegen die Funktion sichern. Nun lassen sich zwar die Fejérschen Resultate auf Funktionen, die im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind, ohne Schwierigkeit übertragen, doch ist ihre Tragweite hier eingeschränkt; denn eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion braucht nicht Stetigkeitsstellen oder einfache Sprungstellen zu besitzen. Hier greift nun Lebesgue ein, indem er das hinreichende Kriterium der Konvergenz der Fejérschen Summen gegen die Funktion derart erweitert, daß nun auch bei seinen Funktionen die Ausnahmsstellen höchstens eine Menge vom Maße 0 ausmachen. Das Lebesguesche hinreichende Kriterium besteht darin, daß an der Stelle x

$$\lim_{u=0} \frac{\int_0^u |\varphi(u)|\, du}{u} = 0$$

1) a. a. O., S. 56—60.

2) Recherches sur la convergence des séries de Fourier (Mathematische Annalen, Bd. 61, S. 251—280). Vgl. auch Leçons sur les séries trigonométriques, S. 92—96.

sei, wobei

$$\varphi(u) = f(x-u) - 2f(x) + f(x+u)$$

gesetzt wird; d. h. daß die Funktion $|\varphi(u)|$ für die Stelle 0 gleich sei dem Differentialquotienten ihres unbestimmten Integrals.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtige ich zu zeigen, daß die Analogie zwischen den Fejérschen Summen und den von Landau benützten Polynomen nicht nur bis an das Verhalten derselben für stetige Funktionen heranreicht, sondern daß jene Polynome auch für die weiteren betrachteten Funktionsklassen ein den Fejérschen Summen ähnliches Verhalten zeigen. Dabei gelingt es mir auch, manche der Resultate zu vertiefen; die analoge Vertiefung der entsprechenden, die Fejérschen Summen betreffenden Resultate liegt teilweise an der Hand, ist aber auch, wie ich glaube, in vollem Umfange möglich. Ich mache besonders darauf aufmerksam, daß es mir dank einer Vertiefung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz, nämlich mittels des Begriffs der stellenweise gleichmäßigen Konvergenz,[1]) gelingt, das Verhalten der Polynome an den Stetigkeitsstellen derart zu charakterisieren, daß damit auch das Verhalten in den Stetigkeitsintervallen gekennzeichnet ist.

Wir sprechen das Hauptresultat dieser Untersuchungen in folgendem Satze aus:

Ist $f(x)$ eine beliebige, im Intervalle (0,1) *definierte, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, dann konvergieren die Werte der durch Formel* (2) *definierten Polynome $P_n(x)$ mit unbegrenzt wachsendem n an jeder Stelle $x (0 < x < 1)$, für welche*

$$\lim_{u=0} \frac{\int_0^u (f(x-u) - 2f(x) + f(x+u))\,du}{u} = 0$$

ist, sicher gegen den Funktionswert $f(x)$. Gibt es überhaupt Stellen, an welchen jene Polynome nicht gegen $f(x)$ konvergieren, so ist die Menge

---

1) Ich definiere diesen Begriff wie folgt: *Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ konvergiert an der Stelle x_0 gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$, wenn es für jede beliebig kleine positive Größe δ eine Zahl $N = N(\delta)$ und eine Umgebung $U(x_0, \delta)$ der Stelle x_0 gibt, so daß für jede innerhalb dieser Umgebung enthaltene Stelle x und jede Zahl $n \geq N$*

$$|f(x) - f_n(x)| < \delta$$

ist. Wie ich später im Texte näher ausführe, folgt aus der für jede Stelle einer abgeschlossenen Menge vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz im gewöhnlichen Sinne.

derselben vom Maße 0. *An jeder Stetigkeitsstelle der Funktion* $f(x)$ *ist die Konvergenz eine gleichmäßige.*

Bezüglich jener nicht beschränkten Funktionen, wie sie Fejér betrachtet, die auf Grund einer Verallgemeinerung des gewöhnlichen Integralbegriffs integrierbar, im Lebesgueschen Sinne jedoch nicht integrierbar sind, genügt es, wenn wir auf die betreffende Bemerkung der Lebesgueschen Annalenarbeit[1]) verweisen.

Im letzten Paragraphen führt uns noch die fast triviale Abschätzung, nach welcher die Annäherungspolynome dem Werte nach zwischen der oberen und der unteren Schranke der Wertmenge von $f(x)$ liegen, zu einigen interessanten Folgerungen. Dieselben betreffen hauptsächlich die Struktur der Grenzkurve der den Polynomen entsprechenden Bildkurven. Auch hier zeigt sich eine gewisse Analogie mit den trigonometrischen Summen.

Nun sind aber jener Analogie, die wir weit genug verfolgen konnten, auch Grenzen gestellt. Es liegt dies hauptsächlich an zwei Umständen. Der eine ist das periodische Verhalten der trigonometrischen Funktionen, also auch der Fejérschen Summen, was nun für unsere Polynome nicht der Fall ist. Es fehlt aber auch das Analogon des Zusammenhanges jener Summen mit der zur Funktion gehörigen Fourierschen Reihe; dies liegt wieder an einer Tatsache, die wir in der Sprachweise der Integralgleichungen folgendermaßen aussprechen können: die Eigenfunktionen des in Formel (2) benützten Kernes

$$K_n(x, z) = \left(1 - (z - x)^2\right)^n$$

sind nicht zugleich auch Eigenfunktionen des Kernes $K_{n+1}(x, z)$.

§ 1. Hilfssätze.

Wir schicken einige spezielle Grenzwertsätze voraus:

I. Es ist für $0 < \varepsilon < 1$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\int_{\varepsilon}^{1} (1 - u^2)^n \, du}{\int_{0}^{1} (1 - u^2)^n \, du} = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\int_{0}^{\varepsilon} (1 - u^2)^n \, du}{\int_{0}^{1} (1 - u^2)^n \, du} = 1. \tag{3a}$$

1) a. a. O., S. 277.

Beweis. Formel (3) folgert Landau aus folgenden Ungleichungen:

$$\int_0^1 (1-u^2)^n du \geqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-u^2)^n du \geqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n du = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad (4)$$

$$\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du \leqq \int_\varepsilon^1 (1-\varepsilon^2)^n du < (1-\varepsilon^2)^n. \quad (5)$$

Formel (3a) folgt unmittelbar aus Formel (3).

II. Es ist für $\varrho > 0$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\int_0^1 u^\varrho (1-u^2)^n du}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} = 0. \quad (6)$$

Beweis: Es ist für jedes ε $(0 < \varepsilon < 1)$

$$\int_0^1 u^\varrho (1-u^2)^n du = \int_0^\varepsilon u^\varrho (1-u^2)^n du + \int_\varepsilon^1 u^\varrho (1-u^2)^n du$$

$$< \varepsilon^\varrho \int_0^\varepsilon (1-u^2)^n du + \int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$

woraus nach Heranziehung der Formeln (3), (3a)

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\int_0^1 u^\varrho (1-u^2)^n du}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} < \varepsilon^\varrho$$

folgt; und da der links stehende Grenzwert von ε unabhängig ist, so ist er präzise 0. Daraus folgt endlich, da die beiden Integranden stets positiv sind, auch die Richtigkeit von (6).

§ 2. Verhalten der Polynome an den Stetigkeitsstellen.

Es sei $f(x)$ irgendeine im Intervalle (0, 1) definierte, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion. Beschränktheit der Funktion wird nicht vorausgesetzt. Dagegen machen wir auf das wichtige Merkmal des Lebesgueschen Integralbegriffs, daß mit $f(x)$ auch $|f(x)|$ integrierbar ist, aufmerksam.

Wir zerlegen zunächst wie Landau:

$$J = \int_0^1 f(z)\,(1-(z-x)^2)^n\,dz = \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 = J_1 + J_2 + J_3. \quad (7)$$

Nun ist

$$|J_1| \leqq (1-\varepsilon^2)^n \int_0^{x-\varepsilon} |f(z)|\,dz \leqq (1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 |f(z)|\,dz, \quad (8)$$

$$|J_3| \leqq (1-\varepsilon^2)^n \int_{x+\varepsilon}^1 |f(z)|\,dz \leqq (1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 |f(z)|\,dz; \quad (9)$$

unter Heranziehung der Ungleichung (4) erhalten wir also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{J_1}{\int_0^1 (1-u^2)^n\,du} = 0 \quad (8a)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{J_3}{\int_0^1 (1-u^2)^n\,du} = 0, \quad (9a)$$

d. h. Konvergenz und Art der Konvergenz der Polynome an der Stelle x hängen nur von J_2, also vom Verhalten der Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x ab.

Ferner ist nach Landau

$$J_2 - 2f(x)\int_0^1 (1-u^2)^n\,du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f(x+u)-f(x))\,(1-u^2)^n\,du$$
$$- 2f(x)\int_{\varepsilon}^1 (1-u^2)^n\,du = J_4 - 2f(x)\,J_5. \quad (10)$$

Es sei nun x_0 eine Stetigkeitsstelle der Funktion $f(x)$. $\delta > 0$ sei eine beliebige positive Größe. Dann dürfen wir voraussetzen, ε sei so gewählt, daß die Funktion im Intervalle $x_0 - 2\varepsilon < x < x_0 + 2\varepsilon$ beschränkt und ihre Schwankung daselbst kleiner als $\frac{\delta}{8}$ sei. Nun gibt es zunächst zufolge (8a) eine Zahl $N_1 = N_1(\delta)$ derart, daß für jedes $n > N_1$

$$\frac{|J_1|}{\int_0^1 (1-u^2)^n\,du} < \frac{\delta}{2}$$

ist. Zufolge (9a) gibt es auch eine analog definierte Zahl $N_3 = N_3(\delta)$.

Ferner ist, wenn $M(x, \varepsilon)$ die obere Grenze von $|f(x+u) - f(x)|$ im Intervalle $-\varepsilon < u < \varepsilon$ bedeutet,

$$|J_4| \leq M(x, \varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-u^2)^n du \leq 2M(x, \varepsilon)\int_0^1(1-u^2)^n du.$$

Endlich gibt es noch, da $f(x)$ im Intervalle $x_0 - 2\varepsilon < x < x + 2\varepsilon$ beschränkt ist, und da nach (3)

$$\lim \frac{J_5}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} = 0$$

ist, eine Zahl N_5 derart, daß für jedes $n > N_5$

$$\frac{|f(x)|\, J_5}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} < \frac{\delta}{4}$$

ist.

Es sei nun N die größte der Zahlen N_1, N_3, N_5. Dann ist für $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ und für jedes $n > N$

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\frac{J}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} - f(x)\right| \leq \frac{3}{4}\delta + M(x, \varepsilon) \leq \frac{3}{4}\delta$$
$$+ 2M(x_0, 2\varepsilon) \leq \delta. \quad (11)$$

Daraus folgt zunächst

$$\lim_{n=\infty} |P_n(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

also die Konvergenz an der Stelle x_0. Nun sagt aber die Ungleichung (11) noch mehr aus. Wir erinnern daran, daß δ beliebig gewählt, ε und N aber durch δ bestimmt wurden.

Wir können unser Resultat auf folgende Weise in Worte fassen:

Es gibt für ein beliebiges $\delta > 0$ eine Zahl N und eine Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ der Stelle x_0, so daß für jedes $n > N$ und jede Stelle x innerhalb dieser Umgebung

$$|P_n(x) - f(x)| < \delta$$

ist.

Indem wir den in der Einleitung eingeführten Begriff der *stellenweise gleichmäßigen Konvergenz* verwenden, können wir unser Resultat dahin aussprechen, daß *die Polynome $P_n(x)$ an jeder Stetigkeitsstelle x_0 gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren.*

Der Landausche Satz ist in unserm Resultate als Spezialfall enthalten. In der Tat, wenn sämtliche Stellen eines Intervalles $a \leq x \leq b$

Stetigkeitsstellen sind,[1]) so können wir nach unserm Satze für vorgegebenes δ jeder Stelle des Intervalles eine entsprechende Zahl $N(x, \delta)$ und eine entsprechende Umgebung zuordnen, so daß innerhalb jener Umgebung und für jedes $n > N(x, \delta)$

$$|P_n(x) - f(x)| < \delta$$

ist.

Dann enthält aber nach dem sogenannten Borelschen Satze über Intervallmengen die Menge der sämtlichen Stellen $x(a < x \leqq b)$ zugeordneten Umgebungen eine endliche Teilmenge derart, daß man auch in der letzteren für jede Stelle x wenigstens eine Umgebung findet. Zu jeder dieser Umgebungen gehört eine kleinste Zahl $N(x, \delta)$; ist dann $N(\delta)$ die größte dieser Zahlen, so ist für jedes $x(a \leqq x \leqq b)$ und für $n < N(\delta)$

$$|P_n(x) - f(x)| < \delta;$$

d. h. die Konvergenz ist im Intervalle (a, b) gleichmäßig.[2])

§ 3. Konvergenz der Polynome an einfachen Sprungstellen.

Die Frage nach dem Verhalten der Polynome $P_n(x)$ an den Stetigkeitsstellen der Funktion $f(x)$ haben wir im vorhergehenden Paragraphen vollständig erledigt, indem wir zeigten, daß die Polynome an jenen Stellen gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren. Nun folgt aber auch, wir wollen dies nicht näher ausführen, aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge an einer Stelle, an welcher sämtliche Funktionen der Folge stetig sind, die Stetigkeit der Grenzfunktion an jener Stelle. Die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist somit nicht nur eine hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung dafür, damit die Polynome $P_n(x)$ an jener Stelle gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren. Wenn wir nun also das Verhalten jener Polynome an Unstetigkeitsstellen untersuchen wollen, so müssen wir von der Gleichmäßigkeit unbedingt absehen.

Wir erledigen zunächst kurz das Verhalten an einer einfachen Sprungstelle. Unser Resultat ist auch in dem allgemeineren, das wir im nächsten Paragraphen entwickeln werden, enthalten; wir teilen den folgenden, äußerst einfachen Beweis nur mit, weil er für Vorlesungen, die nicht bis an beliebige integrierbare Funktionen herangehen, zweckmäßig verwendet werden kann.

---

1) Die Stellen 0 und 1 werden nicht als Stetigkeitsstellen betrachtet.

2) Dasselbe gilt auch, wenn man anstatt des Intervalles (a, b) eine beliebige abgeschlossene Menge von Stetigkeitsstellen betrachtet.

Es sei x_0 eine einfache Sprungstelle der Funktion $f(x)$, d. h. eine Stelle, für welche $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$ wohldefinierte Werte sind. Wir behaupten, *daß*

$$\lim_{n=\infty} P_n(x_0) = \frac{1}{2}\{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\}$$

ist.

Es genügt, den Beweis für die spezielle Funktion

$$\varphi(x) = \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq x_0 \\ x_0 < x \leqq 1 \end{matrix}$$

zu führen. Die Funktion $f(x)$ wird nämlich durch die Formel

$$f(x) = \Phi(x) + (f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0))\,\varphi(x)$$

in zwei Bestandteile zerlegt, von denen die erste an der Stelle x_0 stetig ist, die andere die Form $c\varphi(x)$ hat. Dementsprechend spaltet sich auch das Polynom $P_n(x)$ in die Polynome $\pi_n(x)$ und $c\pi_n(x)$. Nun ist nach dem letzten Paragraphen

$$\lim_{n=\infty} \Pi_n(x) = \Phi(x_0);$$

zeigt man somit, daß

$$\lim_{n=\infty} \pi_n(x_0) = \frac{1}{2}\{\varphi(x_0 - 0) + \varphi(x_0 + 0)\} = \frac{x_0}{2}$$

ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Nun ist

$$\pi_n(x) = \frac{\int\limits_0^{x_0} z(1-(z-x)^2)^n dz}{2\int\limits_0^1 (1-u^2)^n du} = \frac{\int\limits_{-x_0}^{0} (n+x_0)(1-u^2)^n du}{2\int\limits_0^1 (1-u^2)^n du}$$

$$= -\frac{\int\limits_0^{x_0} u(1-u^2)^n du}{2\int\limits_0^1 (1-u^2)^n du} + \frac{x_0}{2}\,\frac{\int\limits_0^{x_0} (1-u^2)^n du}{\int\limits_0^1 (1-u^2)^n du};$$

somit nach (6) und nach (3a)

$$\lim_{n=\infty} \pi_n(x_0) = \frac{x_0}{2},$$

was zu beweisen war.

Will man, wie dies in Vorlesungen vorkommen kann, außer den ausnahmslos stetigen Funktionen nur noch solche heranziehen, die außer einer endlichen Anzahl einfacher Sprungstellen überall stetig sind, so kann man unmittelbar an das Landausche Resultat über Annäherung einer ausnahmslos stetigen Funktion mittels der entsprechenden Poly-

nome $P_n(x)$ anknüpfen. Die Funktion $f(x)$ läßt sich nämlich jetzt in eine überall stetige Funktion und in ein lineares Aggregat einer endlichen Anzahl der Funktion $\varphi(x)$ analog gebildeten Funktionen zerspalten. Dann ist aber die Frage über das Verhalten der Polynome an den Sprungstellen mit den obigen Ausführungen schon erledigt. Es handelt sich dann nur noch darum, die Konvergenz an den übrigen Stellen, resp. die gleichmäßige Konvergenz in den Stetigkeitsintervallen nachzuweisen. Dies kann entweder so geschehen, daß man dieselbe für die Funktion $\varphi(x)$ nachweist, was äußerst leicht geleistet wird; es genügt aber auch schon die unmittelbar an die Landausche Zerlegung (7)[1] anknüpfende Bemerkung, daß die Konvergenz und die Art der Konvergenz der Polynome an irgendeiner Stelle ausschließlich von dem Verhalten der Funktion $f(x)$ in der Umgebung jener Stelle abhängen.

§ 4. Eine hinreichende Konvergenzbedingung.

Die im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$ besitzt im allgemeinen keine Stetigkeitsstellen, wie auch keine einfache Sprungstellen. Dagegen ist die Konvergenzbedingung, die wir in diesem Paragraphen entwickeln, für jede integrierbare Funktion und für jede Stelle höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0 erfüllt. Bezüglich dieser Behauptung verweisen wir auf die Lebesguesche Arbeit, wo dieselbe für eine enger gefaßte Bedingung bewiesen wird; sie gilt a fortiori für unsere Bedingung. Damit erhalten wir den Satz, daß für jede integrierbare Funktion $f(x)$ die entsprechenden Polynome $P_n(x)$ an jeder Stelle höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0 gegen die Funktionswerte konvergieren.

Wir sprechen unsere Bedingung im folgenden Satze aus: *Ist für die durch die Formel*

$$\psi(u) = \frac{\int_0^u \psi(u)\,du}{u} = \frac{\int_0^u \{ f(x-u) - 2f(x + f(x+u) \}\,du}{u}$$

definierte, für $u \neq 0$ *sicher stetige Funktion* $\lim_{u=0} \psi(u) = 0$, *so ist für die Stelle* $x (0 < x < 1)$

$$\lim_{u=x} P_n(x) = f(x).\text{[2]}$$

1) Formel (9) bei Landau, a. a. O.

2) Die Bedingung ist sicher erfüllt, wenn x_0 eine Stetigkeitsstelle ist; sie ist aber auch für eine einfache Sprungstelle erfüllt, wenn nur daselbst

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \{ f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0) \}$$

gesetzt wird.

Beweis: Wir zerlegen wieder

$$\int_0^1 f(z)(1-(z-x)^2)^n dz = \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 = J_1 + J_2 + J_3;$$

$$J_2 - 2f(x)\int_0^1 (1-u^2)^n du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f(x+u) - f(x))(1-u^2)^n du$$

$$- 2f(x)\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du = J_4 - 2f(x)J_5\,.$$ [1]

Nun ist

$$|J_4| = \left|\int_0^\varepsilon \{f(x-u) - 2f(x) + f(x+u)\}(1-u^2)^n du\right|$$

$$= \left|\int_0^\varepsilon \psi(u)(1-u^2)^n du\right|.$$

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\left|\int_0^\varepsilon \psi(u)(1-u^2)^n du\right| = \left|\varepsilon(1-\varepsilon^2)^n \psi(\varepsilon) + 2n\int_0^\varepsilon \psi(u)u^2(1-u^2)^{n-1} du\right|$$

$$\leqq \varepsilon(1-\varepsilon^2)^n |\psi(\varepsilon)| + 2nM(\varepsilon)\int_0^1 u^2(1-u^2)^{n-1} du,$$

wo $M(\varepsilon)$ das Maximum von $|\psi(u)|$ im Intervalle $(0, \varepsilon)$ bedeutet.

Also ist nach Heranziehung der Identität

$$\int_0^1 u^2(1-u^2)^{n-1} du = \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-u^2)^n du$$

und der Ungleichung (4):

$$\frac{|J_4|}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} \leqq \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon(1-\varepsilon^2)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} |\psi(\varepsilon)| + M(\varepsilon);$$

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|J_4|}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} \leqq M(\varepsilon).$$

Indem wir nun noch die Formeln (3), (8a), (9a) heranziehen, erhalten wir

$$\limsup_{n=\infty} |P_n(x) - f(x)| \leqq \limsup_{n=\infty} \frac{|J_1| + |J_3| + |J_4| + 2|f(x)|J_5}{2\int^1 (1-u^2)^n du} \leqq \frac{1}{2}M(\varepsilon).$$

1) Vgl. die Formeln (7) und (10).

Die linke Seite dieser Ungleichung ist von ε abhängig. Da nun nach Voraussetzung $M(\varepsilon)$ für genügend kleine ε beliebig klein wird, so ist endlich präzise

$$\lim_{n=\infty} |P_n(x) - f(x)| = 0.$$

Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.

Was endlich das Verhalten der Polynome an den Stellen 0 und 1 angeht, so zeigt man auf Grund unserer bisherigen Entwicklungen ohne Schwierigkeit, daß im Falle der Stetigkeit der Funktion an jenen Stellen, oder auch unter der allgemeineren Bedingung

$$\lim_{u=0} \frac{\int_0^u (f(u) - f(0))\, du}{u} = 0,$$

resp.

$$\lim_{u=0} \frac{\int_0^u (f(1-u) - f(1))\, du}{u} = 0$$

die Werte $P_n(0)$ resp. $P_n(1)$ gegen die Werte $\frac{1}{2} f(0)$ resp. $\frac{1}{2} f(1)$ konvergieren.

§ 5. Abschätzung der Annäherungspolynome im Großen.

Anwendungen.

Die Analogie der hier untersuchten Polynome mit den Fejérschen Summen läßt sich noch weiter verfolgen. Die Entwicklungen dieses Paragraphen beruhen hauptsächlich auf der fast trivialen Tatsache, daß analog wie bei jenen Summen, auch *die Wertmenge unserer Polynome zwischen der oberen und der unteren Schranke der Funktion $f(x)$ liegt.*[1]) Dies zeigt unmittelbar die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(z)(1-(z-x)^2)^n dz &\leq \lim\sup f(z) \int_0^1 (1-(z-x)^2)^n dz \\
&= \lim\sup f(z) \int_{-x}^{1-x} (1-u^2)^n du \\
&= \lim\sup f(z) \left[\int_0^x (1-u^2)^n du + \int_0^{1-x} (1-u^2)^n du\right] \\
&\leq 2 \lim\sup f(z) \int_0^1 (1-u^2)^n du,
\end{aligned}$$

1) Bei Funktionen, die nach oben resp. nach unten nicht beschränkt sind, gelten $+\infty$ resp. $-\infty$ als obere resp. untere Schranke.

resp. die ähnliche, die untere Schranke von $f(x)$ betreffende Abschätzung.

Eine erste Folgerung, die wir aus der geschilderten Tatsache ziehen, ist die, daß für jede gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen auch die Folge der entsprechenden $n$ten Annäherungspolynome gleichmäßig gegen das der Grenzfunktion jener Folge entsprechende Annäherungspolynom konvergiert. Mit andern Worten, die durch Formel (2) vermittelte Abbildung der Mannigfaltigkeit sämtlicher integrierbarer Funktionen auf die Mannigfaltigkeit der $P_n(x)$ ist, im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz, eine stetige.

Wir schließen unsere Betrachtungen mit einer weiteren Anwendung, die sich auf das Verhalten der die Funktionen $f(x)$ darstellenden Annäherungskurven bezieht. Bekanntlich folgt auch unter der Voraussetzung, daß die $P_n(x)$ in irgendeinem Intervalle ausnahmslos gegen $f(x)$ konvergieren, noch lange nicht, daß auch die entsprechenden Kurvenbögen jene Punktmenge, die die Funktion $f(x)$ in jenem Intervalle darstellt, zur Grenzkurve haben. Jedenfalls enthält die Grenzkurve jene Bildmenge; während aber die Grenzkurve sicher perfekt und zusammenhängend ist, so ist dies für die Bildmenge nicht unbedingt der Fall[1]).

Ist nun die Funktion $f(x)$ *an einer Stelle* $x_0 (0 < x_0 < 1)$ *stetig*, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Annäherungspolynome, daß *außer dem entsprechenden Bildpunkte* $y_0 = f(x_0)$ *die Grenzkurve keinen weiteren Punkt mit der Abszisse* x_0 *enthält.* Wie schaut aber die Grenzkurve an den Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ aus? Darüber erhalten wir gewissermaßen Aufschluß, wenn wir die oben gemachte Bemerkung, daß die Werte der Annäherungspolynome zwischen der oberen und unteren Schranke (inklusive) der Funktion liegen, mit der andern, früher gemachten verknüpfen, daß das Verhalten der Polynome an einer Stelle x_0 ausschließlich von dem Verhalten der Funktion in der Umgebung von x_0 abhängt. Aus diesen beiden Tatsachen folgt, daß die Ordinaten jener Punkte der Grenzkurve, deren Abszisse x_0 ist, sicher zwischen der oberen und der unteren Grenze (inklusive) von $f(x)$ an der Stelle x_0 liegen. Dies ist nun sicher kein allzu tief reichendes Resultat, denn

1) In seiner zweiten Annalenarbeit über die Fouriersche Reihe (Mathematische Annalen, Bd. 64, S. 273—288) behandelt Fejér die analoge Frage nach der Struktur der Grenzkurve der seine Summen darstellenden Kurven, jedenfalls nur unter gewissen einschränkenden Bedingungen. Wie er mir zur Zeit des Erscheinens jener Arbeit mitteilte, hatte er kurz zuvor bemerkt, in welchem einfachen Zusammenhange diese Frage mit jener Tatsache steht, daß die Wertmenge der Summen zwischen die obere und die untere Schranke der Funktion eingeschachtelt ist.

es läßt noch für die Struktur der Grenzkurve mannigfache Möglichkeiten offen. Jedenfalls ist damit die Frage nach der Struktur jener Kurve für jede *isolierte Unstetigkeitsstelle* $x_0 (0 < x_0 < 1)$ erledigt. Man folgert nämlich in diesem Falle aus unserem Resultate, nachdem man nun das Verhalten der Grenzkurve an den benachbarten Stetigkeitsstellen kennt und auch noch die Tatsache, daß die Grenzkurve zusammenhängend sein muß, vor Augen behält, daß *die Punkte der Grenzkurve, deren Abszisse x_0 ist, präzise jene Strecke ausfüllen, deren Endpunkte die obere und die untere Grenze der Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ zur Ordinate haben.* Dasselbe folgt leicht *für jede einfache Sprungstelle* auch in dem Falle, wenn die Funktion in der Nachbarschaft derselben nicht mehr stetig ist. Jede solche Funktion läßt sich nämlich als Summe zweier Funktionen darstellen, von denen die eine an jener Stelle x_0 stetig den Wert 0 annimmt, die andere aber für jede Stelle $x < x_0$ den Wert $f(x_0 - 0)$ und für jede Stelle $x < x_0$ den Wert $f(x_0 + 0)$ besitzt. Die Richtigkeit unserer Behauptung folgt dann für beide Funktionen, also auch für ihre Summe aus unseren früheren Entwicklungen.

Schlußbemerkung.

Ähnlich, wie der Landausche Satz jenen von Weierstraß, ergeben auch unsere Resultate als Korollare entsprechende Sätze über die Möglichkeit der Annäherung einer Funktion durch Polynome. Die meisten dieser Sätze lassen sich schon, wenn auch in etwas eingeschränkter Form, aus den entsprechenden Resultaten von Fejér und Lebesgue ableiten. Jedenfalls ist nun durch unsere Resultate eine einfache explizite Darstellung entsprechender Annäherungspolynome gegeben.

Nach Abschluß meiner Arbeit während unseres gemeinsamen Kongreßaufenthaltes in Rom hat mir Fejér einen interessanten Beweis des Satzes über die gleichmäßige Annäherung einer beliebigen stetigen Funktion durch Polynome mitgeteilt. Analog wie sich aus dem Satze über die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierschen Reihe als Korollar der Satz über die gleichmäßige Annäherung einer stetigen Funktion durch endliche trigonometrische Summen ergibt, so folgert Fejér auch diesen zweiten Weierstraßschen Satz als Korollar aus einem Resultate, der die Entwicklung einer Funktion in eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Reihe betrifft. Ich beschränke mich hier darauf, dieses Resultat kurz anzudeuten; die näheren Ausführungen Fejérs erscheinen zunächst in den Berichten der ungarischen Akademie (Mathematikai és Természettudományi Értesitö). Fejérs Resultat lautet:

Man entwickle die im Intervalle (— 1,1) definierte stetige Funktion $f(x)$ auf bekannte Weise in eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Reihe, und zwar rein formal, also unabhängig davon, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Bildet man die Folge der arithmetischen Mittel der Partialsummen dieser Reihe, so wird dieselbe im allgemeinen noch divergieren. Dagegen konvergieren die aus den Gliedern dieser Folge gebildeten arithmetischen Mittel schon sicher gegen die Funktion $f(x)$, und zwar gleichmäßig im ganzen Intervalle (— 1,1).

Man kann nun wieder die Frage aufwerfen, wie sich diese zweiten arithmetischen Mittel der Partialsummen der Legendreschen Reihe im Falle unstetiger Funktionen $f(x)$ verhalten. Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß alle die Fouriersche Reihe betreffenden entsprechenden Resultate sich sinngemäß übertragen lassen. Diese Wahrscheinlichkeit wird auch durch den Umstand unterstützt, daß die bei den ersten arithmetischen Mitteln der Fourierschen Folge und bei den zweiten arithmetischen Mitteln der Legendreschen Folge auftretenden Kernfunktionen in naher Beziehung zueinander stehen. Durch nähere Ausführung dieser Andeutungen würde ich der Fejérschen Publikation vorgreifen.

Sprechsaal
für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Professor Dr. Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 23.]

In I B 1 b (Netto), Nr. 1, Zeile 1, anstatt von Nr. 14 setze man Nr. 18.

In I B 2 (Meyer):

p. 391. Anm. 377, das Zitat von L. Berzolari soll wie folgt korrigiert werden: Napoli Rend. (2) 5 (1891), p. 35 und 71; Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 101; 21 (1893), p. 1; Palermo Rend. 5 (1891), p. 9 und 33; 7 (1893), p. 5; Ist. Lomb. Rend. (2) 25 (1892), p. 950 und 1025; Rom. Lincei Mem. (4) 7 (1893), p. 305.

p. 395. Anm. 394, nach dem Zitat von W. Groß setze man: Vgl. auch L. Berzolari, Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 101; 21 (1893), p. 1; Pal. Rend. 7 (1893), p. 5; Rom. Lincei Mem. (4) 7 (1893), p. 305; Ist. Lomb. Rend. (2) 25 (1892), p. 950 und 1025.

p. 395. Anm. 399, nach dem Zitat von B. Perrin füge man ein: L. Berzolari, Ann. di mat. (2) 19 (1891), p. 269.

In II B 1 (Osgood), p. 19, Anm. 28 und Nr. 29, Zeile 1—2, der Satz ist nicht von Weierstraß, sondern von F. Casorati, Ist. Lomb. Rend. (2) 1 (1868), p. 123 = Teorica delle funzioni di variabile complessa, Pavia, 1 (1868), p. 434.

In III C 2 (Staude):

p. 179, Anm. 72, einfügen: G. Loria, Giornale di mat. 24 (1885), p. 164.

p. 191, Anm. 166, einfügen: F. Schur, Math. Ann. 20 (1882), p. 254.

p. 203, Anm. 250, einfügen: G. Loria, Torino Mem. (2) 36 (1884); Torino Atti 20 (1885), p. 505.

p. 214, Anm. 326, nach dem Zitat von Segre und Loria einfügen: D. Montesano, Napoli Rend. 25 (1886), p. 192.

p. 232, Anm. 442, nach dem Zitat von Hermes einfügen: E. Caporali und P. del Pezzo, in Mem. di Geometria von E. Caporali, Napoli 1888, p. 270.

p. 232, Anm. 443, zu zitieren sind zuerst L. Cremona, Ann. di mat. (1) 1 (1858), p. 164 und 278; 2 (1858), p. 19; und v. Staudt, Beiträge (1860), p. 278.

p. 236, Zeile 7 und Anm. 464, einfügen zuerst: L. Cremona, Bologna Mem. (2) 3 (1863), p. 385 = Giornale di mat. 2 (1863), p. 202.

p. 236, Anm. 467, nach dem Zitat von Fr. v. Krieg, einfügen: L. Berzolari, Palermo Rend. 5 (1891), p. 9 und 33.

p. 237, Zeile 4 und Anm. 468, nach dem Zitat von Hurwitz einfügen: E. Beltrami, Bologna Mem. (3) 10 (1879), p. 286.

p. 247, Anm. 536, nach dem Zitat von Reye einfügen: D. Montesano, Bologna Mem. (5) 3 (1893), p. 549.

p. 256, Anm. 602, einfügen: G. Loria, Torino Mem. (2) 36 (1884); Torino Atti 20 (1885), p. 505.

In III A, B 4 b (Fano), p. 361, Anm. 188, das Zitat von L. Berzolari soll wie folgt korrigiert werden:

Napoli Rend. (2) 5 (1891), p. 35 und 71; Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 101; 21 (1893), p. 1; Palermo Rend. 5 (1891), p. 9 und 33; 7 (1893), p. 5; Ist. Lomb. Rend. (2) 25 (1892), p. 950 und 1025; Rom. Lincei Mem. (4) 7 (1893), p. 305.

Pavia. Luigi Berzolari.

Hierzu 2 [illegible] Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 6. HEFT. JUNI.

AUSGEGEBEN AM 20. JULI 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

☞ Das nächste Heft wird im August ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER
DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 3 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Vortrag[1]), gehalten auf dem IV. Internationalen Mathematikerkongreß in Rom am 7. April 1908.

Von WALTHER VON DYCK in München.

„*Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*" sollte das Thema bilden, über welches Herr Felix Klein-Göttingen vor Ihnen sprechen wollte. Zu unser aller lebhaftem Bedauern ist Herr Klein verhindert, nach Rom zu kommen. Wenn das Organisationskomitee des Kongresses mich eingeladen hat, an Herrn Kleins Stelle zu treten, so geschah dies in Würdigung des Umstandes, daß in der Tat ein Bericht über die Enzyklopädie bei dem internationalen Charakter, den das große Unternehmen besitzt, recht eigentlich den Verhandlungsgegenständen dieses Kongresses gemäß ist.

Ich darf die Formulierung des Zieles, welches die „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften"[2]) verfolgt, voranstellen, wie sie in dem bei Inangriffnahme des Werkes im Jahre 1895 ausgegebenen Programm niedergelegt worden ist:

„Aufgabe der Enzyklopädie soll es sein, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten *Resultaten* zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathemathischen *Methoden* seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie soll sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik beschränken, sondern auch die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete mit berücksichtigen und dadurch ein Gesamtbild der Stellung geben, die die Mathematik innerhalb der heutigen Kultur einnimmt."

1) Vom Herrn Verfasser durchgesehener Abdruck aus der Internationalen Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik vom 16. Mai 1908. G.

2) Deutsche Ausgabe im Verlage von B. G. Teubner, Berlin und Leipzig; die französische Ausgabe im Verlage von Gauthier-Villars, Paris.

Lassen Sie mich hier vor allem betonen, wie die Durchführung dieses Programmes allein möglich geworden ist durch den allseitigen Anteil, welchen das Werk gefunden hat, welcher ihm schon zu Beginn einen großen und bedeutenden Kreis von Mitarbeitern gesichert hat; lassen Sie mich im besonderen aussprechen, wie sehr die deutschen Herausgeber dankbar sind für die hervorragende Mitarbeit gerade auch der nichtdeutschen Fachgenossen, unter denen sich auch die besten Namen *Italiens* befinden; lassen Sie mich hervorheben, wie es nur durch solche Unterstützung möglich geworden ist, für jeden Artikel den geeignetsten Referenten unter den auf dem Gebiete schöpferisch tätigen Gelehrten zu finden, wie nur so die Darlegungen dem universellen Charakter aller wissenschaftlichen Arbeit gerecht werden konnten.

Mag durch diese Vielheit der Autoren und der Anschauungen nach mancher Richtung eine gleichmäßige Behandlung des Stoffes verloren gegangen sein, an persönlicher Färbung, an Lebendigkeit der Darstellung, an aktuellem Interesse für die zurzeit im Vordergrunde stehenden Fragen hat die Darlegung gewonnen.

Sei es gestattet, die Aufgabe der Enzyklopädie an einem Gleichnis zu kennzeichnen: Es soll eine zusammenhängende Reihe von Bildern geschaffen werden, welche uns eine weithingebreitete, reichgegliederte, vielgestaltige Gegend in ihren großen Zügen vor Augen führt. Ob die Bilder diesen Zweck erfüllen, hängt zuvörderst ab von der Wahl der Ausschnitte aus der Natur, vom Standpunkt, von dem aus wir sie betrachten, von der Beleuchtung, die wir wählen, vom Format, das jeweils der Bedeutung des Objektes angepaßt sein muß. Darüber hinaus aber müssen wir, wenn anders uns die Gegend lebendig erstehen soll, von den Künstlern, die sich der Aufgabe widmen, die Betonung des inneren Zusammenhanges, des Aufbaues fordern. Der Künstler muß jeweils das Bedeutsame und Charakteristische heraussheben, muß Einzelheiten zurücktreten lassen, Nebensächliches übergehen. Wenn auch die Aufgabe gebunden ist im Vergleich zu einer freien Schöpfung künstlerischer Phantasie, wir werden es dennoch billigen und wünschen, daß der Künstler, bei aller Treue in der Wiedergabe der Natur, *seine* Auffassung — etwa in einer stilisierten Darstellung — zum Ausdruck bringt, daß er *seine* Art, die Dinge zu sehen, *seine* Methode, sie zu schildern, bewußt oder unbewußt dem Bilde einprägt. Eine Reihe photographischer Aufnahmen, ohne Belebung durch die Farbe, in zu gleichmäßiger Betonung der Objekte, mit einem Vielerlei von Details, einer unsicheren Gliederung würde der Absicht nicht genügen.

Mit dieser Allegorie mag die Aufgabe der Enzyklopädie genugsam bezeichnet sein, um so mehr, als eine Darlegung des gesamten

Planes und ein historischer Rückblick über die bisher geleistete Arbeit in der Einleitung zum ersten Bande niedergelegt ist. Ich möchte im folgenden versuchen, ohne irgendwelchen Anspruch auf Vollständigkeit einen kurzen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Enzyklopädie zu geben, und damit einzelne Bemerkungen verknüpfen über die Wandlungen, welche die fortschreitende Ausgestaltung mit sich gebracht, und über die Frage, inwieweit die Absichten und Aufgaben des Werkes in seinen bis jetzt vorliegenden Abschnitten erfüllt sind und erfüllt werden konnten.

Nach dem ursprünglichen Plane sollte die Anordnung des Stoffes eine alphabetische sein; mit dem Übergang zu einer systematischen war nicht bloß einer Zersplitterung in völlig unübersehbares Stückwerk begegnet, sondern eine zusammenfassende und methodische Darlegung eigentlich erst ermöglicht und damit die Aufgabe an Bedeutung verändert und gehoben. Vielleicht hat der ursprüngliche Plan bei der ersten Disposition insofern noch nachgewirkt, als der Rahmen des Werkes, wie wir im einzelnen noch sehen werden, ursprünglich zu enge bemessen worden ist. Mit Ausnahme weniger Aufsätze, insbesondere H. Burkhardts, dessen konzise und prägnante Schreibweise bei engster Begrenzung größtmöglichen Inhalt bietet, und mit Ausnahme der Probeartikel, deren Themata einer knappen Behandlung vorzugsweise zugänglich waren, hat jeder Aufsatz den im Entwurf vorgesehenen Raum überschritten. Mit A. Pringsheims grundlegenden Artikeln ist das System der Überschreitungen sozusagen legalisiert worden, und wir müssen der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner auch an dieser Stelle aufrichtig danken, daß sie der Notwendigkeit einer wesentlich breiteren Entwicklung, wie all den vielen Wünschen, die immer wieder an sie herangetreten sind, in liberalster Weise entgegengekommen ist, und zwar schon zu einer Zeit, in der der Erfolg des Unternehmens noch keineswegs gesichert war.

Zu dem Anwachsen des Umfanges der einzelnen Artikel kam aber auch, da wo es der Inhalt forderte, eine Vermehrung ihrer Zahl durch Teilung. Der Fortschritt der Wissenschaft machte es weiter notwendig, an manchen Stellen ergänzende Artikel einzufügen. Waren hierdurch schon Umstellungen bedingt, so traten noch Änderungen der Anordnung aus äußeren Gründen, im Interesse des Fortganges der Herausgabe hinzu. Für die Ungleichheit, die durch solche Wandlungen entsteht, für die Gefährdung des Aufbaues und der Übersicht müssen wir die Nachsicht der Leser erbitten. Möge sie gewährt werden im Hinblick darauf, daß das Werk ein lebendiges ist und in lebensvoller Entwicklung begriffen, daß es sich vervollkommnet, indem es fortschreitet.

Wenn nach Jahren die letzten Hefte des Werkes abgeschlossen sind, wenn das gesamte Gebiet einmal durchmessen ist, dann muß wohl die Arbeit aufs neue beginnen. Dann wird es möglich sein, auf Grund der gesammelten Erfahrungen die jetzt vorhandenen Lücken auszufüllen, die Raumverteilung richtiger zu bemessen, Unterschiede auszugleichen. Aber auch dann wird sich wie heute das Werk als ein werdendes, in stetem Fluß befindlich kennzeichnen, wenn anders es auch dann wieder ein Bild geben soll vom augenblicklichen Inhalt der wissenschaftlichen Forschung, ihrer Verwertung in den angewandten Disziplinen, ihrer Bedeutung für unsere Naturerkenntnis und dadurch ein Gesamtbild von der Stellung der mathematischen Wissenschaften innerhalb der Kultur.

* * *

Indem ich mich nunmehr zu dem Fortschritt der Veröffentlichungen im einzelnen wende, stelle ich *die Gruppe der drei ersten, der Analysis und Geometrie, also der Mathematik im engeren Sinne gewidmeten Bände* voraus.

Auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg, vor vier Jahren, konnte der *erste*, von Franz Meyer-Königsberg herausgegebene Band, *Arithmetik und Algebra* (im weitern Sinn genommen) umfassend, vollendet vorgelegt werden, ein wohlverdienter Erfolg für den Redakteur, dessen Initiative die ursprüngliche Konzeption des ganzen Werkes zu danken ist.

In diesem Bande kamen die soeben bezeichneten Schwierigkeiten der Begrenzung des Umfanges zuerst zum Austrag. Auf der anderen Seite bot der Hauptinhalt des Bandes für die Darstellung ein im großen ganzen wohldurchforschtes Gebiet, bei dem die Vielheit der Einzel-Erscheinungen und -Methoden schon zu einem geschlossenen Ganzen von einheitlichem Gepräge zusammengezogen erscheint. So konnte einmal die rein systematische Darstellung gewählt werden, für die ich D. Hilberts „Theorie der algebraischen Zahlkörper" als das glänzendste Beispiel anführen will, bei dem auf eine historische Darlegung um so eher verzichtet werden konnte, als der ausführliche Bericht, den Hilbert in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht hat, ein genaues Verzeichnis der Literatur enthält. Auf der anderen Seite seien etwa A. Pringsheims Aufsätze über Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse angeführt als Beispiele, in welchen von einer Übersicht über die geschichtliche Entwicklung des Gebietes ausgegangen wird, der sich die Darstellung der Methoden anreiht.

Von dem weiteren Inhalt dieses Bandes möchte ich nur noch auf die Abschnitte hinweisen, welche speziellen *Rechenmethoden*, wie sie

vor allem die angewandte Mathematik fordern muß, gewidmet sind — Ausgleichungsrechnung, Interpolation, Technik des numerischen und graphischen Rechnens mit Einschluß der Rechenapparate — und auf die Darlegung des Versicherungswesens, welches ja auch auf diesem Kongreß zum ersten Male im Rahmen der mathematischen Disziplinen erscheint.

Für die Benutzbarkeit des Bandes war die Gestaltung des *Registers* von besonderer Wichtigkeit und hat der sorgsamsten Überlegung um so mehr bedurft, als dasselbe auch für alle folgenden Bände zum Muster dienen sollte. Man kann die Hauptaufgabe des Registers, dem Kundigen ein rasches und sicheres Nachschlagen zu ermöglichen, als gelöst betrachten. Der Übersichtlichkeit kommt der knappe Raum zustatten (auf einen Bogen *Text* kommt etwa eine Seite des Registers). Auch an sich genommen ist das Register von Interesse, ganz abgesehen von der Vielgestaltigkeit der Wortbildungen, die uns darin entgegentreten, und die nicht immer die Billigung der Philologen finden würden. Es gewähren die den Stichworten zur Unterteilung zugefügten Beiworte wenigstens zum Teil eine Einsicht in die Wandlungen und Erweiterungen, die ein Begriff je nach seiner Anwendung im Lauf der Zeit erfährt, und deuten damit neue Zusammenordnungen verschiedener Gebiete an — ein Zweck, der ursprünglich durch die alphabetische Anordnung des ganzen Werkes miterfüllt werden sollte.

Es sei gestattet, hier einige Bemerkungen einzufügen über die *französische Bearbeitung der Enzyklopädie*, für welche unter Mitarbeit der Autoren des Originalwerkes die hervorragendsten Gelehrten Frankreichs ihre Beteiligung zugesagt haben. In *Heidelberg* konnte der Leiter der Herausgabe, Herr J. Molk, das erste Heft vorlegen und in begleitenden Worten die Grundsätze der Bearbeitung bezeichnen. Heute sind 7 Hefte aus den einzelnen Abschnitten des ersten Bandes erschienen. Sie bestätigen die Erwartungen, welche man von dem klärenden Einfluß einer über die Grenzen der Nation hinausgreifenden Vereinigung von Arbeitskräften verschiedener Auffassung und verschiedener Tradition hegen durfte. Die Aufsätze, in einer etwas von der deutschen verschiedenen Zusammenfassung erschienen, haben wesentliche Ergänzungen erfahren, welche der individuellen Auffassung des Bearbeiters gegenüber dem Autor Rechnung tragen, und Erweiterungen, welche die Entwicklung der Enzyklopädie im Vergleich zum ersten Plane als notwendig erscheinen ließ. Besonderes Gewicht ist vom Herausgeber auf die Ausdehnung der literarischen Nachweise gelegt worden. Der durch diese verdienstvollen und erwünschten Ergänzungen beigebrachte Stoff wird durch eine kritische Gliederung und Sichtung an Wert noch ge-

winnen. Für eine spätere Neubearbeitung der Enzyklopädie aber wird gerade die so überaus sorgfältige französische Ausgabe die bedeutendste Vorarbeit darstellen. Man muß die großen inneren Schwierigkeiten kennen, die es macht, alle solche für die Bearbeitung notwendigen Maßnahmen einzuleiten und durchzuführen. Nur dann kann man im vollen Maße würdigen, wie Autoren und Bearbeiter eigene Wünsche dem sachlichen und allgemeinen Interesse nachgestellt haben, was der Herausgeber in umsichtiger, unermüdlicher Tätigkeit, was durch ihre Opferwilligkeit die unter der Devise 'viribus unitis' verbundenen Verleger Teubner und Gauthier-Villars geleistet haben.

Der *zweite Band*, redigiert von H. Burkhardt-Zürich und W. Wirtinger-Wien, umfaßt die *Analysis* im engeren Sinne und bildet den Zentralkern der Bände der reinen Mathematik. Die Gliederung des Bandes in zwei gleichwertige Teile, die Analysis reeller und die Analysis komplexer Größen, entspricht der gegenwärtigen Bedeutung des Gebietes reeller Variabler als des allgemeineren, der sich das wegen seiner besonderen Beziehungen einfachere und darum früher entwickelte der Funktionentheorie komplexer Variabler einordnet. Ich erwähne, um die Fülle des Stoffes zu bezeichnen, der hier darzulegen ist, nur einzelne neuere Probleme: einerseits die an die Lieschen kontinuierlichen Transformationsgruppen anschließenden Arbeiten, die Randwertaufgaben, die ihre Ideenbildung vorzugsweise der mathematischen Physik verdanken, die Weiterbildung der Variationsrechnung auf der durch Weierstraß geschaffenen Grundlage, dann die Theorie der Funktionalgleichungen, speziell der Integralgleichungen, welche ihrerseits wieder in mannigfachster Weise auf die genannten Probleme zurückwirkt. Auf der andern Seite die Theorie der automorphen Funktionen, die Fruchtbarmachung der Cantorschen Mengenlehre für die Funktionentheorie.

Bei einer ersten Bearbeitung war die Gruppierung nach Gegenständen für die Zwecke der Enzyklopädie die natürlich sich darbietende, neben welcher die Entwicklung einzelner in sich abgeschlossener Kreise von Methoden mehr zurücktrat. Wo solche eine weitergehende selbständige oder eine historische Bedeutung gewonnen haben, wie vor allem die auf Weierstraß zurückgehende elementare Behandlung der analytischen Funktionen, werden Ergänzungen einzugreifen haben. Die neueren ausführlichen, besonders von französischer Seite geförderten Untersuchungen über ganze Funktionen schließen ja vielfach an die Weierstraßsche Theorie an. Es ist dabei aber interessant zu sehen, wie gerade hier elementare Fragen durch die Modulfunktionen ihre Erledigung finden (z. B. der Picardsche Satz). Andererseits sind auf dem Gebiete der reellen Funktionen alte Fragen allgemeiner Art zum

Abschluß gekommmen und neue entstanden. Ich darf statt weiterer Andeutungen auf die Vorträge, die Picard in Amerika über die moderne Entwicklung der Analysis gehalten hat, hier verweisen. Sie geben eine Reihe von Beispielen wesentlichen Fortschrittes, welche seit der Zeit der ursprünglichen Disposition der Enzyklopädie entstanden sind, und welchen in ergänzenden Artikeln Rechnung zu tragen sein wird. In der französischen Ausgabe konnten diese Erweiterungen auf Grund einer wesentlich anderen Gruppierung des Stoffes großenteils schon jetzt Berücksichtigung finden.

Im *dritten Bande*, welcher, von Franz Meyer-Königsberg redigiert, die gesamte *Geometrie* umfaßt, kommen die engen Beziehungen und Analogien, welche alle Gebiete der Mathematik untereinander darbieten, am reichsten zum Ausdruck. Ist doch seit Descartes jedes Gebiet der Größenlehre (die ihrerseits wieder ihre Terminologie zumeist geometrischen Vorstellungen entlehnt) für die Geometrie fruchtbar gemacht worden. So haben neben der Weiterbildung der Differentialgeometrie, von deren Entwicklung uns soeben Herr Darboux berichtet hat, die Algebra, die Zahlentheorie, die Gruppentheorie, die Mengenlehre, die mehrdimensionalen Probleme von der Mitte des vorigen Jahrhunderts an die Geometrie um ganz neue Gebiete bereichert. Auf der andern Seite hat sich das Interesse den Untersuchungen über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen, und über die Tragweite der einzelnen Axiome wieder zugewendet. Ich möchte weiter noch ein Gebiet besonders herausgreifen, das der algebraischen Kurven und Flächen und ihrer Integrale, im Zusammenhang mit der Analysis situs. An diesen zunächst in Deutschland erwachsenen, in Italien durch die Lebensarbeit Cremonas geförderten Problemen hat sich neuerdings der Wetteifer französischer und italienischer Geometer erfolgreich betätigt und — ich verweise auf das gestern vorgetragene Referat des Herrn Segre zum Guccia-Preis — neue, an überraschenden Resultaten reiche Untersuchungen gezeitigt.

Solchem lebendigen Interesse für die geometrische Forschung verdanken wir es, wenn sich gerade der geometrische Band der Enzyklopädie der hervorragenden Mitarbeit unserer italienischen Fachgenossen erfreut.

* * *

Ich komme zu kurzen Betrachtungen über die, Band IV—VI umfassende *zweite Gruppe* der Enzyklopädie, in der *die gegenseitige Stellung und Wechselwirkung der rein mathematischen Disziplinen und ihrer Anwendungen* zu umfassender Darstellung gelangen soll.

Der die Mechanik behandelnde *vierte Band* wird von den Herren F. Klein-Göttingen und Conrad Müller-Göttingen redigiert. Es ist

mir eine besondere Ehre, der Versammlung im Auftrag der beiden Redakteure und der Verlagsbuchhandlung den soeben abgeschlossenen ersten Teil dieses Bandes überreichen zu können. Er umfaßt die Grundlegung der Mechanik und die elementare Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ich möchte es als ein glückliches Omen bezeichnen für den Fortschritt und Erfolg der auf die angewandte Mathematik bezüglichen Bände der Enzyklopädie, daß eine erste Stufe ihrer Bearbeitung gerade bei Gelegenheit dieses Kongresses in Italien erreicht erscheint: Ist doch Italien das Vaterland des Archimedes, dessen schöpferische Kraft alle Gebiete der mathematischen Wissenschaften umspannt, das Geburtsland der Renaissance, von dem aus jene gewaltige Woge neuer Anschauungen und neuer Impulse in Wissenschaft und Kunst in die Welt gegangen ist, das Vaterland Galileis, des Schöpfers der experimentellen Physik, Leonardo da Vincis, des Ingenieurs, das Vaterland von Lagrange, der der modernen analytischen Mechanik ihre Form gegeben hat!

Um auf den Inhalt des vierten Bandes näher einzugehen, so ist die Abgrenzung gegenüber dem fünften, der Physik gewidmeten, naturgemäß bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Hier ist die Mechanik der Kontinua noch mithereingezogen, insbesondere die gesamte Elastizitätslehre. Sie beansprucht für uns ein doppeltes Interesse; einmal nach ihrer technischen Bedeutung, andererseits nach ihrer hohen theoretischen Entwicklung, wie sie im Anschluß an Betti und Beltrami gerade von den modernen italienischen Mathematikern besonders gepflegt worden ist.

Schon in den bei der gestrigen feierlichen Eröffnung des Kongresses gehaltenen Reden ist der Bedeutung des gegenseitigen Durchdringens mathematischer Gedanken und Formulierungen naturwissenschaftlicher Anschauungen, technischer Probleme besonders gedacht worden, die auch in der Gliederung der Sektionen des Kongresses zum Ausdruck kommt. Hier dehnt sich ein unendliches Arbeitsfeld, in welchem von Tag zu Tag sich neue Quellen erschließen, die der Fassung in die mathematische Form bedürfen. Die Mathematik wird dabei genötigt, ihr Rüstzeug immer aufs neue zu stählen und zu vervollkommnen. Es gewinnen von diesen Gebieten ausgehend ihre Methoden selbständiges Leben, verlieren aber dabei leicht, infolge ihrer Entwicklung nach der abstrakten Seite, den Zusammenhang mit der Bearbeitung der Tatsachen. Und doch ist wiederum gerade von dieser Seite her eine Fülle von Anregungen und neuen Problemen zu gewinnen. So ist es denn auch eine der Hauptaufgaben der Enzyklopädie, welche besonders in den der angewandten Mathematik gewidmeten Bänden her-

vortritt, gerade diese Beziehungen klarzulegen und ihnen im einzelnen nachzugehen. Im vorliegenden vierten Bande sind neben die Grundlagen der rationellen Mechanik und ihren Aufbau zur klassischen analytischen Mechanik die Gebiete der technischen Mechanik gestellt, und es ist das in diesem Umfang wohl zum erstenmal gesteckte Ziel, den Gesamtbereich der statischen und dynamischen Probleme der Technik ausführlich nach ihrem mathematischen Inhalt kritisch zu sichten. Die Aufgabe ist nicht leicht. Es gilt, um beim vorigen Bilde zu bleiben, da und dort veraltete Brunnenstuben zu beseitigen, die den Lauf der Gewässer verlegt haben, ehe die reine Quelle in die ihr gemäße Fassung geleitet werden kann. Dafür tritt aber auch die Freude an ihrer Erschließung und an ihrem Ausbau gerade in den der Technik gewidmeten Aufsätzen lebendig zutage. „Wir meinen", sagt Klein am Schlusse seiner Vorrede, „wenn erst Band IV vollendet vorliegt, etwas Bestimmtes und Nützliches geleistet zu haben. Aber freilich ist es, vom höheren Standpunkte, nur eine Vorbereitung. Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik kann nur durch *intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst* gelernt werden; die Literatur gibt nur eine Beihilfe. Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muß. Die moderne Entwicklung hat ja auch in dieser Hinsicht in vielversprechender Weise eingesetzt. Möge die Wissenschaft der Mechanik, die eine Grunddisziplin aller Naturwissenschaft ist, solcherweise einer neuen Blüte entgegengeführt werden. Möge insbesondere auch das Wort Leonardo da Vincis sich wieder bewahrheiten, daß die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist!"

Der fünfte Band, redigiert von Herrn A. Sommerfeld-München, umfaßt die *Physik*. Wir stehen hier inmitten einer Evolutionsperiode physikalischer Tatsachen und einer Revolutionsperiode der grundlegenden Anschauungen. Wir müssen es der Redaktion besonderen Dank wissen, daß es ihr gelungen ist, gerade die Männer für die Darlegung zu gewinnen, die selbst an dieser Neugestaltung am erfolgreichsten mitgewirkt haben. So sind in einer Reihe von Aufsätzen die neuerschlossenen Gebiete vielfach zum ersten Male im Zusammenhange dargestellt. Ich nenne den Aufsatz von Kammerlingh-Onnes, welcher die an Van der Waals und Gibbs anschließenden Arbeiten der Leydener Schule enthält, die beiden grundlegenden Aufsätze von Lorentz, in welchen, von Maxwell ausgehend, die moderne Elektronentheorie aufgebaut ist, Wiens Aufsatz über die Theorie der Strahlung.

Die neuere und neueste Forschung hat inzwischen den Fortgang der Berichte überholt und macht die Einfügung ergänzender Artikel — ich denke an die Erscheinungen der Radioaktivität, an die Relativitätstheorie — notwendig. Charakteristisch für die grundlegenden Anschauungen erscheint das erneute Hervortreten der Molekulartheorie in Gebieten, die ihr bisher fremd waren. Die experimentellen Ergebnisse auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre und der Optik leiten zu ihr zurück. Auch die Chemie, die, um einen Ausdruck Picards zu gebrauchen, ihre prämathematische Periode (das ursprüngliche Stadium jeder Naturwissenschaft) verlassen hat, findet naturgemäß in dem Abschnitt über Molekularphysik ihre Stelle. Am glänzendsten aber tritt die Bedeutung der Molekularhypothese wohl in Boltzmanns genialer Auffassung der kinetischen Gastheorie als eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor. Der Aufsatz über die kinetische Theorie der Materie ist das letzte Zeugnis der Mitarbeit Boltzmanns an der Enzyklopädie; seiner tätigen Hilfe wie seiner gewaltigen, einzigartigen Persönlichkeit werden wir stets in Treue und Dankbarkeit gedenken.

Eine besondere Absicht für die Darlegung der einzelnen Gebiete ist es gewesen, die mathematische Physik überall in engste Verbindung mit der Experimentalphysik zu setzen. So gliedert sich, um nur *ein* Beispiel zu nennen, der Aufsatz über Wärmeleitung in einen mathematischen Teil, welcher die analytischen Methoden von Fourier bis Kelvin behandelt, und in einen physikalischen, die Methoden der Messung umfassend.

Wenn die Fourierschen Entwicklungen das klassische Beispiel bilden für die Dienste, welche die naturwissenschaftliche Forschung der reinen Analysis geleistet hat, so mag hier der Vektorentheorie als eines Beispiels für die Ausbildung spezieller Methoden des mathematischen Ansatzes auf der Grundlage physikalischer Vorstellungen gedacht werden. In den mathematischen Bänden finden sich die Anschauungen Grassmanns und Hamiltons eingereiht in der Theorie der höheren komplexen Größen wie in den Systemen geometrischer Analyse. Hieran schließt sich im vierten Bande die Entwicklung der Vektoralgebra und Vektoranalysis, während im fünften Bande die Theorie ihre spezifische, den Bedürfnissen des elektromagnetischen Feldes angepaßte Form erhält. Mit Rücksicht auf die von den Herrn Buraliforte und Marcolongo angeregte Besprechung der Vektorenbezeichnung auf dem gegenwärtigen Kongreß sei betont, daß die in der Enzyklopädie durchgeführte Behandlungsweise, die auf Maxwell und namentlich auf Heaviside zurückgeht, sich bereits, dank dem hervorragenden Einfluß der Lo-

rentzschen Enzyklopädieartikel, bei der jüngeren Generation Eingang zu verschaffen scheint.

Der *sechste Band* spaltet sich in zwei wesentlich verschiedene Gebiete. Der erste Teilband, redigiert von den Herren Ph. Furtwängler-Aachen und E. Wichert-Göttingen, umfaßt *Geodäsie* und *Geophysik*, der zweite, von K. Schwarzschild-Göttingen redigiert, die *Astronomie*.

Dem Mathematiker tritt in der Behandlung der beiden Bände vor allem der Umstand entgegen, daß es sich hier zumeist um die Darlegung von Präzisionsmessungen handelt. Dadurch tritt einmal die Fehlerdiskussion im einzelnen hervor, und weiter gewinnt das Instrumentelle wie übrigens auch in einigen Aufsätzen zur Mechanik und Physik gegenüber dem Mathematischen besondere Bedeutung.

Für die *Geodäsie* bildet der Artikel von Pizetti über höhere Geodäsie den Mittelpunkt. Es ist naturgemäß, wenn hierbei neben der theoretischen Grundlegung die geschichtliche Entwicklung dieser uralten Wissenschaft, die der mathematischen Forschung soviele Probleme gestellt hat, zu ihrem Rechte kommt; während auf der anderen Seite jene internationale Organisation wissenschaftlicher Arbeit in die Erscheinung tritt, wie sie die Aufgabe der Erdmessung und der Schweremessung in ihrer modernen Inangriffnahme darbietet.

Von dem *astronomischen Bande* der Enzyklopädie sagt sein Redakteur, daß er „in gewissem Grade ein Geschenk der Astronomen an die Mathematik bedeutet". Und in der Tat bilden ja die Astronomen im Kreise unserer Wissenschaften eine geschlossene Familie, die ihre eigene Sprache redet, ihre gesonderte Familientradition besitzt und eine eigene großartige, über die Welt verbreitete Organisation ihrer Arbeiten. So war es vielleicht vermessen, die Astronomie mit in den Bereich der Enzyklopädie zu ziehen und um so mehr, als kurz vor der Inangriffnahme der Enzyklopädie in Deutschland das Valentinersche Handbuch der Astronomie erschienen war, an dem sich die meisten deutschen Astronomen, die überhaupt Neigung zu enzyklopädischer Tätigkeit besitzen, beteiligt hatten. Und doch rechtfertigt der Inhalt der beiden ersten erschienenen Hefte den Versuch und zeigt, vielleicht gerade durch die verschiedenartige Behandlungsweise, daß auch dieser Band auf seine Art zu den Zielen der Enzyklopädie beiträgt, daß es sich hierbei nicht um einen einseitigen Vorgang handelt, dem der Wärmeleitung analog, bei dem Wärme nur vom wärmeren zum kälteren Körper übergeht, sondern, einschließlich eines gewissen Widerstandes, welcher sich der Annäherung entgegensetzt, um die Erscheinung der wechselseitigen Induktion zweier Stromkreise aufeinander.

* * *

Auf die im vorstehenden in kurzem Umriß gezeichneten sechs Bände, welche den eigentlichen Inhalt der mathematischen Disziplinen in sich begreifen, ist zuvörderst die Herausgabe beschränkt worden. Die *Geschichte*, die *Philosophie* und *Didaktik* der mathematischen Wissenschaften soll in einem *Schlußbande* angereiht werden, dessen Disposition freilich nur erst in ihren Grundzügen vorliegt. Die Gebiete sind gerade in den letzten Jahren zu immer steigender Bedeutung gelangt, wie ihnen auch im gegenwärtigen Kongresse die Arbeit der vierten Sektion mit einem überaus reichhaltigen und interessanten Programm gewidmet ist.

In der *Geschichte der mathematischen Wissenschaften* haben Neudurchforschungen ein tieferes Verständnis für die Anschauungen der Alten herbeigeführt. Vor allem sei hier der glänzenden Bestätigung gedacht, welche die Auffassung Zeuthens über die Einführung und Verwertung infinitesimaler Betrachtungen bei Archimedes gefunden hat durch die Heibergsche Entdeckung jener wichtigen Handschrift: „Über des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen".

Die *Gesamtdarstellung* der Entwicklungsgeschichte der mathematischen Wissenschaften ist eben jetzt mit der Vollendung des im Zusammenwirken einer Anzahl von Gelehrten entstandenen vierten Bandes des grundlegenden Cantorschen Werkes in bedeutungsvoller Weise gefördert. Daneben hat man sich mit der historischen Darlegung *einzelner Disziplinen* näher beschäftigt und dadurch Aufschluß über die Kontinuität in der Entwicklung der Methoden erhalten. Ganz besonders aber erschließen uns Gesamtausgaben der Werke hervorragender Forscher das Verständnis für die *einzelne Persönlichkeit* und für die Zeit, in der sie lebte. Hier finden die Akademien ein wichtiges Gebiet ihrer Betätigung. Von der Herausgabe der Klassiker des 19. Jahrhunderts abgesehen, wie sie in Deutschland, in Frankreich, Großbritannien, Italien von den gelehrten Gesellschaften schon seit lange begonnen, ist gegenwärtig die Herausgabe der Werke von Leibniz durch das kooperative Zusammenwirken des internationalen Verbandes gelehrter Körperschaften auf Anregung Frankreichs eingeleitet. Eben dieser Verband hat neuerdings die alte Forderung nach der Errichtung eines ähnlichen monumentalen Werkes, nach der Veranstaltung einer Gesamtausgabe der Schriften Eulers, erhoben. Es haben nunmehr auch die für die Wissenschaft interessierten Kreise der *Schweiz* und insbesondere die Schweizer naturforschende Gesellschaft die Unterstützung des ihrem großen Landsmanne geltenden Werkes zugesagt (worüber uns Herr Krazer noch berichten wird), so daß die Verwirklichung des für die Geschichte wie für den Fortschritt der mathematischen Wissen-

schaften gleich bedeutungsvollen Unternehmens nunmehr gesichert erscheint.

Dem Interesse für die Zusammenfassung des gesamten Gebietes der Mathematik seiner historischen Entwicklung nach stellt sich an die Seite die Frage nach der Stellung der Mathematik im Gesamtbereich wissenschaftlicher Erkenntnis, nach ihrer *Würdigung nach philosophischer Richtung.* Nach der psychologischen: im Eingehen auf die Grundlagen des Zahlbegriffes, auf die Entstehung und Festlegung unserer Vorstellungen von Zeit und Raum; nach der Seite der Logik und Erkennungstheorie: in der Frage nach der Denknotwendigkeit und Tragweite der Axiome der Arithmetik, der Geometrie und Mechanik, in der Analyse der Methoden für Deduktion und Beweis, und deren Wert für die Anordnung und Beschreibung der Tatsachen unserer Gedanken- und Erscheinungswelt. So ist es heute, im Gegensatz zu einer vergangenen Periode, das spezielle Fachgebiet, von dem aus der Übergang zu den philosophischen Fragen versucht wird. Es sind die Mathematiker selbst wie die Naturforscher, welche mit der Untersuchung der Grundlagen und Grenzen ihrer Wissenschaft sich Fragen zuwenden, die früher von ausschließlich philosophischer Seite her in Angriff genommen und unter Zurücksetzung des Tatsachenmaterials behandelt worden sind. So ist schon Fechner vorangegangen, so sind Machs historische und philosophische Untersuchungen grundlegend geworden; so ist das allseitige Interesse, welches die gedankenreichen Ausführungen Picards, Poincarés finden, durch den Zug nach zusammenfassender philosophischer Betrachtung begründet.

Die Fragen des Unterrichts an unseren Hoch- und Mittelschulen stehen gegenwärtig in lebhafter Diskussion. Hier ist es die veränderte Stellung und die erhöhte Wertschätzung unserer Disziplinen im Rahmen des gesamten Bildungsstoffes und innerhalb der Aufgaben unserer modernen Kultur wie andererseits unmittelbar die Bedürfnisfrage, welche eine neue Gestaltung und Abgrenzung des für die einzelnen Entwicklungsstufen der Schule festzusetzenden Lehrstoffes herbeiführt.

Um unsere deutschen Verhältnisse zu bezeichnen, hat die von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte eingesetzte Unterrichtskommission soeben einen umfassenden Bericht über ihre bisherige Tätigkeit durch Herrn Gutzmer erstattet, welcher mit der Aufstellung eines bestimmten, auch auf die naturwissenschaftlichen Gebiete erstreckten Lehrprogrammes für die Mittelschulen abschließt und mit Vorschlägen für die Hochschulausbildung der Lehrer. Besonders instruktiv werden sich für diese allerorten in Fluß befindlichen Fragen vergleichende Betrachtungen der Unterrichtsverhältnisse in den einzelnen Ländern ge-

stalten, zu denen die in der vierten Sektion unseres Kongresses angekündigten Referate reichen Anlaß bieten werden.

Doch ich breche diese Entwicklungen, die vielleicht schon allzusehr ins einzelne gegangen sind, hier ab und komme zum Schluß. Möchte es mir gelungen sein, den Plan des ganzen Werkes und die Absicht der einzelnen Darstellungen richtig zu bezeichnen.

* * *

Die Aufgabe, deren Lösung die Enzyklopädie sich stellt, ist von Jahr zu Jahr und weit über die ursprüngliche Vorstellung vom Umfang des zu bewältigenden Gebietes gewachsen.

Ebenso aber, wie es für die Erschließung neuer wissenschaftlicher Gebiete ein Vorzug ist, die ersten Schritte in gewisser Naivität zu tun, noch ohne Kenntnis ihrer Schwierigkeiten im einzelnen und ohne auf Einschränkungen zu achten, welche sich einer allgemeinen Anwendbarkeit der Methoden entgegenstellen mögen, so war es auch hier für die Verwirklichung des Gedankens gut, daß mit Unbefangenheit an die Ausführung geschritten worden ist. So können wir heute, vierzehn Jahre nach Beginn der Arbeit, sagen, *daß der frische Impuls des ersten Angriffs der Arbeit treu geblieben ist*, daß das Werk in allen seinen Teilen in rüstigem Vorwärtsschreiten begriffen, wenn auch noch lange nicht zu Ende geführt ist. Und auch von dieser Arbeit gilt das Wort von Gauß: *„Wahrlich, es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.“*

Von den ursprünglich durchaus objektiven Referaten ist, wie schon eingangs erwähnt, vielfach zu subjektiver Darlegung übergegangen worden, und zwar tritt diese individuelle Auffassung gerade da am stärksten zutage, wo es sich um die Klarlegung der grundlegenden Prinzipien und um den inneren Zusammenhang der einzelnen Gebiete handelt. Gerade mit diesen Betrachtungen aber ordnet sich die Aufgabe der Enzyklopädie in die größere ein, welche sich auf die Frage nach der Stellung unserer Wissenschaft im Gesamtbereiche menschlichen Erkennens bezieht. Es liegt im Zuge unserer Zeit, wenn gerade diese gegenwärtig ein erhöhtes Interesse beansprucht.

„Wir sind es müde“, sagt Diels in der Festschrift zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Preußischen Akademie der Wissenschaften, „wir sind es müde, bloß Stoffe zu sammeln, wir wollen des Materiales Herr werden; wir wollen hindurchdringen durch die Einzelheiten zu dem, was doch der Zweck der Wissenschaft ist, zu einer allgemeinen, großen Weltanschauung.“

Für dieses Streben nach einer wissenschaftlich begründeten Lebensauffassung und für die klare Herausarbeitung des Anteils, den die Mathematik dabei besitzen mag, wird die Enzyklopädie *eine Stufe* sein, welche uns von *einer* Stelle aus den innern Zusammenhang des Baues überschauen und die möglichen Richtungen seiner Weiterführung erkennen läßt. *Dann aber müssen wir weitere Bausteine brechen und zubereiten.*

Die Anschauungen, welche uns aus jener anderen Epoche zusammenfassender Tätigkeit vor anderthalb Jahrhunderten in d'Alemberts glänzender Vorrede zur französischen Enzyklopädie entgegentreten, jener, dem Kraftgefühl einer beispiellosen Entwicklung der mathematisch-physikalischen Disziplinen entsprungene *Glaube* an einen unbegrenzten Gültigkeitsbereich mathematischer Formulierung, welchen der bekannte Ausspruch von Laplace bezeichnet, sie sind heute, nach einer erneuten Sichtung und Zusammenfassung dessen, was die mathematische Einkleidung bedeutet und vermag, einer nüchterneren Auffassung gewichen. In höherem Maße freilich als je zuvor hat sich auf allen Gebieten der Naturwissenschaften die Notwendigkeit der mathematischen Formulierung dargetan, aber wir fassen diese der *Beschreibung* dienenden Formeln nicht als oberste Gesetze auf im Sinne jenes ἀεὶ ὁ ϑεὸς γεωμετρεῖ, sondern wir sehen in der Einführung der Zahl das einzige *unserem Verstande* zugängliche Mittel, welches uns ein genaues Bild der Vorgänge in der Natur zu bieten vermag, und in diesem *bescheideneren* Sinne mögen wir sagen:

Verstehen heißt berechnen.

Willkürliche Schöpfungen des Verstandes?

Bemerkungen zu dem Aufsatz von G. Hessenberg.[1])

Von Philipp Frank in Wien.

Es geht nicht an, in einer mathematischen Zeitschrift so viel über doch eigentlich nichtmathematische Dinge zu schreiben, daß es möglich wäre, den ganzen Rattenkönig von Mißverständnissen und schiefen Auffassungen in Hessenbergs Beurteilung meiner Arbeit „Kausalgesetz und Erfahrung" bis auf das letzte Schwänzchen zu entwirren. Ich werde

1) Heft 3—4 dieser Jahresberichte.

das vielleicht in einer philosophischen Fachzeitschrift tun und will hier nur einige der gröbsten Irrtümer richtig stellen.

Ich ging in meiner Arbeit[1]) von folgender Fassung des Kausalgesetzes aus: „Wenn einmal auf den Zustand *A* der Zustand *B* gefolgt ist, so folgt jedesmal, sooft *A* eintritt, auch *B* darauf.“ Ich zeigte nun, daß das hier vorkommende Wort „Zustand“ erst durch diesen Satz selbst einen Sinn erhält. Derartige Sätze nennt man aber bekanntlich Definitionen oder Konventionen, was ich auch ausdrücken kann: es sind konventionelle Festsetzungen oder Erzeugnisse meiner Willkür, was aber alles nur verschiedene Ausdrucksweisen für denselben einfachen Sachverhalt sind. Was sagt aber Herr Hessenberg dazu: „Weil ich mein Bedürfnis nach Aufsuchung von Gesetzmäßigkeiten durch Bildung und Erweiterung von Begriffen wie des Zustandes befriedigen kann, soll dieses Bedürfnis selbst ein Erzeugnis meiner Willkür sein.“ Ich habe behauptet, das Kausalgesetz sei ein Erzeugnis der Willkür; Hessenberg läßt mich behaupten, ein gewisses Bedürfnis sei Erzeugnis der Willkür. Die Wahrheit, daß das Kausalgesetz ein Gesetz, also ein in Worten ausdrückbarer Satz ist, scheint ihm entgangen zu sein. Er verwechselt ein Problem der Methodenlehre und Naturphilosophie mit einem Problem der Psychologie, wohin allein die Untersuchung eines Bedürfnisses gehört. Wie kann man aber diskutieren, wenn ich „Gesetz“ sage und Herr Hessenberg „Bedürfnis“ versteht? Jedem denkenden Staatsbürger dürfte bekannt sein, wie wenig oft ein Gesetz mit dem Bedürfnis danach zu tun hat. Wenn Poincaré behauptet, daß die euklidische Geometrie eine konventionelle Festsetzung ist, müßte Hessenberg folgerichtig einwenden: Poincaré hat unrecht; denn das Bedürfnis, das zur Aufstellung der euklidischen Geometrie führte, ist doch keine willkürliche Festsetzung.

Übrigens stellt Hessenberg einen eigenen etwas sonderbaren Grundsatz für die Behandlung von Fragen nach der Natur der obersten Sätze aller Wissenschaft auf. Er wünscht nämlich, man solle nicht, wie ich es getan habe, von der wissenschaftlichen Erfahrung, sondern von der Erfahrung des täglichen Lebens ausgehen. Er übersieht dabei, daß das Kausalgesetz der theoretischen Naturwissenschaft, wie ich es formulierte, in der Erfahrung des täglichen Lebens gar nicht erfüllt zu sein braucht. Im täglichen Leben handelt es sich um Zustände im primitivsten Sinn des Wortes, um sinnlich wahrnehmbare Zustände. Daß das Kausalgesetz, wenn das Wort „Zustand“ in diesem Sinne gemeint ist, gar nicht gilt, zeigte ich in meiner Arbeit an dem von Herrn

1) Annalen der Naturphilosophie Bd. VI.

Hessenberg als zu wissenschaftlich bezeichneten Beispiel von den Magnetstäben. Das von ihm beigebrachte Gegenbeispiel von dem durch Mäuse, Einbrecher und Halluzinationen aus dem Schlaf geschreckten Spießbürger ist wohl, soviel muß ich einräumen, weder „wissenschaftlich“ noch „akademisch“, hat aber auch mit dem von mir behandelten Problem nicht das mindeste zu tun. Im § 35 charakterisiert Herr Hessenberg den Ton seiner eigenen Argumentation, wie mir scheint, allzu hart als „leichtfertig“ und „bedauerlich“.

Und nun folgt umgekehrt wie im antiken Theater auf das Satyrspiel die Tragödie oder, besser gesagt, das Rührstück. Hessenberg mobilisiert Geologie, Seismologie und leider! auch Theologie, um die schwarzen Folgen meiner Theorie zu demonstrieren. Das Ganze steht auf dem Niveau derjenigen, die z. B. den Materialismus dadurch widerlegen wollen, daß sie zeigen, er mache seine Anhänger zu schlechten Menschen. Herr Hessenberg verkleidet mich als Theologen und läßt mich so eine Ansprache gegen die Naturforscher halten und willkürlich Dogmen festsetzen. Weiß denn Herr Hessenberg nicht, daß ein Dogma und eine Definition gar nichts gemein haben, als daß man auf beide gelegentlich das Wort „willkürliche Festsetzung“ anwendet, aber in ganz verschiedenem Sinn? Wenn ich festsetze: „die Welt ist vor 5000 Jahren erschaffen“, so ist das, weil kein Wort dadurch definiert wird, keine Konvention, sondern ein Dogma. Das Wort „willkürliche Festsetzung“ scheint für Hessenberg überhaupt ein rotes Tuch zu sein, auf das er losstürmt, ohne sich dessen Bedeutung eigentlich klarzumachen. Er betreibt damit, um mich seiner etwas scholastischen Ausdrucksweise anzuschließen, eine stilgerechte quaternio terminorum. Das ist alles so selbstverständlich, daß es sich kaum lohnt, es niederzuschreiben. Aber auf Grund solcher primitiver Mißverständnisse wettert Hessenberg dagegen, daß ich Dogmatismus und Scholastik an Stelle der Naturwissenschaft setzen will.

Aus diesem letzten Abschnitt (§ 37) seiner Polemik scheint hervorzugehen, daß er sich gar nicht bemüht hat, zu einer klaren Vorstellung über das Kausalgesetz zu gelangen. Sonst könnte er unmöglich den für jeden, der einigermaßen darüber nachgedacht hat, verwunderlichen Satz hinschreiben: „Warum lehnt die Naturwissenschaft solche Theorien ab (nämlich die Theorien von der Erschaffung der Welt durch ein mit Intelligenz ausgestattetes Wesen)? Weil sie den kausalen Ablauf des Geschehens durchbrechen.“ In Wirklichkeit ist aber gerade die Idee eines Weltenschöpfers aus dem Kausalitätsbedürfnis der Menschheit hervorgegangen, und viele sehen noch heute darin die befriedigendste Erfüllung des Kausalgesetzes.

Es wäre doch wünschenswert gewesen, wenn Herr Hessenberg sich, ehe er sein vernichtendes Urteil schrieb, einmal die Frage vorgelegt hätte: „Wie lautet eigentlich das Kausalgesetz?“ Ich glaube, daß nach Aufklärung dieser und ähnlicher Mißverständnisse zwischen Herrn Hessenbergs Meinung und meinem „Konventionalismus“ keine Divergenz mehr bestehen wird.

Erwiderung auf die Bemerkungen von Ph. Frank.

Von GERHARD HESSENBERG in Bonn.

Meine Arbeit wies auf die Gefahren hin, die in der Verwechslung von psychologischer und logischer „Willkür“ liegen.[1]) Die logische Willkür ist den „synthetischen Urteilen a priori“ Kants (neuerdings „Konventionen“ genannt) und den Dogmen gemeinsam, während sich das Dogma von der Konvention gerade durch seine *psychologische* Willkür unterscheidet. Die Gefahr einer Verwechslung von Dogma und Konvention ist für die Wissenschaft eine direkte und unmittelbare[2]), und der Gegensatz von Dogma und Konvention ist daher völlig verschieden von dem Gegensatz zwischen ethischem und naturwissenschaftlichem Materialismus. Diesen letzteren Gegensatz meinen Worten als Vergleichsobjekt unterzulegen, ist um so oberflächlicher, als ich gerade in meinen Schlußworten diesen Vergleich abgeschnitten habe.

Der Versuch Franks, für die Unterscheidung von Dogma und Konvention ein logisches Kriterium zu geben, bedeutet seiner ganzen Natur nach eine Kompetenzüberschreitung der Logik. Und es ist unrichtig, daß ein Dogma nichts definiere. Die Beispiele für die Definitionskraft der scholastischen Dogmatik sind unerschöpflich. Das Gegenbeispiel, die Definition des Zustandes durch eine Konvention, ist trotz eines richtigen psychologischen Kerns logisch betrachtet unhaltbar. Um den Zustand A zu kennen, muß ich nach Frank wissen, welcher Zustand B auf A folgt; ich muß also B kennen, und dazu muß ich wissen, welches C auf B folgt, und so fort mit Grazie in infinitum. Es wäre ebenso aussichtsvoll, die ganze Zahl durch die nächstfolgende ganze Zahl definieren zu wollen. Im übrigen habe ich diesen Teil der Frankschen Ausführungen übergangen, weil er zum Beweise einer von mir unbestrittenen Tatsache dient, nämlich der „logischen

1) Das Wort „*Willkür*“ ist in meinen Ausführungen konsequent nur im psychologischen Sinne gebraucht worden, was im besonderen aus dem Abschnitt VII hervorgeht.

2) Die Unterschätzung des Ernstes dieser Gefahr mag zwar einen erfreulichen Optimismus beweisen, wird aber durch billigen Spott über rote Tücher nicht gerechtfertigt.

Willkür" des Kausalsatzes, die freilich besser und viel früher schon von Hume und Kant bewiesen worden ist.

Ich hatte in meinen Ausführungen sorgfältig die logischen von den psychologischen Fragen getrennt.[1]) Ich stellte der Zergliederung der Erfahrungstatsachen die Frage nach dem Erkenntnisgrund, der logischen Übersichtlichkeit der wissenschaftlichen Erfahrung die psychologische der täglichen, der logischen Willkür des Gesetzes das psychologische „Bedürfnis" gegenüber, dem das Gesetz entspringt. Nach Frank freilich habe ich Gesetz und Bedürfnis verwechselt, habe die wissenschaftliche Erfahrung gänzlich aus der Untersuchung ausschalten wollen, habe überhaupt Psychologie und Logik nicht unterschieden. Nach Frank hat auch die psychologische Tatsache, daß unerwartete Sinneseindrücke *unwillkürlich* die Frage nach ihrer Ursache auslösen, mit dem Kausalsatz und der Wissenschaft nichts zu tun. Nur der Spießbürger fragt nach der Ursache. Nach der Ansicht Franks muß übrigens jeder, der einigermaßen darüber nachgedacht hat, den Hölderschen Satz verwunderlich finden, daß die infinitesimalen Größen die Stetigkeit des Kontinuums durchbrechen. Denn gerade das Stetigkeitsbedürfnis hat doch die Menschen veranlaßt, solche Größen einzuführen, und weite Kreise sehen noch heute in ihnen eine Erfüllung der Stetigkeit. Gegen die Gewalt solcher Gründe bin ich machtlos. Freilich war ich bisher der Ansicht, daß die Schöpfungstheorie nicht dem Kausalsatze an sich, sondern der Annahme einer *letzten* Ursache entspringe, und daß Kant, dem ich diese Ansicht entnommen habe, darüber einigermaßen nachzudenken sich bemüht habe.

Das Beweisthema Franks lautete: „*Der Kausalsatz ist nicht denknotwendig; der Rahmen, den Erfahrung ausfüllt, ist kein notwendiges Gewächs der menschlichen Organisation.*" Diese Behauptung ist eine *psychologische*, und wenn die „menschliche Willkür", die nach Frank den Kausalsatz erzeugt, nur die *logische* sein soll, wie es jetzt den Anschein hat, so beweist sie, wie schon Hume und Kant wußten, nichts gegen die Denknotwendigkeit. Es wäre wünschenswert gewesen, wenn sich Frank, ehe er seine vernichtende Kritik der alten Philosophen schrieb, einmal die Frage vorgelegt hätte: „Was haben sich diese Herren bei ihren *Worten* über den Kausalsatz eigentlich *gedacht?*" Auch meinen Worten gegenüber hätte eine solche Frage nichts geschadet.

Bonn, Juni 1908.

1) Es war freilich sehr unakademisch und unwissenschaftlich, daß ich den Gebrauch der Worte „Logik" und „Psychologie" vermied und es dem Leser überließ, sich über die zuständige Wissenschaft durch eigenes Nachdenken Rechenschaft zu geben.

Erwiderung auf die Erwiderung von G. Hessenberg.

Von Philipp Frank in Wien.

Die Erwiderung Hessenbergs unterscheidet sich durch ihre Sachlichkeit vorteilhaft von meinen Bemerkungen, die aber nicht anders ausfallen konnten, weil Hessenbergs erste Kritik nur wenig Stoff zu sachlichen Erörterungen bot. Seine jetzige Erwiderung aber geht mehr auf den Kern der Sache ein und läßt vermuten, daß die noch zwischen uns bestehenden Differenzen sich durch ernstliches Eingehen auf den Sinn seiner und meiner Worte ausgleichen lassen werden.

Am einfachsten wäre es gewesen, wenn Hessenberg auf die an ihn gerichtete Frage „Wie lautet das Kausalgesetz?" eingegangen wäre, da ich jetzt nie sicher bin, ob er nicht vielleicht unter Kausalgesetz etwas ganz anderes versteht wie ich. Es kann daher nur die von mir in „Kausalgesetz und Erfahrung" benutzte Formulierung der Diskussion zugrunde gelegt werden. Von dieser habe ich gezeigt, daß sie eine Definition ist. Das hat Hessenberg gar nicht zu widerlegen versucht und, wenn er, wie ich glaube, unter den Erzeugnissen der logischen Willkür eben Definitionen versteht, sogar direkt zugegeben. Von psychologischer Willkür habe ich niemals gesprochen. Die Differenz zwischen Hessenbergs und meiner Meinung beginnt erst, wenn er behauptet, logische Willkür beweise nichts gegen die Denknotwendigkeit, während mir scheint, daß es gegen den Sprachgebrauch Kants und aller anderen verstößt, auf eine Definition das Prädikat „denknotwendig" anzuwenden. Der zweite Satz meines von Hessenberg zusammengestellten Beweisthemas: „Der Rahmen, den Erfahrung ausfüllt, ist kein notwendiges Gewächs der menschlichen Organisation" ist nur eine mehr bildlich ausgedrückte Ausführung desselben Gedankens und stand in meiner Arbeit gar nicht in der zu erweisenden These, sondern in den Erläuterungen. Meine These ist also durchaus keine psychologische, sondern eine rein logisch-methodologische. Wenn Hessenberg auf die hier angedeuteten Punkte etwas einginge, würde, glaube ich, die Sache bald vollständig geklärt sein.

Nach diesen prinzipiellen Feststellungen möchte ich noch auf einige spezielle Vorwürfe Hessenbergs kurz erwidern. Die Ähnlichkeit zwischen dem Fehler, den gewisse Gegner des Materialismus begehen, und dem Hessenbergs liegt darin, daß beide Gedankengänge nicht durch Aufdeckung innerer Unzulänglichkeiten, sondern durch den Hin-

weis auf die Gefährdung praktischer Interessen bekämpfen. Daß man ein Dogma mit einer Definition verwechseln kann, habe ich früher nicht geglaubt, gestehe aber, daß ich durch Hessenbergs eigenes Beispiel überzeugt wurde. Nur an die Unvermeidlichkeit dieser Verwechslung glaube ich noch immer nicht. Die Anspielung auf die scholastische Dogmatik verstehe ich nicht recht. Wenn ein Dogmatiker etwas definiert, ist es doch eine Definition. Was ferner die Definition des Zustandes betrifft, so kann ich Hessenbergs Bedenken nicht teilen. Denn bevor ich gesehen habe, daß ein Eisenstab einen anderen anzieht, kann ich doch unmöglich wissen, daß die Magnetisierung eine Zustandsgröße desselben ist. Psychologisch folgt A auf B, die Magnetisierung auf das Anziehen. Auf Grund dieser Erfahrung und der durch das Kausalgesetz gegebenen Definition des Zustandes konstruiere ich dann im Geiste das Kausalverhältnis, wo B auf A folgt.

Den Vorwurf, daß Hessenberg Gesetz mit Bedürfnis verwechselt, kann ich nicht zurücknehmen, wie die von mir schon in meinen ersten „Bemerkungen" zitierte Stelle beweist. Die psychologische Tatsache, daß unerwachte Sinneseindrücke unwillkürlich die Frage nach ihrer Ursache auslösen, hat mit den von mir behandelten methodologischen Fragen nicht das mindeste zu tun, sondern nur mit einer psychologischen Behandlung, die ich gar nicht versucht habe. Was ferner das Verhältnis von Kausalität und Weltenschöpfung betrifft, möchte ich einfach, um jede hier so naheliegende Konfusion zu vermeiden, meinen Standpunkt klarlegen. Es kann sich für die Zwecke dieser Diskussion nur darum handeln, zu zeigen, daß die Annahme einer Erschaffung der Welt dem Kausalgesetz in meiner Formulierung nicht widerspricht. Und das sieht man folgendermaßen ein: Ich kann für die Zeit vor Erschaffung der Welt eine Reihe von wechselnden Zuständen Gottes konstruieren, heute vor etwa 6000 Jahren lasse ich einen bis dahin noch nicht dagewesenen Zustand Gottes eintreten, auf den auch bisher noch nicht dagewesene Zustände folgen können. Als diese wähle ich materielle Zustände, die von nun an untermischt mit Zuständen des Schöpfers auftreten. Das Kausalgesetz ist vollständig erfüllt; ob diese Erfüllung die beste ist, hängt nur davon ab, ob man die Absicht hat, Naturwissenschaft zu treiben oder die Menschen gewissen Zwecken gefügig zu machen.

Wenn schließlich Hessenberg schreibt, Kant und Hume hätten schon dasselbe behauptet wie ich, so ist es seine Sache, die bisher nicht bekannte Tatsache zu beweisen, daß diese Philosophen den Kausalsatz als eine Definition bezeichneten, und zu zeigen, wie sich das mit der Denknotwendigkeit vereinigen läßt.

Ich glaube, daß diese Zeilen zur Aufklärung der strittigen Punkte und zur Beilegung des Streites einiges beigetragen haben.[1])

Wien, Juni 1908.

The Number of Classes of Conjugate Periodic Linear Substitutions with Rational Coefficients.

By ARTHUR RANUM at Ithaca, N. Y.

In the domain (Rationalitätsbereich) of rational numbers the totality of linear homogeneous substitutions in n variables whose determinants are different from zero form a group G, in which two substitutions L and L' are said to be *conjugate*, or equivalent, if there exists a substitution M in the group, such that $M^{-1} L M = L'$. All the substitutions that are conjugate with a given one form a *class* of conjugates.

In a recent paper in the Transactions of the American Mathematical Society, vol. 9 (April, 1908), pp. 183—202, to which I shall refer simply as *Trans.*, I have studied the *periodic* substitutions of G, determined all their periods, and given a method of constructing a canonical form for each class of conjugates. The object of this note is to supplement that paper by the derivation of a formula for computing the number of classes of conjugates, or, what is the same thing, the number of canonical forms, of the periodic substitutions of G. This number is finite and depends only on n; let it be denoted by $\chi(n)$.

By reference to *Trans.*, § 27, p. 199, we see that $\chi(n)$ is equal to the number of ways of selecting a set of positive integers so that the sum of their φ-functions (Euler's φ-function) is n. These integers are the periods of the irreducible components of a canonical form L. Suppose that L consists of ν_1 irreducible components each of degree n_1, ν_2 irreducible components each of degree n_2, etc., so that

$$(1) \qquad n = \nu_1 n_1 + \cdots + \nu_r n_r,$$

which represents a partition of n into positive integral terms.

Let the periods of the ν_i irreducible components of degree n_i $(i = 1, \cdots, r)$ be denoted by

$$(2) \qquad m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{i\nu_i} (i = 1, \cdots, r).$$

---

1) Mit den vorstehenden beiden Äußerungen der Herren Hessenberg und Frank darf die Diskussion wohl an dieser Stelle als abgeschlossen angesehen werden. Der Herausgeber.

These integers are necessarily[1]) values of $\varphi^{-1}(n_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$, which is the inverse of Euler's φ-function, and so satisfy the condition

$$(3) \qquad \varphi(m_{i1}) = \cdots\cdot = \varphi(m_{i\nu_i}) = n_i (i = 1, \cdots, r),$$

and therefore also the condition

$$\sum_{i=1}^{r} [\varphi(m_{i1}) + \cdots\cdot + \varphi(m_{i\nu_i})] = \sum_{1}^{r} \nu_i n_i = n;$$

it follows that they form a set of integers of the kind required.

Our problem then is to find the total number of ways of selecting the positive integers (2) so as to satisfy the equations (3), where the positive integers n_i and ν_i $(i = 1, \cdots, r)$ are chosen in all possible ways so as to satisfy (1). Let the number of values of $\varphi^{-1}(n_i)$ be denoted by μ_i $(i = 1, \cdots, r)$. For low values of n_i this number can be obtained from the table given in § 18, p. 194, of *Trans.* The number of ways of selecting the ν_i integers $m_{i1}, \cdots, m_{i\nu_i}$ that correspond to any given values of n_i and ν_i is obviously equal to the number of combinations of the μ_i values of $\varphi^{-1}(n_i)$ taken ν_i at a time, repetitions being allowed, namely

$$(4) \qquad \frac{\mu_i(\mu_i + 1)\cdot\cdots\cdot(\mu_i + \nu_i - 1)}{\nu_i!}.$$

Therefore the number of ways of selecting all the integers of the set (2) that correspond to any given partition of n of the form (1) is simply the product of the numbers (4) for all values of i from 1 to r. Finally, the value of $\chi(n)$ is the sum of the products so obtained corresponding to all the partitions of n. Thus we have proved the Theorem. *In the group of non-singular linear homogeneous substitutions in n variables with rational coefficients the number of classes of conjugate substitutions of finite period is given by the formula*

$$(5) \qquad \chi(n) = \sum \prod_{i=1}^{r} \frac{\mu_i(\mu_i + 1)\cdots(\mu_i + \nu_i - 1)}{\nu_i!},$$

where $\mu_i (i = 1, \cdots, r)$ *is the number of values of* $\varphi^{-1}(n_i)$, *and where the summation extends over all positive integral values of* n_i *and* ν_i *that satisfy the relation* $\sum_{1}^{r} \nu_i n_i = n$.

In the practical application of this formula those partitions of n for which any n_i has an odd value, except 1, or one of the even values 14, 26, etc., for which $\varphi^{-1}(n_i)$ does not exist, need not be

1) *Trans.*, § 10, p. 190, theorem 4, and § 14, p. 192.

considered, because in those cases $\mu_i = 0$ and the corresponding terms of the summation vanish.

As an illustration, let us compute the value of $\chi(4)$. Noticing that when $n_i = 1, 2$, and 4, the corresponding values of μ_i are 2, 3, and 4, respectively, and that the only partitions of 4 that need be considered are given by the equations $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \cdot 1$, we see immediately that

$$\chi(4) = 4 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + 3 \cdot \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 24.$$

It will be observed that in the list of canonical forms given in *Trans.*, § 28, pp. 200—202, the identical substitution is excluded as trivial, and so, for the case $n = 4$, only 23 canonical forms are enumerated, instead of 24, as here.

By successive applications of formula (5) it is easy to obtain the following results:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi(n)$	2	6	10	24	38	78	118	224	330	584	838	1420

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 7./8. (DOPPEL-)HEFT. JULI/AUGUST.

AUSGEGEBEN AM 28. AUGUST 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Das nächste Heft wird im Oktober ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Die Sterne und der Raum.

Rede[1]) beim Antritte des Rektorates der Königlichen Christian-Albrechts-Universität am 5. März 1908

gehalten von

PAUL HARZER in Kiel.

Hochansehnliche Versammlung!

Im Zeitalter der Reformation hat Koppernigk endgültig der Sonne die ihr gebührende zentrale Stellung in unserem Systeme angewiesen, die bis dahin widerrechtlich für die Erde in Anspruch genommen worden war. Kurz vor dem Beginne des dreißigjährigen Krieges hat dann Kepler die Gesetze der Planetenbewegung entdeckt, und nicht sehr lange nach dem Ende des Krieges hat Newton in der allgemeinen Schwere die Kraft gefunden, der die Bewegungen in unserem Sonnensysteme gehorchen. Seitdem hat die Astronomie, durch diese grundlegenden Taten auf den richtigen Weg gebracht, in geschickter Vereinigung der Beobachtungen und der mathematischen und numerischen Berechnung die mechanischen Verhältnisse im Sonnensysteme befriedigend erforscht. Das vorige Jahrhundert hat endlich durch die Ausbildung des Fernrohres und die Entdeckung des Spektroskopes, des Photometers, der photographischen Kamera die Hilfsmittel zur Erforschung auch der physikalischen Beziehungen der Himmelskörper geschaffen. Wir fühlen uns seitdem auch in den physikalischen Verhältnissen unseres Sonnensystemes nicht mehr fremd und dürfen hoffen, daß absehbarer künftiger Arbeit auch hier eine erschöpfende Durchforschung gelingen werde. Der in mechanischer Rücksicht

1) Dieser auf den Wunsch des Herrn Herausgebers des Jahresberichtes erfolgende zweite Abdruck meiner Rede ist an einzelnen Stellen unwesentlich überarbeitet; eine *wesentliche* Erweiterung hat aber eine Stelle erfahren, die, wie mehrere auf sie gerichtete Anfragen gezeigt haben, unter der Notwendigkeit, die Rede auf die übliche Zeit zusammenzudrängen, an Verständlichkeit zu stark gelitten hatte; es ist dies der Passus von S. 252 Z. 18 v. o. bis S. 255 Z. 11 v. o.

ihres Prinzipates beraubten Erde ist in physikalischer Beziehung eine Vorzugsstellung wieder zuteil geworden, da es nicht unwahrscheinlich ist, daß die klimatischen Verhältnisse für die Entfaltung organischen Lebens und für die Entwickelung denkender Wesen auf der Erde viel günstiger seien als auf anderen Körpern unseres Sonnensystemes.

Weit geringer sind aber bisher die Ergebnisse unserer Forschungen in dem Raume außerhalb des Sonnensystemes. Bei der gewaltigen Zahl der Sterne, bei der Größe ihrer Entfernungen, bei der geringen Bewegung unseres Beobachtungsortes im Raume sind die Erfahrungen vieler Jahrtausende für die gründliche Erforschung der Sternenwelt erforderlich, während genaue Beobachtungen noch nicht zwei Jahrtausende überspannen. Wie aber die Ausbeute eines jungfräulichen Bodens verhältnismäßig ergiebig zu sein pflegt, so haben unsere Forschungen in der Sternenwelt immerhin bereits jetzt manche wichtige Resultate mit Sicherheit ergeben. Die Sterne sind leuchtende Körper wie die Sonne, aus denselben chemischen Elementen aufgebaut und physikalisch von ähnlicher Beschaffenheit; sie bewegen sich im Raume; nach der Art wandernder Vögel haben ganze Gruppen von Sternen nahezu gleiche Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung; zu einer solchen Gruppe gehört unsere Sonne mit den hellen Sternen Capella, Beteigeuze, Wega, Atair[2]); ein großer Teil aller Sterne scheint sich zwei solchen Gruppen anzugliedern[3]). Viele Sterne stehen einander paarweise, aber auch in größerer Zahl, so nahe, daß ihre Anziehung sie in ähnlicher Weise zu gegenseitigen Umkreisungen zwingt, wie sie die Erde mit dem Monde, die Sonne mit den Planeten ausführt. Auch dunkle Sterne, die sich nur durch ihre Anziehung und ihre verfinsternde Wirkung verraten, spielen in diesen Systemen eine Rolle. Die Art dieser Bewegungen berechtigt uns zu der an und für sich wahrscheinlichen Annahme, daß das Gesetz der allgemeinen Schwere in der ganzen Sternenwelt ebenso gelte wie für unser Sonnensystem. Und die Gemeinsamkeit der Gesetze und die Gleichartigkeit des Aufbaues erweisen, daß die Sterne Sonnen sind und mit unserer Sonne eine einheitliche Welt bilden. In dieser Welt gibt es Sonnen, die hundert-, ja tausendmal größer und heller sind, als die unsrige, und wir Erdenbewohner müssen bescheiden hinter den Möglichkeiten zurückstehen, die günstigere Verhältnisse auf Planeten in den Systemen anderer Sonnen für die Entwickelung höherer Organismen darbieten können.

2) H. Kobold, Der Bau des Fixsternsystems, Braunschweig 1906, S. 146 u. f.

3) J. C. Kapteyn, Star streaming, Report of the seventy-fifth meeting of the British Association for the advancement of science. South Africa 1905. London 1906, S. 257 u. f.

Der Anblick des gestirnten Himmels treibt unsere Phantasie in die Tiefen des Weltenraumes von Stern zu Stern und erregt in uns Fragen, die eindringlichst die Antwort erheischen: Erstreckt sich die Sternenwelt in das Unendliche, oder gibt es eine Grenze, und wissen wir jenseits einer solchen Grenze unserer Sternenwelt von anderen Sternenwelten unbegrenzt fort in das Unendliche, wohin keine Vorstellung zu folgen vermag?

Wir sind imstande, die Antworten auf diese Fragen aus gewissen statistischen Durchforschungen des Himmels abzuleiten.

Es ist nicht schwer darzulegen, wie die Entscheidung der Frage der Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Sternenwelt möglich gewesen ist: Jeder Stern sendet eine gewisse Menge Licht aus, er hat eine gewisse Leuchtkraft, die für verschiedene Sterne sehr verschieden ist. Die nach sogenannten Größen bemessene Helligkeit, in der der Stern uns erscheint, hängt einerseits von seiner Leuchtkraft, andererseits von seiner Entfernung von uns ab, indem die Helligkeit mit wachsender Entfernung nach einem bestimmten Gesetze rasch abnimmt. Den Sternen nun, die wir mit unbewaffnetem Auge am Himmel erblicken, von den hellsten Sternen der ersten Größe bis zu den schwächsten Sternen, die wir der sechsten Größe zurechnen, können wir noch schwächere hinzufügen, wenn wir ein Fernrohr anwenden. Das Fernrohr vergrößert gewissermaßen die Pupille unseres Auges auf die Größe des Fernrohrobjektives, indem unserem Auge alles Licht zugeführt wird, das auf dieses Objektiv fällt. Mit der Vergrößerung des Objektivs wächst deshalb auch die Zahl der sichtbaren Sterne, indem immer schwächere hinzutreten. Die Wirkung des Fernrohres ist dabei eine zweifache: Das größere Fernrohr dringt tiefer in den Raum ein als das kleinere, nämlich bis auf die Entfernungen, in denen die Sterne von der höchsten vorkommenden Leuchtkraft als schwächste Sterne eben sichtbar werden; es zeigt aber auch innerhalb des von dem kleineren Fernrohre bestrichenen Raumes die Sterne von geringer Leuchtkraft, die der geringeren optischen Kraft des kleineren Fernrohres unerreichbar bleiben. Die Vergrößerung des Fernrohres wirkt, wie kurz und verständlich gesagt werden darf, raumerweiternd und nachlesend. Ist nun der ganze Raum bis in das Unendliche mit Sternen besetzt, so wächst die Zahl der sichtbaren Sterne mit der Größe des Fernrohres sowohl durch seine raumerweiternde wie seine nachlesende Wirkung *unbegrenzt*. Hat aber die Sternenwelt Grenzen, so wächst die Zahl der sichtbaren Sterne mit der Größe des Fernrohres *nicht unbegrenzt*. Denn, wenn die optische Kraft des Fernrohres gerade so groß geworden ist, daß in einer bestimmten Richtung ein an der Grenze stehender Stern von der höchsten

vorkommenden Leuchtkraft als schwächster Stern sichtbar wird, so ist die raumerweiternde Wirkung des Fernrohres erschöpft, und die weitere Vergrößerung des Fernrohres kann also die Zahl der sichtbaren Sterne nicht mehr raumerweiternd, sondern nur noch nachlesend erhöhen, indem die in dem begrenzten Sternensysteme eingeschlossenen schwächeren Sterne, deren Zahl selbst begrenzt ist, sichtbar werden. Das Unwirksamwerden der raumerweiternden Kraft des Fernrohres, durch das die eine der zwei Ursachen für die Vergrößerung der Zahl der sichtbaren schwächeren Sterne wegfällt, muß sich nun darin offenbaren, daß das Gesetz, nach dem die Zahl der in einer bestimmten Richtung sichtbaren Sterne mit der wachsenden Größe des Fernrohres und mit der abnehmenden Helligkeit der schwächsten Sterne wächst, ein anderes ist *vor* und ein anderes *nach* der Erreichung der Grenze. Ein etwa vorhandener Sprung in dem Gesetze kann für jede Richtung des Fernrohres durch die bloße Abzählung der Sterne bis zu bestimmten Größen festgestellt werden. Tritt der Sprung bei einer bestimmten Richtung des Fernrohres etwa bei den Sternen 13. Größe wirklich ein, so ist daraus zu schließen, daß das Sternensystem in dieser Richtung eine Grenze hat, und zwar in einer Entfernung, in der ein Stern von der höchsten vorkommenden Leuchtkraft der 13. Größe angehört.

Das vorhandene statistische Material erstreckt sich über alle Sterne des Himmels bis zur 9. Größe[4]) in Abstufungen von Zehnteln der Größe, und außerdem besitzen wir für sehr große Teile des Himmels, aber ohne Abstufung, die Zahlen der Sterne bis zur 14. Größe.[5]) Zur Über-

4) F. W. A. Argelander, Bonner Sternverzeichnis, Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn Bd. 3, 4, 5, Bonn 1859, 61, 62; Fortsetzung von E. Schönfeld, ebd. Bd. 8, Bonn 1886. (Bonner Durchmusterungen.) D. Gill und J. C. Kapteyn, The Cape Photographic Durchmusterung, Annals of the Cape Observatory V. 3, 4, 5, London 1896, 97, 1900. — J. M. Thome, Resultados del Observatorio Nacional Argentino, V. 16, 17, 18, Buenos Aires 1892, 94, 1900. — Bearbeitet sind nur die Ergebnisse der Bonner Durchmusterungen, besonders von H. von Seeliger: Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach der Bonner Durchmusterung, Sitzungsber. d. mathem.-physik. Klasse d. k. b. Akademie d. Wissensch., Bd. 14, München 1884. — Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach Schönfelds Durchmusterung, ebd. Bd. 16, 1886. — Zur Verteilung der Fixsterne am Himmel, ebd., Bd. 19, 1900. — Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne, Abhandlungen der k. Akademie d. Wissenschaften, II. Kl., Bd. 19, Abt. 3, München 1898.

5) Die Sterneichungen von W. und J. Herschel. — E. S. Holden, The star-gauges of William Herschel, Publications of the Washburn Observatory, V. II. Madison 1884. — J. Herschel, Results of astronomical observations made 1834—38 at the Cape of Good Hope, London 1847. — Die Größenklasse, bis auf die diese Sterneichungen geben, ist etwas unsicher; die angegebene Zahl 14.0 ist eine der Wahrheit wahrscheinlich sehr nahe kommende Vermutung.

brückung des Zwischenraumes zwischen den Sternen der 9. und 14. Größe in Abstufungen haben wir bisher noch kein ausreichendes Material. Aber auch das vorhandene Material genügt, um mit Sicherheit zu bezeugen, daß der Sprung in allen Richtungen wirklich vorhanden ist und zwischen der 9. und 14. Größe erfolgt.[6]) Es ist damit erwiesen, daß die uns sichtbare Sternenwelt in allen Richtungen begrenzt ist oder — wie wir es ausdrücken wollen — ein *System* bildet. Bei seiner Unvollständigkeit gestattet das Material, das gewiß in absehbarer Zeit ergänzt sein wird, genauere Bestimmungen über die Beschaffenheit des endlichen Sternensystemes zunächst nur dann, wenn gewisse Annahmen über die Leuchtkraft der Sterne gemacht werden. Die plausible Annahme, daß das Mischungsverhältnis der Sterne von verschiedener Leuchtkraft an allen Stellen des Systemes dasselbe sei[7]), ergibt aus den Zählungen, soweit sie in Abstufungen vorliegen, sogleich die Dichtigkeit, mit der die Sterne in einer bestimmten Richtung im Raume verteilt sind. Nimmt man überdies noch an, daß jenes Mischungsverhältnis in bezug auf die Leuchtkraft gleichmäßig sei, daß also Sterne von allen Abstufungen der Leuchtkraft von der höchsten bis zur verschwindenden an allen Stellen des Raumes prozental gleich häufig vorkommen[8]), so können wir die Lücke des Materiales zwischen den Sternen der 9. und 14. Größe überbrücken und auch die Lage des Sprunges, die Gestalt und Ausdehnung des Sternensystemes, die Dichtigkeit, mit der die Sterne beliebige Stellen des Raumes erfüllen, und die Gesamtzahl aller Sterne, auch derjenigen bestimmen, die wegen ihrer Schwäche noch kein Fernrohr gezeigt hat und keines zeigen wird.

Bei der Durchführung der Rechnungen auf dieser Grundlage hat man bisher angenommen, daß das Licht auf seiner Wanderung durch den Weltenraum nur durch seine geometrische Ausbreitung auf größere Flächen, nicht aber durch *Absorption* geschwächt werde. Es kam überdies bei diesen Rechnungen darauf an, die Beschaffenheit des Sternensystemes nicht in einzelnen Zügen, sondern nur in großen Umrissen festzustellen. Es sind deshalb auch die Verhältnisse nicht in einzelnen Richtungen untersucht, sondern die Beobachtungsergebnisse für große Flächen der Himmelskugel zusammengezogen worden, schon um den

---

6) Herr von Seeliger in der letzten unter 4) angeführten Arbeit, S. 593. Durch Hinzuziehung der Zählungen des Herrn G. Celoria (Sopra alcuni scandagli del cielo e sulla distribuzione generale delle stelle nello spazio, Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano. V. 13, Milano 1877), die allerdings nur einen kleinen Teil des Himmels decken, wird die untere in Größenklassen ausgedrückte Grenze des Intervalles, in dem der Sprung erfolgt, auf etwa 11.5 erhöht.

7) u. 8) Beide Annahmen hat Herr von Seeliger in der letzten der unter 4) genannten Arbeiten (S. 601 u. 611) eingeführt.

Einfluß von Zufälligkeiten zu vermindern und eine größere Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen der über das Mischungsverhältnis gemachten Annahmen zu gewinnen. Die Art der Einteilung des Himmels in größere Flächen war dabei durch die Milchstraße gegeben[9]), jenes etwas unregelmäßige, den Himmel umgürtende, in zwei ungefähr gleiche Teile zerlegende Band, dessen Schimmer, wie schon das unbewaffnete Auge vermuten läßt und das Fernrohr bestätigt, durch dichtgedrängte schwache Sterne entsteht. Beträchtliche regelmäßige Verschiedenheiten in der Anordnung der Sterne bestehen weder längs der Milchstraße noch längs ihr parallel laufender Streifen der Himmelskugel. Man darf sich deshalb, um ein genähertes Bild zu erhalten, mit der Untersuchung der Verhältnisse unseres Sternensystemes in verschiedenen Richtungen zur Milchstraße begnügen. Es ist ferner ratsam, die nächste Umgebung der Sonne von der Betrachtung auszuschließen, weil bei der verhältnismäßig geringen Zahl der Sterne in ihr Zufälligkeiten der Anordnung eine sonst vorhandene Gesetzmäßigkeit gefährden können. Das Beobachtungsmaterial ergibt nun[10]), daß die Sonne nicht sehr fern von der Mitte des Systemes liegt, daß die Dichtigkeit, in der

9) Herr von Seeliger teilt den Himmel, parallel der Milchstraße, in sieben je 20° breite Zonen und zwei Kalotten von 20° Halbmesser um die Pole der Milchstraße ein.

10) Herrn von Seeligers Rechnungen beruhen nur auf dem Materiale der Bonner Durchmusterungen und der Herschelschen Sterneichungen; sie finden sich in den zwei letzten der unter 4) angeführten Arbeiten. Ich habe die kleine Umrechnung der Resultate der zuletzt genannten Arbeit, mit Berücksichtigung der systematischen Verbesserungen vorgenommen, die in der an vorletzter Stelle angeführten, späteren Arbeit abgeleitet worden sind. Bei Anschließung an die Seeligersche Bezeichnung ergaben sich dann aus den Werten von λ, $\frac{H}{D}$ und der zu 14.0 angenommenen Größe der schwächsten Herschelschen Sterne, die in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Werte von n, A_∞, r_n, L, $\mathfrak{D}$

Zone	λ	$\frac{H}{D}$	n	A_∞	r_n	L	$\mathfrak{D}$
Polarkalotten I, IX	0.82	46.2	12.41	0.31	157000000	2480	11.2
II, VIII	0.72	61.5	12.54	1.28	167000000	2630	8.8
III, VII	0.49	79.8	12.40	3.41	156000000	2470	4.2
IV, VI	0.36	113.8	12.53	9.73	166000000	2620	3.0
Milchstraße V	0.28	275.4	13.28	20.59	235000000	3700	2.6

Die Einheit bei den Werten A_∞, die die Anzahl aller Sterne der betreffenden Zone darstellen, ist die Million. Die Werte von r_n stellen die Entfernungen der Grenze in Einheiten der Entfernung der Erde von der Sonne dar. Sie sind aus den Werten n der Größe, die ein Stern von der höchsten Leuchtkraft an der Grenze hat, unter der Voraussetzung berechnet worden, daß ein solcher Stern bei einer Parallaxe von 1″ der Größe —2.0 zugehöre, und daß die Helligkeit, ohne

die Sterne im Raume verteilt sind, in allen Richtungen nach außen bis zu den Grenzen des Systemes abnimmt, in der Milchstraße, mit Ausschluß der Umgebung der Sonne, etwa im Verhältnisse von 5 : 2, in gegen die Milchstraße geneigten Richtungen allmählich stärker, senkrecht zur Milchstraße im Verhältnisse von 11 : 1. Der Sprung im Gesetze der Sternzahlen liegt in der Milchstraße und senkrecht zu ihr bei den Sternengrößen 13.3 und 12.4, und es folgt daraus, daß das Sternensystem die Gestalt eines an den Polen der Milchstraße etwas flach gedrückten Rotationskörpers hat. Mit Hilfe bekannter Entfernungen von Sternen ergeben sich die Durchmesser des Sternensystemes in der Milchstraße und senkrecht zu ihr 470 und 310 Millionen mal größer als die Entfernung der Sonne von der Erde. Das Licht, das in einer Sekunde einen Weg zurücklegt, der $7^1/_2$ mal so lang ist als der Umfang der Erde am Äquator, braucht, um das Sternensystem in den beiden Richtungen zu durchqueren, 7400 und 5000 Jahre. Bei dem Anblicke des gestirnten Himmels bieten sich uns also gleichzeitig Erscheinungen dar, die in ihrer Entstehung zeitlich bis zu fast 4000 Jahren auseinander liegen. Das uns jetzt erreichende Licht des fernsten sichtbaren Sternes ist ungefähr seit einer Zeit unterwegs, auf die die Anfänge der Geschichte des Menschengeschlechtes vielleicht eben zurückreichen. Die Zahl der leuchtenden Sterne überhaupt beträgt 35 Millionen, und dazu liefert der 20° breite Gürtel der Milchstraße allein 21 Millionen.

In diesen Ergebnissen kann eine Änderung eintreten, wenn unsere Voraussetzungen über das Mischungsverhältnis der Sterne nicht zutreffen, und wenn das Licht im Weltenraume eine Absorption erleidet. Bei der Berücksichtigung einer etwa vorhandenen Absorption würde das Sternen-

---

Absorption, wie die reziproke zweiter Potenz der Entfernung abnehme. Die entsprechende Formel ist

$$r_n = \varrho a^{\frac{n}{2}+1}, \quad \varrho = 206\,265, \ \log_{br} a = 0.4.$$

Die Größen L sind die Werte von r_n in Einheiten des Lichtjahres ausgedrückt. Für die Dichtigkeit D der Sterne in die Entfernung r gilt die Formel

$$D = \gamma r^{-\lambda},$$

in der γ nur von der Neigung der jeweilig betrachteten Richtung gegen die Milchstraße abhängt. Bei der Vergleichung der Dichtigkeiten in derselben Richtung schließen wir die Sterne innerhalb einer Kugel aus, auf deren Oberfläche ein Stern von der höchsten Leuchtkraft die Größe 6.0 haben würde. Das in der Tabelle mit angegebene Verhältnis $\mathfrak{D}$ der Dichtigkeit der Sterne auf der Oberfläche dieser Kugel zu der an der Grenze geltenden ist also nach der Formel

$$\mathfrak{D} = a^{\left(\frac{n}{2}-3\right)\lambda}$$

zu berechnen.

system dichter zusammengedrängt gefunden werden, die Gesamtzahl der Sterne aber unverändert bleiben.[11]) Welche Annahme man aber auch über das Mischungsverhältnis der Sterne und die Größe der Absorption machen möge, so bleibt das wichtigste Ergebnis völlig unberührt bestehen, daß das Sternensystem eine *endliche* Ausdehnung hat.

Unsere erste Frage ist damit erledigt. Auch auf die zweite, ob außerhalb unseres Sternensystemes andere Sternensysteme bekannt seien, können wir aus statistischen Ergebnissen unserer Durchforschung des Himmels die Antwort finden.

Schon das unbewaffnete Auge erkennt am Himmel einige kleine Stellen matten verwaschenen Lichtes, und mit Hilfe des Fernrohres sind gegen 10000 solcher Stellen gefunden worden. Das Fernrohr und das Spektroskop lehren uns, daß diese Gebilde zum geringen, etwa dem fünfzehnten Teile, dichte Ansammlungen von Sternen, oft zu vielen Tausenden sind, meist aber als Nebel bezeichnete, gewöhnlich mit Sternen vereinigte Massen von Gasen und staubförmigen Stoffen, die uns durch die Beleuchtung benachbarter Sterne und überdies vermutlich dadurch sichtbar werden, daß sich die von den Sternen wie von der Sonne mit Lichtgeschwindigkeit ausgeschleuderten negativ elektrisch geladenen Partikelchen bei dem Eindringen in die Nebel entladen. Früher wurde angenommen, daß diese verschiedenen Gebilde weit außerhalb unseres Sternensystemes liegende Welten in allen Stadien einer Entwickelung wären, die jedes Sternensystem mit dem reinen Nebel beginnend und bis zum reinen Sternhaufen, bei dem unser Sternensystem bereits angekommen wäre, fortschreitend zu durchlaufen hätte. Dieser Gedanke, daß uns so eine Entwickelungsgeschichte der Sternensysteme vor die Augen gestellt sei, hat aber der Forschung nicht standzuhalten vermocht. Spricht schon die Klarheit der Bilder und die Helligkeit der einzelnen Sterne in beiden Arten von Gebilden dagegen, daß sie weit außerhalb der Grenzen unseres Sternensystemes lägen, so ist auch hier wieder ein Ergebnis der Statistik entscheidend: Die Sternhaufen finden sich nämlich fast nur in der Milchstraße; die Nebel sind im Gegensatze dazu in der Milchstraße am seltensten, um so häufiger, je weiter sie von der Milchstraße abstehen, an den Polen der Milchstraße aber auf gleichen Flächen des Himmels mehr als dreißigmal häufiger, als in der Milchstraße.[12]) Durch diese systematische,

---

11) Man vergleiche die Behandlung des Problemes im Raume von konstanter positiver Krümmung unter 19).

12) W. Stratonoff, Études sur la structure de l'Univers, Publications de l'Observatoire de Tachkent No. 2, 3 mit Atlas, Tachkent 1900, 01. Besonders kommt No. 2, S. 38 u. f. in Frage.

regelmäßige Anordnung in bezug auf die für *unser* Sternensystem charakteristische Milchstraße werden diese Gebilde wohl alle mit Bestimmtheit als Teile unseres Sternensystemes erwiesen, und die zueinander räumlich komplementäre Anordnung beider Gebilde spricht gegen die Annahme, daß beide verschiedene Stadien derselben Entwickelung darstellen.

Nachdem die Sternhaufen und Nebel bei der Nachforschung nach außerhalb unseres Sternensystemes liegenden, ihm fremden Gebilden ausgeschieden sind, ergibt sich die folgende Antwort auf die zweite Frage: Wir wissen nichts von anderen Welten; wenn solche bestehen, so müssen sie von unserem Sternensysteme durch massenleere Räume von einer gegen die Dimensionen unseres Sternensystemes großen Ausdehnung getrennt sein, durch Räume, die kein Licht, keine Kraft, kein Existenzzeichen irgendwelcher Art zu uns dringen lassen.

Wenn wir außerhalb unseres Sternensystemes noch andere Welten vermuten, so beruht das wesentlich darauf, daß wir uns den Raum unendlich groß zu denken gewöhnt sind, und daß wir etwas suchen, um die unfruchtbare unendliche Leere auszufüllen. Von Zweifeln an der Unendlichkeit des Raumes sind wir aber durchaus nicht frei: Der unendliche Raum möge mit Sternen, also mit Massen, die im allgemeinen Licht aussenden und stets Anziehungen ausüben, völlig besetzt sein, wenn auch nur in der Weise, daß ihn weit voneinander getrennte Sternensysteme von der Art des unsrigen erfüllten. Gilt dann für die Abnahme der Helligkeit der Sterne und ihrer Anziehungen mit wachsender Entfernung in Strenge das *beiden* Erscheinungen gemeinsame, einfache Gesetz, das sich in betreff der Anziehung gegenüber einer äußerst strengen Prüfung innerhalb der Grenzen unseres Sonnensystemes als richtig erwiesen hat, in betreff der Helligkeit aber einer ähnlich scharfen Prüfung nicht unterzogen werden kann, so entstehen zwei unseren Erfahrungen grell widersprechende Folgen: Erstens würden wir nicht einzelne Sterne auf dem dunklen Himmelsgrunde erblicken, die Sterne würden vielmehr die ganze scheinbare Himmelskugel mit einem hellen Glanze ausfüllen, von dem sich weder die Sterne noch selbst die Sonne abheben könnten, vor dem aber der Mond und die Planeten dunkel erscheinen müßten. Zweitens aber würden aus der Anziehung aller Sterne auf alle Massen im Raume widersinnige mechanische Wirkungen[13]) entstehen, unter denen z. B. die vorhandene Stabilität unseres

13) H. v. Seeliger, Über das Newtonsche Gravitationsgesetz, Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften, Bd. 26, München 1897. — C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig 1896.

Sonnensystemes unmöglich würde. Damit diese Erscheinungen verschwinden, dürften sich entweder die Massen nur über einen endlichen Teil des unendlichen Raumes erstrecken — und dann bliebe die unendliche Leere — oder der Raum müßte die Eigenschaft haben, das Licht und die anziehende Kraft nicht ungeschwächt hindurchzulassen, sondern einen mit der Länge des Weges wachsenden Teil von ihnen zu absorbieren. Für eine solche Eigenschaft des Raumes bestehen zwar in betreff des Lichtes keinerlei Bedenken, für eine Absorption der Kraft aber können wir in unseren weitgehenden Erfahrungen keine Andeutung finden, und eine dennoch vorhandene Absorption könnte sich erst in großen Entfernungen, weit außerhalb der Grenzen unseres Sonnensystemes, geltend machen.

Noch wichtiger als diese Erwägungen erscheint die Schwierigkeit, daß die Erhaltungsgesetze für Energie und Materie, die in der Entwickelung unserer naturwissenschaftlichen Kenntnisse eine wichtige Rolle spielen, keine klare Bedeutung haben, wenn sie sich nicht auf geschlossene Systeme, also auf einen endlichen Raum beziehen, den wir in den konkreten Fällen der Anwendung wenigstens ideell herzustellen bemüht sind. Die von den Sternen eines jeden endlichen Systemes unaufhörlich geradlinig ausstrahlenden Mengen von Energie und Materie sind für das System im unendlichen Raume verloren, wenn sie auch in den von anderen Systemen zustrahlenden Mengen teilweise einen Ersatz finden. Diesen Bedenken gegen die Unendlichkeit des Raumes tritt die Befriedigung verstärkend hinzu, die es uns gewähren würde, wenn wir mit dem Raume das Gebiet unserer Forschungen als *endlich* betrachten dürften.

Was ist nun der Raum? In der unserer Organisation entsprechenden Auffassung ist er ein Gebilde, das nach drei Richtungen von unten nach oben, von rechts nach links und von hinten nach vorn völlig ausmeßbar ist. Diese drei Richtungen oder *Dimensionen* sind für uns hinreichend und notwendig für eine erschöpfende geometrische Behandlung aller räumlichen Verhältnisse. Der Raum wird deshalb ein *dreidimensionales Gebilde* genannt. Wir haben die Fähigkeit, unsere Anschauung von drei auf zwei und eine Dimension zu beschränken. Eine im Raume liegende Fläche wird zum Beispiel durch nur zwei Dimensionen gemessen. Wenn wir uns auf der Fläche, etwa der Oberfläche einer Kugel senkrecht stehend denken, wird sie allein durch die Richtungen von rechts nach links und von hinten nach vorn bestimmt, und wir können für die Veranschaulichung und die geometrische Behandlung der räumlichen Verhältnisse in der Fläche von der dritten Richtung von unten nach oben völlig absehen, also aus dem *dreidimen-*

sionalen Raume einen *zweidimensionalen Raum* ausscheiden und unsere dreidimensionale Anschauungsform auf eine nur zweidimensionale und in ähnlicher Weise auch auf eine nur *eindimensionale* beschränken. Der umgekehrte Weg, den Raumbegriff zu erweitern und über die drei Dimensionen unserer Auffassung hinauszugehen, ist für uns aber nicht ganz frei. Nichts zwar hindert, die Geometrie auf Räume von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen; die Fähigkeit, uns die geometrischen Verhältnisse zu *veranschaulichen*, fehlt uns aber — vielleicht nicht für immer — schon in dem Raume von vier Dimensionen.

Worauf beruht nun unsere Vorstellung, daß der Raum unendlich groß sei? Sie könnte entweder in der Erfahrung oder in einer Denknotwendigkeit für unseren Verstand wurzeln. Aus der Erfahrung aber kann die Vorstellung nicht unmittelbar fließen; über das Unendliche kann im endlichen Gebiete unserer Erfahrung nichts enthalten sein. Die Vorstellung eines unendlichen Raumes könnte also, insoweit die Erfahrung mitwirkt, nur durch eine Verallgemeinerung gewisser im endlichen gewonnener Ergebnisse entstehen. Dann wäre aber die Berechtigung einer über alle Grenzen hinauswachsenden Verallgemeinerung, die durch keine Erfahrung geprüft werden könnte, zweifelhaft.

Die Frage aber, ob der unendlich große Raum eine Denknotwendigkeit für unseren Verstand sei, läßt sich nicht, wie man zu tun geneigt ist, durch die Untersuchung darüber entscheiden, ob wir uns eine Grenze des Raumes veranschaulichen können oder nicht. Denn, wenn wir auch unserer Unfähigkeit, uns eine Grenze des Raumes vorzustellen, entscheidende Kraft geben wollten, so würde daraus noch nicht folgen, daß der Raum unendlich groß sei. Daß die Begriffe „unbegrenzt" und „endlich" keine Gegensätze sind, zeigt, bei Beschränkung auf einen Raum von nur zwei Dimensionen der einfache, uns sofort anschauliche Fall der Oberfläche einer Kugel, die keine Grenzen hat und dennoch endlich ist. Ein Wanderer kann auf der kugelförmig und meer- und bergelos gedachten Erde in allen Richtungen gehen, ohne auf eine Grenze zu stoßen, und dennoch ist die unbegrenzte, in Quadratkilometern des Inhaltes angebbare Oberfläche der Kugel endlich.

Man muß an die Frage, ob wir gezwungen sind, den Raum unendlich groß anzunehmen, von einem ganz anderen Ausgangspunkte herantreten. Die von uns gewöhnlich angenommene Unendlichkeit des Raumes ist eine unvermeidliche Folge der *Geometrie*, die wir alle von Jugend auf, in ihren Elementen wenigstens, kennen und anwenden lernen. Diese Geometrie erscheint in ihren Grundlagen und Folgerungen notwendig und unerschütterlich, und unsere Erfahrungen in dem gesamten Gebiete naturwissenschaftlicher Forschungen haben sie bisher

vor jedem Zweifel an ihrer objektiven Richtigkeit geschützt. Man hat diese Geometrie in ihren des Beweises nicht bedürftig erscheinenden Grundlagen und in ihren daraus nach notwendigen Denkgesetzen gezogenen Folgerungen als eine Wissenschaft a priori betrachtet, als einen Besitz aus der göttlichen Abstammung unseres Geistes. Die Mathematik des verflossenen Jahrhunderts hat nun die Grundlagen dieser Geometrie geprüft, ursprünglich in der Absicht, sie zu befestigen und damit die Herrschaft der üblichen Geometrie als legitim zu erweisen. Es hat sich dabei gezeigt, daß in den Grundlagen der gewöhnlichen Geometrie eine unnötige Beschränkung, das sogenannte Euklidische Parallelenaxiom, eingeführt war. Diese Beschränkung ist beseitigt[14]) und zur Unterscheidung des Raumes von anderen Gebilden dreier Dimensionen dafür die Bedingung eingeführt worden, daß man in ihm feste Körper bei unveränderter Form in beliebiger Weise frei bewegen könne. Die Bedeutung dieser Bedingung, und daß sie eine tatsächliche Beschränkung darstelle, ergibt sich für den zweidimensionalen Raum aus der Erwägung, daß man in anschaulicher Weise zwar aus der materiell und unendlich dünn gedachten Oberfläche einer Kugel oder auch eines geraden Zylinders ein dreieckiges, von kürzesten Linien begrenztes Stück herausschneiden und bei völligem Anliegen an die betreffende Oberfläche beliebig verschieben und drehen kann, ohne daß die Länge der Seiten und die Größe der Winkel geändert würden, daß dieses Verfahren aber auf der Oberfläche eines Ellipsoides oder eines Eies offenbar nicht möglich ist. Es hat sich nun auf der erweiterten Grundlage ergeben, daß unsere übliche Geometrie nur ein spezieller Fall einer *allgemeiner möglichen Form* ist. In den geometrischen Beziehungen der allgemeinen Form kommt eine gewisse konstante Größe, die sogenannte *Krümmung*, vor. Die speziellen Fälle scheiden sich aus der allgemeinen Form dadurch aus, daß die Krümmung einen bestimmten Wert annimmt. Unserer gewöhnlichen Geometrie gehört ein verschwindender Wert der Krümmung zu; sie nimmt also eine Mittelstellung unter den möglichen Formen ein, die durch positive oder negative Werte der Krümmung charakterisiert sind. Kein spezieller Wert der Krümmung kann aber als a priori vorberechtigt erscheinen; nur die Erfahrung kann lehren, welcher Wert der Krümmung in der Geometrie des tatsächlich existierenden Raumes gültig ist. Damit ist der Geometrie die Vorzugsstellung einer Wissenschaft

14) Aus der umfangreichen Literatur der Geometrie der Räume von konstanter Krümmung möge wenigstens *eine* Arbeit genannt werden: E. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di matematica pura ed applicata serie II, V. 2, Roma 1869.

a priori entrissen und ihr, als Wissenschaft der Erfahrung, ihre Stellung unter den anderen Wissenschaften dieser Art, der analytischen Mechanik und den exakten Naturwissenschaften angewiesen worden, unter denen sie allerdings als allzeit bereite mächtige Hilfswissenschaft eine hervorragende Stelle beanspruchen darf.

Den verschiedenen Formen der Geometrie entsprechen verschiedene Eigenschaften des Raumes, in dem sie gültig sind. Zur Herstellung der geometrischen Beziehungen in diesen Räumen, die man als Räume konstanter Krümmung bezeichnet, verbindet man die Punkte durch kürzeste Linien, wie sie auch in dem gewöhnlichen Raume in den dann gerade genannten Linien benutzt werden. Geht man in dem gewöhnlichem Raume von einem Punkte aus immer in der kürzesten, also in der geraden Linie in derselben Richtung fort, so entfernt man sich von dem Ausgangsorte immer mehr bis in das Unendliche. Geht aber unser Wanderer, der in seinem Wege *an die Oberfläche* der kugelförmigen Erde, also *durch die Raumform gebunden* ist, gleichfalls in der kürzesten Linie in einer und derselben, aber beliebigen Richtung weiter, so wandert er auf einem größten Kreise der Kugel; er entfernt sich von seinem Ausgangsorte nur, bis er die Hälfte des größten Kreises zurückgelegt hat, dann nähert er sich, indem er seinen Weg in derselben Richtung fortsetzt, seinem Ausgangsorte wieder und erreicht ihn nach Umkreisung der ganzen Erde, und nachdem er einen Weg von einer zwar von der Größe der Kugel, nicht aber von der eingeschlagenen Richtung abhängigen Länge zurückgelegt hat. Und alle Wege von gleicher Länge, die er gehen kann, führen ihn zu dem *einen* Punkte, dem Ausgangsorte zurück. Ein in diesem Ausgangsorte stehenbleibender Beobachter sieht den Wanderer in der einen Richtung verschwinden und nach geraumer Zeit aus der entgegengesetzten Richtung wieder erscheinen.

Der Wanderer bedarf nun, um die geometrischen Verhältnisse auf der Kugeloberfläche erschöpfend zu behandeln, allein der zweidimensionalen Anschauungsform; die Veranschaulichung der dritten Richtung von unten nach oben ist für ihn ganz überflüssig. Geht nun unser, zum Landmesser umgewandelter, Wanderer an die Ausmessung kleiner Gebiete der Kugel, von Feldern, Stadtgebieten, heran, so findet er, daß die Formeln der gewöhnlichen Geometrie widerspruchslos anzuwenden sind; erst, wenn er größere Gebiete, ganze Länder, zu vermessen hat, wird er bemerken, daß seine Geometrie nicht stimmen will, und daß er die erforderliche Übereinstimmung erst erreichen kann, wenn er statt der gewöhnlichen Geometrie die sphärische anwendet, die gleichfalls schon in unseren höheren Schulen gelehrt wird. Ja, er wird aus

seinen Beobachtungen die Länge der in sich zurückkehrenden kürzesten Linien und den Halbmesser der Kugel zu bestimmen vermögen, der in die Formeln der sphärischen Geometrie als unbekannte Größe eingeht. Alle diese geometrischen Operationen, besonders den Übergang von der gewöhnlichen zur sphärischen Geometrie, der in der geschichtlichen Entwickelung der Erdmessung tatsächlich erfolgt ist, würde unser Landmesser auch dann ohne jede Beschränkung, so gut wie wir auszuführen vermögen, wenn er nur die zweidimensionale Anschauungsform besäße. *Eines* würde er dann aber nicht können: er würde sich nicht *anschaulich* zu machen vermögen, wie alle kürzesten Linien in seinem unbegrenzten Gebiete nach ihrem Ausgangsorte zurückkehren, und wie das unbegrenzte Gebiet seiner Vermessungen eine endliche Ausdehnung besitzen kann. Diese Zusammenhänge werden uns, bei unserer dreidimensionalen Anschauungsform erst dadurch klar, daß wir die Fähigkeit der Veranschaulichung auch der dritten Richtung von unten nach oben haben und uns die Kugel als ein im dreidimensionalen Raume liegendes *geschlossenes* zweidimensionales Gebilde *anschaulich* vorzustellen vermögen. Der Wanderer hat aber ersichtlicher Weise kein Recht, deshalb an der Richtigkeit seiner Ergebnisse zu zweifeln, weil er bei nur zweidimensionaler Anschauungsform die Fähigkeit nicht besitzt, sich Unbegrenztes als endlich zu veranschaulichen. Die widerspruchslose Durchführung der sphärischen Geometrie ist vielmehr ein vollgültiger Beweis für ihre Realität und die Existenz der Raumform, in der sie gültig ist.

Verallgemeinert man die hierdurch anschaulich gewordenen Verhältnisse im zweidimensionalen Raume auf den dreidimensionalen Raum unserer Anschauungsform, so ergibt sich das folgende Bild: Geht ein Wanderer, *durch die Raumform gebunden*, von einem beliebigen Ausgangsorte in irgendwelcher Richtung in einer kürzesten Linie in den Raum hinaus, immer weiter, so entfernt er sich zunächst von dem Ausgangsorte, bis er eine größte Entfernung erreicht hat; dann nähert er sich weiterschreitend dem Ausgangsorte wieder und kehrt schließlich zu ihm zurück, nachdem er einen Weg zurückgelegt hat, der für alle Richtungen dieselbe nur von der Beschaffenheit des Raumes abhängige Länge besitzt. Und auf jedem der Wege gleicher Länge, die er in verschiedenen Richtungen einschlagen kann, gelangt er zu dem *einen* Punkte, dem Ausgangsorte zurück. Für einen in diesem Ausgangsorte verbleibenden Beobachter geht der Wanderer in einer bestimmten Richtung fort und kommt nach einer der Länge des Weges und der Geschwindigkeit des Marsches entsprechenden Zeit aus der entgegengesetzten Richtung wieder.

In einem kleinen Gebiete des Raumes, das wir als *neutrales* bezeichnen wollen, gilt die gewöhnliche Geometrie mit einer Genauigkeit, die gegenüber den unvermeidlichen Unsicherheiten der Beobachtungen ausreicht. Für größere Gebiete wird aber die gewöhnliche Geometrie unzulänglich und muß durch die sphärische Geometrie ersetzt werden. Aus Beobachtungen in diesem Raume, die das neutrale Gebiet überschreiten, ist man imstande, die Länge des zurückführenden Weges zu ermitteln.

Die dreidimensionalen Räume, in denen diese Geometrie tatsächlich gilt, sind als besondere Fälle in dem allgemeinen Raume konstanter positiver Krümmung enthalten. Das Wichtigste für uns ist, daß diese besonderen Räume, obwohl sie grenzenlos sind, dennoch eine *endliche* Ausdehnung haben, während die übrigen Räume konstanter positiver Krümmung und alle Räume konstanter negativer Krümmung wie der gewöhnliche Raum unendlich groß sind.

Wir haben nun die uns als Ausgang für die Verallgemeinerung dienende Skizze der Verhältnisse im zweidimensionalen Raume der Kugeloberfläche in allen Zügen dadurch zu unserer *Anschauung* bringen können, daß wir die dreidimensionale Anschauungsform besitzen. Entsprechend müßten wir die Fähigkeit der vierdimensionalen Anschauung haben, um uns die Zusammenhänge auch *anschaulich* vorzustellen, die dazu führen, daß im dreidimensionalen Raume die kürzesten Linien in sich zurückkehren und der Raum selbst unbegrenzt und endlich ist. Aus dem Mangel dieser Fähigkeit kann aber, wie das Analogon des zweidimensionalen Raumes zeigt, ein Zweifel an der Existenz eines endlichen Raumes dann nicht abgeleitet werden, wenn uns die Erfahrung lehren sollte, daß die sphärische Geometrie in dem Raume gilt. Und ein solcher Zweifel wäre um so weniger berechtigt, als sich auch die unendliche Ausdehnung der anderen Räume unserer Anschauung völlig entzieht und uns nur die Gewohnheit abhält, hierin auch bei dem gewöhnlichen Raume einen Mangel zu empfinden.

Die Unendlichkeit des Raumes ist also keine Denknotwendigkeit für unseren Verstand.

Kann nun der wirklich existierende Raum eine endliche Ausdehnung, vielleicht eine so geringe haben, daß unser Sternensystem schon deshalb das einzige ist, weil weitere Sternensysteme darin keinen Platz fänden?

Unsere Erfahrungen in dem Sonnensysteme können bei der Beantwortung dieser Frage nicht mitsprechen. Der Umstand, daß wir die geometrischen Verhältnisse im Sonnensysteme ausreichend mit der gewöhnlichen Geometrie beherrschen, beweist nur, daß das Sonnensystem

ganz im neutralen Gebiete liegt. Damit scheidet aber nur ein verschwindend kleiner Teil des von den Sternen erfüllten Raumes aus; in dem Gebiete der Sternenwelt muß die Entscheidung fallen. Wir sind nun noch weit davon entfernt, über Messungen zu verfügen, die eine bestimmte Antwort auf die entscheidende Frage gestatteten, ob in diesem weiten Gebiete die gewöhnliche Geometrie *nicht* gelte, deren Gültigkeit bisher stillschweigend angenommen worden ist, unter anderem auch bei der Ableitung der Ergebnisse über die Beschaffenheit des Sternensystemes, von denen ich vorher gesprochen habe. In dem Interesse, das wir an der *Endlichkeit* des Raumes gewonnen haben, können wir uns zunächst nur die Frage stellen, ob und unter welchen Beschränkungen die Endlichkeit des Raumes mit unseren gegenwärtigen physikalischen und statistischen Erfahrungen vereinbar sei, die immerhin vielleicht schon jetzt unüberwindliche Widersprüche ergeben könnten.

Dafür muß das bisher nur in geometrischer Beziehung skizzierte Bild des endlichen Raumes in physikalischer Beziehung vervollständigt werden.

Den als persönliches Wesen nur *denkbaren* Wanderer durch den dreidimensionalen Weltenraum *verwirklicht* das Licht, das wie alle Energie erfahrungsgemäß den Raum in kürzesten Linien durcheilt, soweit es nicht durch Hindernisse gehemmt wird. Zugleich ermöglicht uns das Licht die Geometrie des Raumes zu ergründen. Ein einzelner Lichtweg, ein *Lichtstrahl*, der von einem im endlichen Raume ruhenden leuchtenden Punkte aus in bestimmter Richtung in den Weltenraum hinausgeht, bildet deshalb eine geschlossene Linie von einer endlichen, für alle Lichtstrahlen gleichen und nur von der Beschaffenheit des Raumes abhängigen Länge, den *Lichtkreis*. Das Licht durchwandert einen Lichtkreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit, der *Umlaufszeit*, kehrt nach deren Verlaufe zum leuchtenden Punkte zurück und tritt ohne Unstetigkeit aufs neue in seine bereits einmal durchwanderte Bahn ein, die es unaufhörlich fortfährt zu durchkreisen. Zwei Lichtstrahlen, die von dem leuchtenden Punkte aus in entgegengesetzten Richtungen ausgehen, beschreiben *denselben* Lichtkreis in entgegengesetzten Bewegungsrichtungen. Zwei von einem leuchtenden Punkte ausgesandte Lichtstrahlen aber, die nicht in demselben Lichtkreise wandern, entfernen sich anfangs voneinander, wie zwei nicht zusammenfallende kürzeste Linien, also größte Kreise, in dem *zweidimensionalen* Raume der Kugeloberfläche; wie diese erreichen aber die zwei Lichtstrahlen eine größte Entfernung voneinander, nähern sich dann einander wieder und treffen in einem Punkte zusammen, in dem sich auch alle übrigen von dem leuchtenden Punkte nach allen Richtungen

ausgesandten Lichtstrahlen wieder vereinigen. Während aber auf der Kugeloberfläche der *erste* Wiedervereinigungspunkt der von einem Punkte ausgehenden kürzesten Linien dem Ausgangspunkte in anschaulicher Weise diametral gegenüber liegt, also von ihm verschieden ist, und die Rückkehr zum Ausgangspunkte erst im *zweiten* Wiedervereinigungspunkte erfolgt, ist es — allerdings in einer schon im zweidimensionalen Raume nicht mehr ohne weiteres anschaulichen Weise — sowohl in dem Raume von zwei wie in dem von drei Dimensionen möglich, daß die kürzesten Linien und somit auch die Lichtstrahlen im Weltenraume bereits im *ersten* Wiedervereinigungspunkte zum Ausgangspunkte zurückkehren. Diese *einfachste Beschaffenheit des endlichen Raumes*, bei der das geschieht, soll für die weiteren, hier anzustellenden Betrachtungen festgehalten werden, weil die Existenz eines zweiten oder gar mehrerer, an sich auch möglichen, Wiedervereinigungspunkte aller von einem Ausgangspunkte ausstrahlenden Mengen von Energie geeignet sein würde, in dem ohnehin schon nicht einfachen Weltenbilde des endlichen Raumes weitere Verwickelungen und Schwierigkeiten hervorzurufen.[15]) In diesem speziellen Raume, dem sogenannten *elliptischen*, gehen also je zwei von einem leuchtenden Punkte ausgesandte Lichtstrahlen nur bis zur Hälfte ihrer Lichtkreise *divergierend* auseinander; dann streben sie *konvergierend* der Wiedervereinigung zu, die sie, mit allen anderen ebenso ausgesandten Lichtstrahlen gemeinsam, im leuchtenden Punkte erreichen.

Der immer noch als ruhend angesehene leuchtende Punkt, der dauernd Licht von unveränderlicher Helligkeit nach allen Richtungen des Raumes ausstrahlen möge, wird von einem Beobachter, der sich an einem im Raume festen Orte befinden soll, durch das an diesen Ort gelangende Licht sichtbar. Unter den unendlich vielen Lichtkreisen, die vom leuchtenden Punkte nach allen Richtungen ausgehen, gibt es

---

15) In dem Raume von der konstanten Krümmung $\frac{1}{R^2}$ gilt für die Seiten a, b, c eines von kürzesten Linien gebildeten Dreiecks und für den der Seite a gegenüberliegenden Winkel A die Gleichung

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A.$$

Für Räume konstanter positiver Krümmung ist R reell, und es kann ohne Beschränkung als positiv angesehen werden. Aus der angeführten Formel ergibt sich, daß sich in solchen Räumen alle von einem Punkte ausgehenden kürzesten Linien in allen denjenigen Punkten wieder vereinigen, deren längs einer beliebigen der kürzesten Linien gemessene Entfernungen vom Ausgangspunkte beliebige ganze Vielfache von πR betragen. Es ist nicht notwendig, aber möglich, daß einer der Wiedervereinigungspunkte mit dem Ausgangspunkte zusammenfalle.

einen und nur einen, der durch den einen, den Beobachtungsort ersetzenden Punkt hindurchgeht. Da es nun zu einem jeden Lichtkreise zwei ihn in entgegengesetzten Richtungen durchwandernde Lichtstrahlen gibt, so gelangt das Licht nach dem Beobachtungsorte zu verschiedenen Zeiten auf zwei Wegen, die einander zu einem und demselben Lichtkreise ergänzen, und es erreicht diesen Ort aus zwei genau entgegengesetzten Richtungen. Der Beobachter erblickt also den leuchtenden Punkt, dem ankommenden Lichte entgegenschauend, *doppelt*; in der Richtung des kürzeren Lichtweges sieht er direkt das *Bild*, in der entgegengesetzten Richtung des längeren Lichtweges indirekt das *Gegenbild*.

Wie verhalten sich nun die Helligkeiten dieser beiden Bilder? Zur Beantwortung dieser Frage soll zunächst wiederum die auf ihre Berechtigung zu prüfende Annahme gemacht werden, daß das Licht auf seiner Wanderung durch den Weltenraum keine *Absorption* erleide, daß also seine Helligkeit nur rein geometrisch in dem Maße abnehme oder wachse, wie die einzelnen Lichtstrahlen sich voneinander entfernen oder sich einander nähern, und wie sich also das Licht dementsprechend über größere beleuchtete Flächen verbreitet oder auf kleinere Flächen enger zusammenzieht.

Bei unserer Gewöhnung an den *unendlichen* Raum, in dem sich die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Lichtstrahlen mit ihrer wachsenden Länge unbegrenzt voneinander entfernen, sind wir nun zunächst zu der Vermutung geneigt, daß auch im *endlichen* Raume das Gegenbild, entsprechend dem längeren Lichtwege, eine geringere Helligkeit habe als das Bild. Eine kleine, die Pupille eines Beobachters darstellende Fläche, die den *von beiden entgegengesetzten Seiten* her nach dem Beobachtungsorte gelangenden Lichtstrahlen senkrecht entgegensteht, wird aber von der Seite des Bildes her von einem schmalen Bündel von *divergierenden* Lichtstrahlen offenbar in derselben Weise beleuchtet wie von der Seite des Gegenbildes her von einem schmalen Bündel von *konvergierenden* Lichtstrahlen; denn einem jeden einzelnen Lichtstrahle des einen Bündels ist ein Lichtstrahl des anderen Bündels in der Weise zugeordnet, daß beide zusammen einen und denselben vollständigen Lichtkreis bilden. Daraus folgt also, daß der Beobachter, der Vermutung widersprechend, Bild und Gegenbild in *gleicher* Helligkeit erblickt.

Anstatt leuchtender Punkte, oder genauer ausgedrückt, unmeßbar kleiner leuchtender Körper, gibt es nun im Weltenraume nur leuchtende Körper von beträchtlichen Dimensionen. Für die von den einzelnen Stellen ihrer Oberfläche ausgesandten Lichtstrahlen gelten unsere für einen leuchtenden Punkt angestellten Betrachtungen mit der einzigen

Beschränkung, daß die Lichtstrahlen nur in den außerhalb der leuchtenden Oberflächen liegenden Teilen ihrer Wege zu verfolgen sind. Von dem für uns wichtigsten Körper, der *Sonne*, würden wir also, wenn sie im Raume ruhte und in allen Teilen ihrer Oberfläche eine gleiche, unveränderliche Leuchtkraft besäße, von der zunächst im Raume gleichfalls als ruhend angenommenen Erde aus ein Bild in der einen Richtung und ein gleich großes und gleich helles Gegenbild in der entgegengesetzten Richtung sehen. Die beiden Bilder gäben die beiden Teile der Sonne, Vorderseite und Rückseite, beide zusammen die *ganze* Oberfläche. Wir haben dann eine Sonne des Tages und eine gleiche der ihren Namen dann nicht verdienenden Nacht.[16])

Wir wissen nun aber, daß, im Widerspruche mit unserer Annahme, weder die Sonne noch die Erde im Raume ruhen. Die Bewegung der immer in der Nähe der Sonne bleibenden Erde hat nur geringen Einfluß auf die Lage und das Aussehen des Gegenbildes; die Bewegung der Sonne aber, die jetzt mit einer Geschwindigkeit erfolgt, die den 10000sten Teil der Geschwindigkeit des Lichtes beträgt, ruft in dem Gegenbilde der Sonne wesentliche Veränderungen hervor. Die von der Sonne zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ausgangsorte ausgesandten Lichtstrahlen bleiben nämlich wie die von einem fahrenden Schiffe erregten Wellen im Raume fest, zurück und nehmen an der Bewegung der Sonne ebensowenig Teil wie die Wellen an der Bewegung des Schiffes. Das von dem Ausgangsorte nach allen Richtungen ausstrahlende Licht kehrt also nach der Umlaufszeit von allen Richtungen her nach dem Ausgangsorte zurück, von dem sich die Sonne inzwischen durch ihre Bewegung im Raume entfernt hat. Die Sonne geht, in welcher Richtung sie sich auch bewege, dem zurückkehrenden Lichte stets entgegen und trifft es in einer um so größeren Entfernung von dem Ausgangsorte, je länger der Lichtkreis und je größer dementsprechend die Umlaufszeit des Lichtes ist. Wir sehen nun von der durch die Sonne mitgeführten Erde aus das durch das zurückkehrende Licht erzeugte Gegenbild in solcher Größe und Helligkeit, wie uns die Sonne in der entgegengesetzten Richtung erscheinen würde, wenn sie am Ausgangsorte stehen geblieben wäre, also der Entfernung dieses Ortes entsprechend kleiner und dunkler. Schon bei der geringsten Ausdehnung, die der Raum haben muß, um das Sternensystem aufnehmen zu können, verwandelt sich so das sonnengleiche Gegenbild, das der Sonne im Ruhezustande zugehört, durch die Be-

16) Man würde, wenn das zuträfe, versucht sein, in dem „Gegenscheine“ die zerstreuten Reste des aus dem Weltenraume zurückkehrenden Sonnenlichtes zu erblicken.

wegung der Sonne in einen der Richtung nach dem Ausgangsorte entgegengesetzt liegenden Stern, der, wenn das Licht keine Absorption erleidet, ungefähr so hell ist, wie der hellste Stern des Himmels, Sirius.[17]) Je größer aber die Ausdehnung des Raumes ist, desto schwächer wird der das Gegenbild der Sonne darstellende Stern.

Das Licht, das nach einem Umlaufe aus allen Richtungen her zum Ausgangsorte zurückgekehrt ist, beginnt seinen Kreislauf von diesem selben Orte aus aufs neue; es strahlt also einerseits der mit der Sonne weiter wandernden Erde direkt nach und indirekt entgegen, nachdem es noch einmal den Weltenraum durchwandert hat. Durch das direkte Licht erhalten wir zuerst ein zweites sternartiges Bild der Sonne, schwächer als das erste Gegenbild und später durch das indirekte Licht ein zweites nochmals schwächeres Gegenbild. Jedem der unaufhörlich erneuten Umläufe des Lichtes entspricht in der gleichen Weise ein neues Paar eines Bildes und Gegenbildes. *Gleichzeitig* bieten uns diese zu *verschiedenen* Zeiten entstandenen sternartigen Bilder und Gegenbilder der Sonne, mit Anschluß des ersten gewöhnlichen Bildes, den Anblick von zwei Ketten regelmäßig angeordneter Sterne dar, die sich am Himmel um so näher diametral gegenüberliegen und um so dichter mit Sternen besetzt sind, je weniger die Bewegung der Sonne von einer kürzesten Linie abweicht. Die Helligkeit der Sterne wechselt je nach der Entfernung der Sonne vom Ausgangsorte des Lichtes und je nach der Änderung der bisher von uns als unveränderlich angenommenen, tatsächlich aber sicher veränderlichen Leuchtkraft der Sonne. Die Zahl der *bestehenden* Objekte der Ketten müßte unendlich groß sein, wenn die Sonne seit undenklichen Zeiten bestünde; die Zahl der *sichtbaren* Sterne brauchte aber bei zunächst abnehmender Helligkeit nur mäßig groß auszufallen. Was bei der Sonne, dem nächsten Sterne, geschieht, wiederholt sich bei jedem anderen Sterne: bei Bild und

17) Die Sterngröße y, die das Gegenbild der Sonne haben würde, wenn das Sternensystem in der Richtung der Milchstraße den Raum ganz ausfüllte und keine Absorption vorhanden wäre, ergibt sich aus der Annahme I in der erst folgenden Anmerkung 19), indem $k = 0$ gesetzt wird. Es gelten also die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\frac{1}{R} = \frac{a^{-7.64}}{\varrho}, \qquad a^{\frac{y}{2}+13.30} = \frac{\sin\frac{\pi}{10000}}{\sin\frac{1}{R}}.$$

Daraus ergibt sich

$$y = -2.26,$$

während die Größe des Sirius nach Newcomb-Engelmann (Populäre Astronomie, 3. Aufl. von H. C. Vogel, Leipzig 1905, S. 497) -1.7 ist. Der Wert y entspricht der größten Helligkeit, die das Gegenbild der Sonne überhaupt haben kann.

Gegenbild des Sternes bilden sich Sternketten, von denen sich aber auch das erste Bild nicht ausschließt; und nur, wenn der Stern sich im Raume gar nicht bewegt, ziehen sich alle Objekte einer Kette auf einen Punkt zusammen.

Von dem symmetrischen Anblicke, den der Himmel bei der Existenz dieser nahezu diametralen Ketten von Bildern und Gegenbildern gewähren müßte, bemerken wir nun nichts. Daraus ist aber nicht zu schließen, daß der Raum nicht endlich sein könnte. Denn unser Bild ist unter der *der Prüfung bedürftigen* Annahme gewonnen worden, daß das Licht auf seinem Wege durch den Weltenraum *keine Absorption* erleide. Diese Annahme, wonach das Licht, wenn es nicht von Körpern aufgefangen wird, periodisch zu seinem ursprünglichen Ausgangsorte zurückkehrend, den Weltenraum ewig in ungeschwächter Stärke durchfluten müßte, ist aber äußerst unwahrscheinlich. Unsere Erfahrungen zeigen uns vielmehr, daß alle Bewegungen, indem ihre Energie, meist durch Reibung, eine andere Form annimmt, allmählich verschwinden. Es ist dementsprechend anzunehmen, daß auch das Licht, das durch eine Wellenbewegung entsteht, durch Absorption mit der wachsenden Länge des zurückgelegten Weges immer schwächer werde, wie Licht, das neblige Luft durchdringt.[18]) Wir wissen, daß bei einer solchen Absorption die Geschwindigkeit des Lichtes unverändert bleibt. Wenn man die Absorption stark genug wählt, kann man sich von den Schwierigkeiten selbst schon des ersten Gegenbildes und um so mehr von der der Sternketten befreien. Es würde aber bei der Wahl der Stärke der Absorption der Willkür Tür und Tor geöffnet sein, wenn nicht ein Umstand die Überschreitung eines gewissen Maßes verhinderte. Da nämlich das Licht durch die Absorption in einem mit der Länge des Weges sehr rasch zunehmenden Grade geschwächt wird, so müssen die Sterne an einer bestimmten Stelle des Raumes, um uns an einer Stelle des Himmels in einer bestimmten, beobachteten Fülle zu erscheinen, auch schon im gewöhnlichen Raume, um so dichter beieinander stehen und um so heller sein, je größer die Absorption ist. Und bei einer fest angenommenen Stärke der Absorption wächst diese Vergrößerung der Dichtigkeit und Helligkeit der Sterne sehr stark mit der Entfernung der Stelle des Raumes, an der sich die Sterne befinden. Je stärker also die Absorption angenommen wird, desto mehr wächst die Schwierigkeit, daß bei angenommenem Mischungsverhältnisse der Leuchtkraft der Sterne die Dichtigkeit der Sterne in großen Entfernungen

18) Schon W. Olbers hat in seiner Untersuchung „Über die Durchsichtigkeit des Weltraums" (Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1826) Berechnungen über den Einfluß der Absorption auf Sternhelligkeiten angestellt.

stark wüchse, und daß die Grenzen des Sternensystemes mit einem ganz unwahrscheinlichen jähen Sprunge aus einem mit Massen dicht erfüllten Raume in die massenlose Leere erreicht würden. Zwischen dem Zuviel und Zuwenig in der Absorption hindurch führt, zunächst leider noch in großer Breite, der Weg zur Entscheidung der Frage, ob der Raum *endlich* sei, und welche Ausdehnung er habe. Schon unsere Erkenntnis, daß das Sternensystem *begrenzt* und von einem großen massenlosen Raume umgeben sei, macht es unmöglich, daß das Sternensystem den *unbegrenzten* endlichen Raum zu einem großen Teile oder gar gänzlich erfüllte. Und diese Unmöglichkeit wird durch das Rechnungsresultat, bestätigt, daß bei den früheren Voraussetzungen über das Mischungsverhältnis der Sterne und bei der Anwendung der Geometrie des endlichen Raumes, die Dichtigkeit der Sterne, nach den Grenzen des Systemes zu, viel zu stark, in der Milchstraße selbst bis zum 3000-fachen des für die weitere Nachbarschaft der Sonne geltenden Wertes anschwellen müßte, wenn das Sternensystem den Raum vollständig erfüllte.[19]) Bei der geringsten Ausdehnung des endlichen Raumes, die

19) Die Umarbeitung der von Herrn von Seeliger in der letzten der unter 4) angeführten Arbeiten vorgenommenen Entwickelungen auf die Geometrie des Raumes von der konstanten positiven Krümmung $\frac{1}{R^2}$ gestaltet sich bei der Berücksichtigung der Absorption folgendermaßen: Vom Beobachtungsorte aus erstrecke sich der durch kürzeste Linien begrenzte Elementarkegel von der sehr kleinen Öffnung ω in einer bestimmten Richtung. Dieser Kegel werde durch eine Kugel geschnitten, die mit dem in einer kürzesten Linie gemessenen Halbmesser r um den Beobachtungsort beschrieben wird. Das durch den Kegel ausgeschnittene Element der Kugeloberfläche hat den Flächeninhalt $\omega R^2 \sin^2 x$, indem zur Abkürzung $x = \frac{r}{R}$ eingeführt wird. Das räumliche Element $d\tau$ über dem Oberflächenelemente hat bei einer Höhe dr den Inhalt $d\tau = \omega R^3 \sin^2 x dx$. Die Leuchtkraft eines Sternes, d. h. seine Helligkeit in der Entfernung 1, die gegen die Dimensionen des Sternes sehr groß, gegen R aber außerordentlich klein ist, sei i; dann hat der Stern in der Entfernung r die Helligkeit h, die durch die Formeln

$$h = \frac{i}{s^2}, \quad s = R \sin x e^{kx}$$

bestimmt ist. Die positive Konstante $\frac{2k}{R}$ stellt dabei den Absorptionskoeffizienten dar. Der größte vorkommende Wert von i sei J; dementsprechend ist die Helligkeit H, die ein Stern von der größten vorkommenden Leuchtkraft in der Entfernung r hat, bestimmt durch

$$H = \frac{J}{s^2}.$$

Die Zahl der in der Raumeinheit enthaltenen Sterne sei D; die Zahl derjenigen

mir möglich erscheint, bestehen die folgenden Verhältnisse: Der Inhalt des ganzen Raumes ist 17 mal größer als der einer das Sternensystem

---

dieser Sterne, die eine Leuchtkraft zwischen i und $i + di$ haben, sei $D\varphi(i)di$, wobei $\varphi(i)$ die „Häufigkeitsfunktion" ist, für die die Bedingung

$$\int_0^J \varphi(i)\,di = 1$$

besteht. Im Raumelemente $d\tau$ gibt es also $D\varphi(i)did\tau$ Sterne von einer zwischen i und $i + di$ liegenden Leuchtkraft oder $Ds^2\varphi(hs^2)dhd\tau$ Sterne von einer zwischen h und $h + dh$ liegenden Helligkeit. Die Zahl der Sterne im Raumelemente $d\tau$, deren Helligkeiten zwischen einer beliebigen unteren Grenze h_m und der Maximalhelligkeit H liegen, ist also

a) $$\omega R^3 Ds^2 \sin^2 x\,dx \int_{h_m}^{H} \varphi(hs^2)\,dh.$$

Das Sternensystem habe nun in der gewählten Richtung seine Grenze bei $r = r_n$; dann ist die Helligkeit H_n eines Sterns von der größten Leuchtkraft, der an der Grenze steht, bestimmt durch

$$H_n = \frac{J}{s_n^2}.$$

Um nun die Zahl A_m aller Sterne zu erhalten, von den hellsten bis zur Helligkeit h_m herab, die auf der Fläche ω der Einheitskugel gesehen werden, ist der Ausdruck a) nach x zu integrieren von der unteren Grenze x_0 an, die sich aus der geringsten Entfernung r_0 eines Sternes in der gewählten Richtung durch die Formel $x_0 = \frac{r_0}{R}$ ergibt, bis zu einer oberen Grenze, die verschieden ist, je nachdem bei der Helligkeit h_m die raumerweiternde Kraft des Fernrohres noch wirksam oder schon erschöpft ist. Im ersten Falle ist $h_m > H_n$, und die obere Grenze x_m ist die Wurzel der Gleichung

$$h_m = \frac{J}{s_m^2}.$$

Im zweiten Falle ist $h_m \leq H_n$, und die obere Grenze ist $x_n = \frac{r_n}{R}$. Den zwei Fällen entsprechend ist also

$$A_m = \omega R^3 \int_{x_0}^{x_m} D \sin^2 x\,dx \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\,di, \quad h_m > H_n$$

$$A_m = \omega R^3 \int_{x_0}^{x_n} D \sin^2 x\,dx \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\,di, \quad h_m < H_n.$$

Führt man anstatt x die Größe s als Integrationsvariabele ein, so ergibt die Auflösung von

$$\sin x e^{kx} = \frac{s}{R}$$

soeben einschließenden Kugel. Die Durchmesser des Sternensystemes sind auf etwa $^4/_{10}$ der im gewöhnlichen unendlichen Raume gefundenen

nach x zunächst

$$x = f\left(\frac{s}{R}\right)$$

und sodann

$$dx = f'\left(\frac{s}{R}\right)\frac{ds}{R},$$

wobei

$$f'\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{e^{-kx}}{\cos x + k\sin x}$$

ist.

Damit erhält man die transformierten Formeln

$$A_m = \omega\int_{s_0}^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} \varDelta s^2 ds \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\, di, \quad h_m \geq H_n$$

$$A_m = \omega\int_{s_0}^{\sqrt{\frac{J}{H_n}}} \varDelta s^2 ds \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\, di, \quad h_m \leq H_n.$$

Zur Abkürzung ist dabei

$$s_0 = R\sin x_0 e^{k x_0}$$

und

$$\varDelta = R^2 \frac{D\left(\sin f\left(\frac{s}{R}\right)\right)^2 \cdot f'\left(\frac{s}{R}\right)}{s^2} = \frac{De^{-3kx}}{\cos x + k\sin x}$$

gesetzt worden.

Die Formeln für A_m stimmen in der Gestalt völlig mit den Formeln I, II überein, die Herr von Seeliger auf S. 595 der letzten unter 4) angeführten Arbeit angibt. Es steht nur $\varDelta$ statt D und s statt r. Mit der ersten Formel, die gültig bleibt, solange die raumerweiternde Kraft des Fernrohres noch nicht erschöpft ist, kann man dann weiter die von Herrn von Seeliger auf den S. 601 u. f. vorgenommene Operation ausführen. Es ist aber an jener Stelle stillschweigend vorausgesetzt worden, daß $\varphi(i)$ von r unabhängig sei, daß also das Mischungsverhältnis für alle Stellen des Sternensystemes das gleiche sei. Denn nur dann gilt für das Integral

$$u = \int_{h_m s^2}^{J} \varphi(i)\, di$$

die Gleichung

$$\frac{du}{dh_m} = \frac{s}{2h_m}\frac{du}{ds}.$$

Aus der Gleichung

$$A_m = \omega\int_{s_0}^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} \varDelta s^2 u\, ds, \quad h_m \geq H_n$$

Größen verringert, die Zahl der Sterne aber unverändert geblieben; die Gestalt des Systemes ist weniger flach gedrückt, der Kugel ähnlicher.

---

ergibt sich dann, indem man s_0 als äußerst klein betrachtet

$$\frac{dA_m}{dh_m} = -\frac{\omega}{2h_m}\int_0^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} u\,\frac{d(\varDelta s^3)}{ds}\,ds$$

$$= -\frac{3}{2h_m}A_m - \frac{\omega}{2h_m}\int_0^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}} s^3\,\frac{d\varDelta}{ds}\,u\,ds.$$

Das Resultat

$$A_m = c\,h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

ist nun von Herrn von Seeliger rein statistisch, ohne irgendwelche Voraussetzung über die Beschaffenheit des Raumes erhalten worden. Daraus folgt ein zweiter Wert von $\frac{dA_m}{dh_m}$, der, dem ersten gleich gesetzt, zeigt, daß

$$\frac{\omega}{2h_m}\int_0^{\sqrt{\frac{J}{h_m}}}\left(\lambda\varDelta + s\,\frac{d\varDelta}{ds}\right)s^2 u\,ds = 0$$

sein muß. Daraus schließt man, daß

$$\varDelta = \gamma s^{-\lambda}$$

sein müsse. Für die Dichtigkeit D gilt also die Gleichung

$$\frac{R^\lambda D}{\gamma} = g(x) = \frac{\cos x + k\sin x}{\sin^\lambda x}\,e^{(3-\lambda)kx}.$$

Die Formel

$$g'(x) = \frac{((3-\lambda)k^2-1)\operatorname{tg}^2 x + 2k(2-\lambda)\operatorname{tg} x - \lambda}{\sin^{\lambda+1} x}\cos^2 x\,e^{(3-\lambda)kx}$$

lehrt, daß D für kleine wachsende Werte von x abnimmt, bis es, vorausgesetzt, daß $k^2 \geq \frac{\lambda}{4-\lambda}$ ist, wie es für die folgenden numerischen Rechnungen zutrifft, für

$$\operatorname{tg} x = \frac{-(2-\lambda)k + \sqrt{(4-\lambda)k^2-\lambda}}{(3-\lambda)k^2-1} = \frac{\lambda}{(2-\lambda)k + \sqrt{(4-\lambda)k^2-\lambda}}$$

ein Minimum erreicht. Dann nimmt D zu und erreicht ein Maximum für

$$\operatorname{tg} x = \frac{-(2-\lambda)k - \sqrt{(4-\lambda)k^2-\lambda}}{(3-\lambda)k^2-1} = \frac{\lambda}{(2-\lambda)k - \sqrt{(4-\lambda)k^2-\lambda}}.$$

In dem von uns ins Auge gefaßten elliptischen Raume sind die Entfernungen r kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2}R$, und der Umfang des Lichtkreises ist gleich πR. Dann

Die Dichtigkeit der Sterne nimmt in der Richtung der Milchstraße von innen nach außen stets und mäßig zu, mit Ausschluß der Umgebung

---

sind negative Werte von $\operatorname{tg} x$ ausgeschlossen; das Minimum von D ist immer möglich, wenn nur $k^2 \geqq \frac{\lambda}{4-\lambda}$ ist, das Maximum von D aber ist unmöglich oder möglich, je nachdem $k^2 > \frac{1}{3-\lambda} > \frac{\lambda}{4-\lambda}$ oder $\frac{1}{3-\lambda} > k^2 > \frac{\lambda}{4-\lambda}$ ist. Der Wert von $g(x)$ im fernsten Punkte ist

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k e^{(3-\lambda)k\frac{\pi}{2}},$$

und D bleibt stets positiv.

Um die Lage des Sprunges in der Sternenzahl zu bestimmen, nehmen wir mit Herrn von Seeliger an, daß das Mischungsverhältnis gleichmäßig, also

$$\varphi(i) = \frac{1}{J}$$

ist. Dann wird

$$A_m = \gamma\omega \frac{2}{(3-\lambda)(5-\lambda)} \sqrt{\left(\frac{J}{h_m}\right)^{3-\lambda}}, \quad h_m \geqq H_n$$

$$A_m = \gamma\omega \frac{5-\lambda-\frac{h_m}{H_n}(3-\lambda)}{(3-\lambda)(5-\lambda)} \sqrt{\left(\frac{J}{H_n}\right)^{3-\lambda}}, \quad h_m \leqq H_n,$$

und im besonderen ergibt die letzte Formel

$$A_\infty = \gamma\omega \frac{1}{3-\lambda} \sqrt{\left(\frac{J}{H_n}\right)^{3-\lambda}}.$$

Die erste Formel für A_m ist für die Sterne der Bonner Durchmusterungen, die zweite für die der Herschelschen Sterneichungen anzuwenden. Es seien h_μ und h_m die Helligkeiten der schwächsten Sterne in diesen beiden Gruppen, und zur Abkürzung werde gesetzt

$$z = \frac{h_\mu}{H_n}$$

so wird

$$\frac{A_m}{A_\mu} = \frac{H}{D} = \frac{1}{2} \sqrt{z}^{3-\lambda} \left(5-\lambda-\frac{h_m}{h_\mu}(3-\lambda)z\right).$$

Die Formeln zur Bestimmung von z, H_n, A_∞ sind also dieselben, die in der gewöhnlichen Geometrie und ohne Rücksicht auf die Absorption erhalten worden sind. Versteht man unter den unteren Indizes die Größenklassen, so erhält man, entsprechend der Annahme $m = 14.0$, $\mu = 9.2$ die schon unter 10) angeführten Werte von n und A_∞. Um nun aus n die Dimensionen des Sternensystemes in Einheiten der Entfernung der Erde von der Sonne zu erlangen, muß man die Formeln

$$\sin x_n e^{kx_n} = a^{\frac{n}{2}+1} \sin x_{-2} e^{kx_{-2}}, \quad \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg} \frac{1}{R}$$

anwenden. Das Volumen einer Kugel, die das Sternensystem einschließt, also die für die Milchstraße geltende Größe r_n zum Halbmesser hat, ist $\pi R^3(2x_n - \sin 2x_n)$.

der Sonne, bis zum 10 fachen; senkrecht zur Milchstraße ist die Dichtigkeit innen und außen nahe gleich groß, dazwischen in mäßigem

---

Daraus ergibt sich das Volumen des ganzen elliptischen Raumes, wenn man x_n mit $\frac{\pi}{2}$ vertauscht, gleich $\pi^2 R^3$. Das Verhältnis V der beiden Volumina ist bestimmt durch die Gleichung

$$V = \frac{2x_n - \sin 2x_n}{\pi}.$$

Um $\mathfrak{D}$ zu berechnen, ist zuerst r_6, die Entfernung, in der ein Stern von der größten Leuchtkraft die Größe 6.0 hat, nach der Formel

$$\sin x_6 \, e^{k x_6} = a^4 \sin x_{-2} \, e^{k x_{-2}}$$

zu ermitteln, sodann $g(x_6)$, $g(x_n)$, und damit ergibt sich

$$\mathfrak{D} = \frac{g(x_6)}{g(x_n)}.$$

Auf einem Umlaufe im elliptischen Raume, also auf der Länge πR des Lichtkreises verliert das Licht $\mathfrak{n} = \frac{\log_{br} e^{2k\pi}}{\log_{br} a} = 6.82k$ Größenklassen. Die Umlaufszeit U des Lichtes erhält man mit Hilfe der Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ des Lichtes aus der Formel

$$U = \frac{\pi R}{\mathfrak{B}},$$

und um U in Jahren zu erhalten, muß $\mathfrak{B} = 63\,400$ gesetzt werden.

Die Wahl von k und R soll nun in diesem Versuche durch die Bedingung eingeschränkt werden, daß das erste Gegenbild der Sonne ein Stern von der Größe 10.0 sei. Das ist zweckmäßig, weil wir für alle Sterne wenigstens bis zur Größe 9.2 so genaue, wiederholte Ortsbestimmungen haben, daß etwas Ungewöhnliches in ihnen wie etwa eine sehr große Parallaxe nicht hätte unbemerkt bleiben können. Es sei nun $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Bewegung der Sonne im Raume, und es möge angenommen werden, daß die Bewegung der Sonne während eines Umlaufes des Lichtes gleichförmig auf einer kürzesten Linie erfolge. Dann trifft die Sonne das von ihr an einem bestimmten Ausgangsorte ausgesandte Licht, das aus dem Weltenraume zurückkehrt, in der Entfernung

$$r = \pi R \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{v}}$$

vom Ausgangsorte. Die entsprechende Größe x ist mit dem Werte $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{v}} = \frac{1}{10000}$ bestimmt durch die Gleichung

$$x = \frac{\pi}{10000}.$$

Die Parallaxe ϖ des Gegenbildes ergibt sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} \varpi = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{R}}{\sin x}.$$

Gibt man der Sonne nach Zöllner (Müller, Die Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897, S. 317) die Sterngröße -26.60, so muß das Gegenbild der Sonne

Grade geringer. Das Licht kehrt nach 8700 Jahren wieder, und die Absorption bewirkt auf jeden Umlauf einen Helligkeitsverlust des

---

36.60 Größenklassen schwächer sein als die Sonne. Da die Absorption des Lichtes auf der Weglänge $(\pi - x)R$ erfolgt, so ist mit der Gleichung

$$\text{1)} \qquad \sin\frac{1}{R}\, e^{k\frac{1}{R}} = a^{-18.3} \sin x\, e^{k(\pi - x)}$$

eine Relation zwischen k und R gegeben. Um eine zweite zu erhalten, wollen wir verschiedene Annahmen probieren:

I. Das Sternensystem erstrecke sich in der Richtung der größten Ausdehnung, also in der Milchstraße, über den ganzen elliptischen Raum. Es sei also $V = 1$ oder $x_n = \frac{\pi}{2}$ für $n = 13.28$. Dann stellen die Gleichungen

$$\text{2)} \qquad e^{k\frac{\pi}{2}} = a^{7.64} \sin x_{-2}\, e^{k x_{-2}}, \quad \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg}\frac{1}{R}$$

eine zweite Relation zwischen k und R dar. Aus den zwei Gleichungen 1), 2) ergibt sich zunächst

$$k = 3.35, \qquad R = 1790000,$$
$$r_n = 2810000, \quad L = 44.2$$

und damit

$$\mathfrak{n} = 22.9, \qquad U = 88.5, \qquad \varpi = 368''$$

und in der Richtung der Milchstraße

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2800}.$$

Die Annahme ist wegen des Wertes von ϖ, besonders aber wegen dessen von $\mathfrak{D}$ als unmöglich anzusehen.

II. Die Dichtigkeit der Sterne nehme nach außen in allen Richtungen nur ab, nie zu, und das Minimum der Dichtigkeit liege in der Milchstraße selbst gerade auf der Grenze. Es sei dementsprechend für $n = 13.28$

$$\text{3)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x_n = \dfrac{-(2-\lambda)k + \sqrt{(4-\lambda)k^2 - \lambda}}{(3-\lambda)k^2 - 1}, \quad \sin x_n e^{k x_n} = a^{\frac{n}{2}+1} \sin x_{-2}\, e^{k x_{-2}}, \\ \qquad\qquad \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg}\dfrac{1}{R}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 1), 3) ergeben

$$k = 1.01, \qquad R = 2800000000,$$
$$r_n = 217000000, \quad L = 3430,$$
$$\mathfrak{n} = 6.88, \qquad U = 139000, \quad \varpi = 0\rlap{.}''23$$
$$V = \frac{1}{5060},$$

und in der Milchstraße ist

$$\mathfrak{D} = 1.90.$$

Diese Annahme ist unzweifelhaft möglich, aber unnötig weitgehend.

III. Anstatt die Dichtigkeit der Sterne nach außen nur abnehmen zu lassen, scheint mir nämlich bei der ausgezeichneten Rolle, die der Milchstraße in unserem

Lichtes im Betrage von 13 Größenklassen. Das erste Gegenbild der Sonne, das neben dem ersten direkten Bilde der Sonne als einziges

Systeme zufällt, durchaus zulässig zu sein, daß in der Milchstraße eine Zunahme auf das 10-fache bestehe. Der Annahme $\mathfrak{D} = \frac{1}{10}$ entsprechen nun für $n = 13.28$ die Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos x_n + k \sin x_n}{\sin^\lambda x_n} e^{(3-\lambda) k x_n} = 10 \dfrac{\cos x_6 + k \sin x_6}{\sin^\lambda x_6} e^{(3-\lambda) k x_6} \\ \sin x_n e^{k x_n} = a^{\frac{n}{2}+1} \sin x_{-2}\, e^{k x_{-2}}, \quad \sin x_6 e^{k x_6} = a^4 \sin x_{-2}\, e^{k x_{-2}}, \\ \sin x_{-2} = \varrho \operatorname{tg} \dfrac{1}{R}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 1), 4) ergeben hier

$$k = 1.89\,, \qquad R = 175000000\,,$$
$$r_n = 91500000\,, \quad L = 1440\,,$$
$$n = 12.90\,, \qquad U = 8660\,, \quad \varpi = 3.''76\,,$$
$$V = \frac{1}{17.3}\,.$$

Der in der Milchstraße gültige Wert $\mathfrak{D} = \frac{1}{10}$ wird mit nach außen stets zunehmender Dichtigkeit der Sterne erreicht, denn der Wert x, für den das Minimum der Dichtigkeit eintritt, ist kleiner als x_6; es ist nämlich $x_6 = 1{,}065\,x$.

Senkrecht zur Milchstraße ist, entsprechend dem Werte $n = 12.41$

$$r_n = 73300000\,, \quad L = 1160\,,$$
$$\mathfrak{D} = \frac{1}{1.17}\,.$$

Der Wert x, für den hier die Dichtigkeit ein Minimum wird, liegt zwischen den beiden Grenzwerten; es ist nämlich $x_6 = 0.292\,x$, $x_n = 2.83\,x$, und entsprechend ist

$$\frac{D_6}{D_{min}} = 1.51\,, \quad \frac{D_n}{D_{min}} = 1.77\,.$$

Herr K. Schwarzschild hat nach einer Bemerkung in seinem Vortrage „Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes“ (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 35. Jahrg., Leipzig 1900) den hier vorgetragenen ähnliche Betrachtungen angestellt. Aus anderen Untersuchungen, die aber gleichfalls mit der Dichtigkeit der Sterne zusammenhängen, gewinnt er das Resultat: „man darf, ohne mit Erfahrungstatsachen in Widerspruch zu geraten, die Welt enthalten denken in einem .... elliptischen Raume von einem Krümmungsradius über 100000000 Erdbahnradien, wofern man noch .... eine Absorption des Lichtes von 40 Größenklassen bei einem Umlaufe um den Raum annimmt.“ Der letzte Zusatz, über die Absorption, bedarf aber der Verbesserung, weil Herr Schwarzschild irrtümlich an dem sonnengleichen Gegenbilde, das ohne Absorption im Ruhezustande der Sonne eintreten würde, festhält. In ähnlicher Weise beruht es auf einem Irrtume, wenn Helmholtz in seinem bekannten Vortrage „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ (Vorträge und Reden, 5. Aufl. Bd. 2, Braunschweig 1903, S. 28) von dem Anblicke unseres eigenen Hinter-

sichtbares Objekt übrig bleibt, ist bei konstanter Leuchtkraft der Sonne ein Stern 10. Größe in der Entfernung von $^1/_5$ der jetzt als geringsten bekannten Entfernung eines Sternes. Da wir die Gesetze der Bewegung der Sonne im Raume noch nicht kennen, ist der Ort dieses Gegenbildes gleichfalls unbekannt. Von den ersten Gegenbildern der Sterne könnten höchstens bei ganz wenigen der allerhellsten schwache Spuren an gleichfalls unbekannten Orten übrig bleiben. Die Sternketten aber verschwinden spurlos.

Dieses Bild enthält keinen Zug, der als unwahrscheinlich bezeichnet werden könnte. Einer weiteren Vergrößerung der für dieses Bild angenommenen Ausdehnung des Raumes steht noch weniger irgend etwas im Wege; man wird sie allerdings nur so weit treiben, daß man die bei unserem Bilde bestehende Sicherheit bewahre, daß unser Sternensystem das einzige sei, was im Raume existiere, das Universum. Aber nur für die *Möglichkeit*, noch nicht für die *Wirklichkeit* des endlichen Raumes spricht das Bild, und noch fehlt uns jedes Zeugnis für diese Wirklichkeit. Wie aber ursprünglich alle Vermessungen auf der Erdoberfläche auf kleinen Gebieten mit Hilfe der gewöhnlichen Geometrie widerspruchsfrei ausgeführt worden sind und erst die größeren Ausdehnungen der vermessenen Gebiete die Einführung einer anderen Form der Geometrie erzwungen haben, so kann sich, was hier im zweidimensionalen Gebiete geschehen ist, im dreidimensionalen Raume wiederholen, wo wir zunächst noch ein kleines Gebiet ausreichend mit der gewöhnlichen Geometrie beherrschen. Die Änderung kann durch Erweiterungen unserer jetzigen Kenntnisse über die geometrischen und mechanischen Verhältnisse des Sternensystemes nötig werden; in wirksamer Kraft sind diese Erweiterungen aber erst von der Arbeit mehrerer Jahrtausende zu erhoffen.[20]) Die Änderung könnte aber vielleicht schon viel früher durch die Auffindung eines etwa wirklich in sichtbarer Helligkeit existierenden und als solches, etwa durch seine geringe Entfernung, erkennbaren sternartigen Gegenbildes der Sonne herbeigeführt werden. Niemand aber, der die schier unbegrenzten Möglichkeiten

---

kopfes spricht, „welcher den äußersten Hintergrund des ganzen perspektivischen Raumes ausfüllen müßte". Beides würde nur dann richtig sein, wenn die Sonne und die Erde im Raume ruhten, oder wenn die Geschwindigkeit des Lichtes unendlich groß wäre.

20) Man müßte z. B. in dem Dreiecke, dessen Ecken von der Sonne und zwei anderen Sternen gebildet wird, die vier Größen a, b, c, A in der Gleichung 14) kennen, um daraus R bestimmen zu können. Zu der Kenntnis der vier Größen, die nicht alle direkt meßbar sind, könnte man, ähnlich, wie im Sonnensysteme, durch die Ergründung der Gesetze gelangen, nach dem die Bewegungen der drei Sterne erfolgen.

kennt, die uns die Natur enthüllt, wenn wir ihr auf ihren Wegen folgen, kann sich vermessen, die Entscheidung auf die genannten zwei Möglichkeiten zu beschränken. Und während *wir* uns nur erst um die Möglichkeit eines endlichen Raumes bemühen, kann auf anderen Planeten, in *anderen* Sonnensystemen in der Kultur vor uns bevorzugter Wesen die Erkenntnis der *Endlichkeit des Raumes* längst zu den sicheren Ergebnissen der Wissenschaft gehören.

Über „willkürliche Festsetzungen".

Von Hugo Dingler in München.

Man hört und liest in letzterer Zeit des öfteren von „willkürlichen Festsetzungen" u. ä. in der Mathematik und den anderen exakten Wissenschaften. Es scheint der Mühe wert zu sein, einmal zu versuchen, sich darüber klar zu werden, worauf diese Erscheinung eigentlich beruht.[1])

Um die Art und Weise des Auftretens solcher Vorkommnisse zu zeigen sowie darzutun, daß diesen Dingen wirklich einige Tragweite zukommt, seien zunächst kurz einige Beispiele besprochen, wobei sich Gelegenheit geben wird, auf einschlägige Verhältnisse hinzuweisen.

1. Ich sitze ruhig in meinem Zimmer, da geht plötzlich die Türe auf. Ich schaue nach, was die Ursache ist, und setze dabei die Geltung des Kausalitätsgesetzes voraus. Ich kann nicht nachschauen, *ob* das Gesetz erfüllt ist, denn wenn ich auch vor der Tür einen Menschen finde oder den Wind pfeifen höre, so bedarf ich, um diese als *Ursache* zu erkennen, stets bereits des Kausalitätsgesetzes. Ich trete also mit dem Kausalitätsgesetz schon an die Erscheinungen heran. Es zeigt sich, daß das *Kausalitätsgesetz nicht durch Beobachtung oder Experiment bewiesen werden kann, da es stets bei diesen schon vorausgesetzt werden muß.*

2. Bewegt sich ein Gegenstand im Raume und erleidet dabei Veränderungen, dann wird niemand sagen, von dieser Veränderung sei die Ortsbewegung als solche die Ursache (d. h. so oft man den Körper von diesem Ort nach jenem bringe, erleide er diese Veränderung, mögen die sonstigen Umstände sein wie sie wollen).

Meist tritt man mit der gekennzeichneten Ansicht schon an die Sache heran; wollte man aber *beweisen,* daß der Raum als solcher die

1) Herr Hessenberg hat kürzlich in einem geistreichen Aufsatze diese Fragen berührt (diese Ber. 1908 S. 145 ff.), wobei er sich gelegentlich auf eine Schrift von mir bezieht. Die obigen Zeilen sind veranlaßt durch Herrn Hessenbergs Aufsatz und mögen eine Antwort auf die dort an mich gestellte Anfrage sein.

Veränderung nicht bewirkt, so müßte man unter der Annahme, daß man nichts darüber wisse, Meßinstrumente zur Untersuchung herstellen, von denen man aber dann wieder nicht weiß, ob nicht der Raum die Messungen beeinflußt usw. Bei näherer Überlegung sieht man, *daß, wenn man nicht mit einer festen Meinung bereits an den Raum herantritt, man nicht in der Lage ist, durch Beobachtung und Messung eine solche zu gewinnen.* Aber es gilt noch mehr.

Handeln nämlich alle wissenschaftlich tätigen Menschen so,[1]) daß sie stets die Möglichkeit ausschließen, daß der Raum als solcher eine Veränderung bewirkt, dann ist das Resultat dieses Vorgehens das folgende:

Wenn niemals der Raum als solcher zur Ursache einer Veränderung genommen wird, d. h. jede Veränderung auf andere Ursachen zurückgeführt wird, dann ist der Erfolg der, daß in dem so entstehenden wissenschaftlichen Aufbau der Raum nie Ursache einer Veränderung *ist*[2]), und *damit ist er das geworden, was man für gewöhnlich als homogen bezeichnet.* Im Zusammenhang hiermit steht das folgende Beispiel.

3. In Jordans „Handbuch der Vermessungskunde"[3]) findet man eine Anweisung zur Winkelausgleichung bei geodätischen Dreiecksmessungen, welche so beginnt: „Wenn in einem ebenen Dreieck die drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen werden, mit den Ergebnissen α, β, γ, so wird wegen der Messungsfehler ein Widerspruch der Summe $\alpha + \beta + \gamma$ gegen 180^0 auftreten, welchen man auf die drei gemessenen Winkel zu gleichen Teilen verteilt."

Man wird sagen: Der Geometer *setzt* hier *voraus* daß die euklidische Geometrie in unserem Raume gilt. Er tut dies in der Tat, aber er tut noch mehr. Er *bewirkt*, daß sie gilt. Man kann die Anweisung auch so fassen: Messe ich die drei Winkel eines ebenen Dreiecks, und erhalte ich die Zahlen α, β, γ, so bezeichne ich die Zahl $|180 - (\alpha + \beta + \gamma)|$ als „Widerspruch" oder „Fehler" und verteile usw.

---

1) Oder besser gesagt: „Handle *ich* konsequent so im ganzen Verlaufe meines Aufbaues meiner wissenschaftlichen Welt" — durch welche Ausdrucksweise man den großen erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten der obigen Ausdrucksweise entgeht. Es handelt sich nämlich hier, wie — vielleicht überflüssig — noch betont sein mag, nicht um die Art, wie die Wissenschaft in Wirklichkeit fortschritt und fortschreitet, sondern um die Art, wie ihr Dasein und Fortschreiten *theoretisch* am besten erklärt werden könne.

2) Wir wollen damit keineswegs sagen, daß jeder beliebige Satz auf diese Weise „wahr gemacht" werden könne. Näheres würde zuweit führen. Hier handelt es sich nur um das spezielle Beispiel des Raumes.

3) II. Bd. 4. Aufl. p. 20.

Was ist nun ein „Fehler“? Man kann ihn definieren als den Betrag einer Abweichung von einem „richtigen“ Werte. Um also von einem Fehler sprechen zu können, *muß vorher der „richtige Wert“ definiert sein*, sei es als arithmetisches Mittel mehrerer Beobachtungen usw., sei es durch irgendein anderes Gesetz. Wir haben den Satz:

Will man bei einer Beobachtung von „Fehlern“ sprechen, so muß vorher (d. h. vor der Beobachtung) der richtige Wert in irgendeiner Weise definiert sein. In unserem speziellen Falle ist der Fehler durch den Satz von der Winkelsumme im Dreieck definiert.

4. Schließlich sei noch ein letztes Beispiel angeführt, das uns auf ein neues wichtiges Verhältnis aufmerksam macht. Denken wir uns, wir hätten einen Körper vertikal geradlinig gegen die Erde geworfen, und der Körper mache in seiner Bahn plötzlich eine Ausbiegung. Diese muß nach dem Satze vom Grunde eine Ursache haben. Wir sagen: „Eine Kraft“ hat den Körper abgelenkt; d. h. wir befolgen hier und sonst die folgende *Definition*: „Kraft“ nennen wir (oder „ist“) das, was an der gleichförmig geradlinigen Bewegung eines Körpers eine Änderung hervorruft. Aber indem wir sie befolgen, bewirken wir die Gültigkeit des folgenden Gesetzes: Ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, ist in gleichförmig geradliniger Bewegung befindlich.

Übrigens kann man auch unser zweites Beispiel auf die Form des vorliegenden bringen, indem man etwa sagt: „Materie“ nenne ich alles, was die Homogenität des Raumes stört. Dann folgt: Der materielose Raum ist homogen.

Gerade unser viertes Beispiel erinnert uns daran, — wenn wir uns jetzt zu einer kurzen Besprechung der vorstehenden Beispiele wenden —, daß in letzter Zeit auch des öfteren Meinungen aufgetreten sind, daß eine Reihe, wenn nicht alle, unserer wissenschaftlichen Gesetze auf Definitionen zurückgehen. Unter „Definition“ ist dabei aber (auch wenn dies zu betonen versäumt wird) nicht die Namengebung als solche verstanden, sondern die dieser vorausgehende Begriffsabgrenzung, indem das Wesentliche dabei die Tatsache ist, daß ich gerade das und das durch einen eigenen Namen bezeichne. Und unser letztes Beispiel zeigt, daß derartige „Definitionen“ eine sehr große Verwandtschaft mit den „willkürlichen Festsetzungen“ haben, welch letztere wir eingangs erwähnten, und welche wir nun noch betrachten müssen.

Wir sahen, daß wir an die Natur mit einer Reihe von vorgefaßten Anschauungen, wenn wir zunächst so sagen dürfen, herantreten, ja heranzutreten gezwungen sind, welche experimentell nie begründet oder widerlegt werden können. Darauf erhebt sich sofort die Frage:

Warum wählen wir hierzu gerade *diese* Anschauungen und keine anderen? Eine konzise Antwort auf diese Frage haben wir bis jetzt noch nicht. Das Machsche Ökonomieprinzip — das den Versuch zu einer Antwort darstellt — gibt eine solche nur scheinbar, denn es gibt kein Kriterium für die von ihm geforderte höchste „Einfachheit".

Von hier aus läßt sich dann auch die Entstehung solcher Ausdrücke wie „willkürliche Festsetzung" verstehen. Es war gezeigt, daß wir mit Meinungen schon an die Natur herantreten, die zunächst als unabhängig von letzterer erscheinen. Ist dieses einmal zum Bewußtsein gekommen, so ist leicht die Konsequenz gezogen: also kann ich auch mit einer *anderen* Meinung an die Natur herantreten. Doch ist diese Konsequenz in keiner Weise eine logische Folge der obigen Resultate, wie das sofort erhellt. Denn *daraus, daß ich einen Satz nicht experimentell beweisen kann, folgt noch nicht, daß er beliebig d. h. überhaupt nicht „beweisbar" sei, ob wir momentan andere Beweismittel kennen oder nicht.*[1])

Eine Untersuchung darüber, inwieweit etwa das Machsche Ökonomieprinzip[2]) eines Ausbaues fähig wäre, so daß es uns eine Antwort geben könnte auf unsere Hauptfrage, würde hier zu weit führen.

Zusammenfassend dürfen wir schließlich sagen: *Es gibt fundamentale Sätze innerhalb der exakten Wissenschaften, welche experimentell nicht bewiesen werden können.*

Ein exakter Grund, warum wir gerade mit ihnen und nicht mit irgendwelchen anderen solchen Sätzen an die Natur herantreten, ist zurzeit nicht bekannt.

Es ist äußerst unwahrscheinlich, daß diese Sätze im gewöhnlichen Sinne des Wortes „willkürlich" oder „beliebig" sind.

---

1) Es scheint in letzter Zeit obiger unrichtige Schluß in der Tat öfters gezogen worden zu sein. Was den Ausdruck „Festsetzung" oder „reine Festsetzung" (der Ausdruck „willkürliche Festsetzung" kommt nicht vor) in meiner Abhandlung „Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen" München, Theodor Ackermann 1907, anbelangt, so soll dieser nichts weiter bezeichnen — wie das ja auch Herr Hessenberg annimmt, — als den obigen Tatbestand, daß nämlich ein solcher Satz der experimentellen Erfahrung vorhergeht, sowie, daß es von meinem Willen abhängt, ob ich den Satz verwende, genau so, wie es von meinem Willen abhängt, ob ich Wissenschaft überhaupt treiben will. Dagegen soll damit keineswegs gesagt sein, daß der jeweilige, spezielle *Inhalt* eines solchen Satzes willkürlich sei. Im übrigen ist eine nochmalige ausdrückliche Feststellung dieses Wortsinnes wohl nicht überflüssig, und ich bin Herrn Hessenberg dankbar, mir dazu Gelegenheit gegeben zu haben. Immerhin scheint es schwer, einen anderen treffenden Ausdruck für den beschriebenen Sachverhalt zu finden.

2) resp. die von mir l. c. gegebene Definition von „einfachst".

Die fortdauernde absolute Gültigkeit dieser Sätze wird gewährleistet durch das sog. Prinzip der Exhaustion,[1]), über das es erlaubt sei, noch einige Worte zu sagen.

Was damit gemeint ist, wird zunächst vielleicht durch ein *Analogie* am klarsten. Denken wir uns die ersten paar Näherungskurven der Entwickelung einer gegebenen Funktion in eine Fouriersche Reihe aufgezeichnet nebst der gegebenen Funktion selbst. Betrachten wir nun die erste Näherungskurve. Diese stellt innerhalb des Bereiches der uns durch die Fouriersche Entwickelung gegebenen Darstellungsmöglichkeiten gewissermaßen die „einfachste“ Annahme dar, die gemacht wird, um die Funktion zu „erklären“. Weicht diese Näherungskurve ab von der gegebenen Kurve, dann sagen wir nicht, diese „Erklärung“ sei falsch, sondern wir bewirken, daß sie trotz alledem gültig bleibt, indem wir ein zweites „Gesetz“ angeben, die Kurve des zweiten Gliedes, welche über die erste Kurve superponiert, den Unterschied ausgleichen soll, aber auch wieder „möglichst einfach“ ist usw.

In der Praxis, wie bei unserem 3. Beispiel (siehe auch 2.), stellt sich der Vorgang so dar: Gegeben ist eine empirische Beobachtung (Messung) der drei Winkel eines ebenen Dreiecks. Diese Beobachtung soll erklärt werden. Die erste Exhaustion ist der Satz von der Winkelsumme im Dreieck. Dann bleibt eine vielleicht noch relativ kleine Differenz. Nun kommen durch eine zweite Exhaustion etwa die Gesetze der Refraktion der Lichtstrahlen in der Luft zur Berücksichtigung. Das liefert einen zweiten Wert usw. Konvergiert das Verfahren, dann ist es gut, konvergiert es nicht, d. h. bleibt immer noch ein nennenswerter „Fehler“, so suchen wir noch weitere, bisher nicht in Betracht gezogene allgemeine Gesetze, durch deren Exhaustion der Beobachtungswert affiziert wird. Finden sich solche nicht mehr, und es bleibt trotzdem der Fehler über einer gewissen Größe, dann ist der Fehler ein „zufälliger“, der einzelnen Beobachtung anhaftender.

Weiter auf die wichtigen und interessanten hier noch auftauchenden Fragen einzugehen, würde zuweit über den gesteckten Rahmen der vorstehenden kurzen und nur andeutenden Bemerkungen hinausführen.

---

1) S. meine oben zitierte Arbeit S. 29.

Die Zehnerzählweise.

Von P. Schade in Gotha.

Je dichter im letzten Halbjahrhundert der Verkehr sein Bahn- und Kabelnetz ausbaute, um so stärker wurde unter den Erdvölkern das Bedürfnis nach einem *erdweltgemeinsamen* Maßsysteme. Denn an den heutigen Völkermaßen offenbart sich eine erstaunliche Regellosigkeit und Inkonsequenz, sowohl *unter* wie *in* den einzelnen Systemen. Heute ist kein einziges derselben mehr folgerichtig auf *alle* Maßgebiete ausgedehnt. Die altbabylonische Kultur besaß ein streng sexagesimales, über Raum, Stoff und Zeit ausgreifendes System und war damit „fortgeschrittener", als wir heute es mit unseren Systemen sind. Wir erbten von ihnen nur einzelne Trümmerstücke, zwischen die eine spätere Entwickelung ihre Fremdkörper einschob, um so die einst gewahrte, *wichtigste* Bedingung jeden Maßsystems, nämlich *Einheitlichkeit der Unterteilung*, aufzuheben. Welche Logik liegt beispielsweise in der Tatsache, daß im heutigen, etwa 400 Jahre alten englischen Maßsysteme die Einheiten untereinander durch folgende Vielzahl von Teilern abgestuft sind: 2, 3, 4, 10, 12, 14, 20, 100, 640, 1760, 4840? Selbst die reinste moderne Teilung, die dekadisch-metrische, steht, wo sie über Raum und Stoff bereits herrscht, erst vor ihrer Ausbreitung über Winkel, Zeit und Kraft. Tagaus, tagein verschwendet der Erdweltmarkt an wirre Maßformen einen gewaltigen Arbeits-, Zeit- und Kostenaufwand. Gegenwärtig staunen wir über das Vorwärtsstürmen menschlicher Geisteskraft auf allen ihren Betätigungszweigen, — ist im Gegensatz hierzu nicht minder bemerkenswert das zähe Festhalten der Jahrhunderte an den umständlichsten Maßformen? Stevin zog 1585 die Konsequenz aus einer der wichtigsten mathematischen Erfindungen, aus der „Null". Bis die Zeit den Wert seiner Dezimalbrüche erkannte, vergingen zwei Jahrhunderte; ein weiteres Jahrhundert hindurch tönten und verhallten die Stimmen, die nach strenger Folgerichtigkeit dezimaler Zählweise in den Völkermaßen riefen.

Die unbestreitbare und unüberwindliche Stärkeüberlegenheit des metrischen Systems liegt in dem Umstande, daß es als einzigen Teiler zwischen den Maßeinheitsstufen die Zahl 10 aufweist. Hierdurch eroberte sich diese Maßart in unvergleichlich kurzer Zeitspanne das ganze festländische Westeuropa und Südamerika. Immer stärker drängen die U. S. A. und die großen britischen Kolonien, denen der Handel die metrischen Maße zuführt, eben nach diesen hin. Das gleiche Ziel ver-

folgen mit stetig steigendem Erfolge im britischen Mutterlande selbst schon seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts weite wissenschaftliche und kaufmännische Kreise (Metric comittee of the British Association for the advancement of Science, International Association for obtaining one uniform decimal system of measures, weights and coins). Besonders dringlich wünscht die Erdweltwissenschaft mit dem Erdverkehre eine *einheitliche Erdweltzeit.* Als die Einführung der M. E. Z. erwogen wurde, betonte Moltke diesen Wunsch in seiner denkwürdigen Rede (Reichstagsverhandlungen 1890/91, I. Session, Bd. 3, S. 2092). In gleicher Weise befürwortete in der 28. Reichstagssitzung vom 23. Januar 1893 Stadthagen die Einführung der M. E. Z. als Vorstufe für eine Weltzeit. Alle bisherigen internationalen Geographenkongresse enthielten gleichwie der jetzige IX. Genfer in ihren Programmen die Anregung zu erdweltgemeinsamen Maßformen.

In Altbabylon wurde die Zahl 60 Grundzahl des Zählsystems aus dem astronomischen Grunde, daß das ursprüngliche Sonnenjahr 360 Tage aufwies, und aus den mathematischen Gründen, daß der Halbmesser sich sechsmal in den Kreis eintragen läßt, sowie, daß die Zahl 60 für die damals allein bekannte Rechnung mit reinen Brüchen die Teiler 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15 usw. enthält. Nur diese Teilbarkeit vermochte das Vorsetzen sexagesimaler Zählungsweise vor diejenige mit der natürlichen Zehnerzahlenreihe herbeizuführen. Aber seit Nutzung der Null wurde die dezimale Teilungsweise alleinherrschend in unserer modernen trigonometrisch-logarithmischen Rechnungsart und vorherrschend in allen neueren Völkermaßsystemen. Gleicht doch die Dezimalbruchrechnung den Mangel des reinen Teilers 3, welch letzterer der Zehnzahl fehlt, für die Praxis mehr als aus; sonst wäre eben die moderne Entwickelung der Zehnerzählweise unmöglich gewesen. In dem Meinungsstreite um die zweckmäßigsten Maßformen, der nun schon durch die Jahrhunderte wogt, und den erst die konsequente Durchführung streng einheitlicher Teilweise schlichten kann, haben auch die Anhänger der sexagesimalen Zählweise die praktische Überlegenheit der dezimalen unumwunden zugegeben, so z. B. 1899 auf der Münchener 71. Ärzte- und Naturforscherversammlung und dem Berliner VII. Internationalen Geographenkongreß sowie noch jüngst in der Marinerundschau 1908 S. 478 K. v. S.-K. und S. 900 G. Pellehn. Denn vor der Sechzigzahl bietet die Zehnzahl außer der Dezimalbruchrechnung den nicht minder wichtigen Vorteil enger zusammenfallender Zahlenperioden, wodurch sich diese den verschiedensten praktischen Bedürfnissen in glücklichster Weise anpassen. Rechnet doch im metrischen Maßgebiete der Maschinenbauer mit Millimetern, der Physiker mit Zentimetern, der Brückenbauer mit Dezimetern, der Luft-

schiffer mit Metern, der Artillerist mit Hektometern, der Eisenbahner mit Kilometern u. a. m. Hierbei bleibt die Bequemlichkeit im eigenen Sondergebiete und zugleich der innige Zusammenhang mit den übrigen Gebieten gewahrt.

Nach Darlegen dieser praktischen Gesichtspunkte bleibt die Frage zu beantworten: wie konnte sich auf jenen oben angeführten, deutschen Zusammenkünften eine Stimmenmehrheit über den Vorschlag des „Berichtes über die Winkelteilung der Tafelkommission" (Bd. VIII, 1900, S. 139 ff. des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung) hinwegsetzen? Die Erklärung liegt darin, daß die damals ausschlaggebenden Vertreter reinwissenschaftlicher Gebiete eben andersartige Arbeitsweisen und -ziele haben als der Verkehr des täglichen Lebens. Der wissenschaftliche Forscher wendet sich beim Verfolgen eines Zieles zunächst zurück nach dem von der Vorzeit aufgerichteten Unterbau. Er beansprucht und nimmt sich für seine exakteste Arbeit in erster Linie jede verfügbare Zeit; ihn drängt nichts. Ihn lösen neue Maße jedesmal von seiner nächsten Vergangenheit los und muten ihm Unbequemlichkeiten zu. Alle praktischen Lebensberufe aber richten ihre Blicke auf die nächstkommende, allermeist drängende Zukunft. Für letztere gewinnen die *einfachsten* Maßformen, die ihre Ziele am schnellsten und sichersten erreichen lassen, ausschlaggebende Bedeutung. So kommt es, daß reinwissenschaftliche Kreise den Vorteil einfacherer Arbeitsweise kaum recht würdigen und im wesentlichen nur Einheitlichkeit verfechten. An diesen praktischen Maßfragen ist immerhin auch der reine Mathematiker unmittelbar beteiligt. Denn es handelt sich um die weittragende Entscheidung: Zu welcher Zählweise greift die Zukunftskultur?

Bemerkung zum zweiten Teil meines mengentheoretischen Berichtes.

Von A. SCHOENFLIES in Königsberg i. Pr.

Ich teile hier zwei kurze Bemerkungen zu meinem Berichte mit. Die erste bezieht sich auf eine Arbeit von Zoárd de Geöcze, die ich S. 262, Anm. 1 ganz kurz erwähne. Es heißt dort: „Er bedient sich der allgemeinen Methode von Lebesgue, benutzt aber nur gewisse der Raumkurve eingeschriebene Polyeder, die er geeignet wählt; C. R. 144 (1907) S. 253". Die Arbeit bezieht sich jedoch naturgemäß auf *Flächen*.[1]) Außerdem möchte ich heute noch folgendes hinzufügen:

1) Die ausführliche Darstellung erschien in ungarischer Sprache.

1. Zoárd de Geöcze operiert allerdings, analog wie Lebesgue, mit der *unteren Grenze* der Oberflächen gewisser Polyeder, und zwar aller der Fläche eingeschriebenen, ist aber, wie er mir mitteilt, unabhängig von Lebesgue zu dieser Konzeption gekommen. Sei T diese untere Grenze.

2. Er hat zweitens einen analytisch definierten Grenzwert t aufgestellt, der mittels einer rechteckigen Teilung der xy-Ebene gewonnen wird, und gezeigt, daß für eine Fläche der Form $z = f(x, y)$ dieser Grenzwert nicht größer sein kann als T.

3. Hat die Fläche die Eigenschaft, daß die Sehne $P_1 P_2$ zweier ihrer Punkte mit der xy-Ebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente unterhalb einer endlichen Größe G bleibt, so ist $T = t$. Für diese Flächen ist damit die Oberflächenbestimmung gelöst.

Die zweite Bemerkung betrifft eine auf S. 134 enthaltene Vermutung über die räumliche Form des S. 99 enthaltenen Satzes über die Durchdringung von Polygonen. Diese Vermutung trifft in der dort gegebenen Form nicht zu[1]); eine neue, an einzelnen Beispielen als richtig erkannte Regel mag jedoch zunächst unausgesprochen bleiben. Immerhin ist eine Ermittelung und Ableitung des bezüglichen grundlegenden Satzes dringend zu wünschen.

Luczakscher Winkeldreiteilungszirkel.

Von E. Haentzschel in Berlin.

Im 16. Bande, Juniheft 1907, S. 401 des Jahresberichtes der D. M. V. ist die ungewöhnliche Art, mit der Hr. Lehrer Stanislaus Luczak in Sciborze, Kreis Hohensalza, einen von ihm erfundenen und ihm durch D.R.P. Nr. 175233 geschützten Winkeldreiteilungszirkel anpreist, genügend gekennzeichnet worden. Es sei gestattet, sachlich zu registrieren, um was es sich handelt.

Der Katalog math. u. math.-phys. Modelle und Instrumente, der von Hrn. v. Dyck im Auftrage der D. M. V. herausgegeben worden ist (München 1892), verzeichnet auf S. 225, II. Abteilung, Zeichenapparate, unter Nr. 96 einen Zirkeleinsatz für Winkeldrittelung des Hrn. Hermes, den die weltbekannte Firma C. Riefler in München ausgeführt hat, freilich ohne sich ein Patent erteilen zu lassen. Das Einsatzstück in

1) In der Anmerkung wird versehentlich die Zusammenhangszahl für ebene Ringflächen benutzt.

den Zirkel hat am Ende eine zweizinkige Gabel. Die beiden Zirkelfüße und die Gabel liegen in einer und derselben Ebene. An der Verbindungsstelle von Einsatzstück und Gabelsteg sitzt ein Gelenk. Der Apparat erlaubt eine *Pascalsche Schneckenlinie* punktweise zu konstruieren, worauf ja eine der vielen Arten von Winkeldrittelungen beruht.

Ersetzt man das eine Gelenk dieses Zirkeleinsatzes von Hermes durch Gelenke an den beiden Enden des Steges der Gabel, und setzt man den Einsatz *um 90° gedreht* in einen Zirkel ein, so erhält man den *patentierten Luczakschen* Winkeldreiteilungszirkel. Die Ebene der beiden Zirkelfüße und die Ebene der Gabel stehen demnach senkrecht aufeinander. Offenbar ist das Patent zu Unrecht erteilt. Der Luczaksche Winkeldreiteiler wird in folgender Weise gehandhabt. Ist $\sphericalangle BAC$ der gegebene Winkel, $AB = AC$, so halbiere man ihn durch AF und verlängere FA und BA über den Scheitel hinaus. Den Abstand der Gabelspitzen mache man gleich BC. Man setze den längeren (gewöhnlichen) Zirkelschenkel in B ein, öffne den Zirkel so weit, daß die Öffnung der Gabel, gleich BC, in die beiden Verlängerungen einpaßt, so daß die Gabelspitze D auf die Verlängerung von FA, die Gabelspitze E auf die Verlängerung von BA zu liegen kommt. Verbinde D mit B und C, so ist $\sphericalangle BDC = \frac{1}{3} \sphericalangle BAC$. Parallelen durch A zu DB und DC dritteln schließlich $\sphericalangle BAC$.

In einer kleinen Broschüre: „Math.-geom. Lösung des Problems der Dreiteilung beliebiger Winkel" (Hohensalza, Provinz Posen, Kujawischer Bote), auf deren Umschlag der Unsinn zu lesen ist: „Der Beweis ist patentamtlich geschützt", weshalb ich ihn auch hier nicht verraten darf, beweist Luczak, daß Punkt E auf der Kurve mit der Gleichung

$$\eta = \left(\frac{c'}{2} + \xi\right)\sqrt{\frac{c' - \xi}{c' + \xi}},$$

$$c' = 2p = \text{Abstand der Gabelspitzen } BC,$$

liegt, welche Kurve die *Trisektrix-Kurve von Maclaurin* ist, wie man direkt aus *Maclaurin*, Treatise of fluxions, Vol. I, Edinburgh 1742, S. 262—263, und Fig. 124 auf Tafel 14, aber auch aus *Gino Loria*, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, deutsch von Schütte, Leipzig 1902, B. G. Teubner, S. 81, ersehen kann.

Der Luczaksche Dreiteilungszirkel erlaubt also die *Trisektrix-Kurve von Maclaurin* punktweise zu konstruieren.

Über Minimaldoppelflächen.

Von R. v. Lilienthal in Münster i. W.

Der von S. Lie (Mathematische Annalen Bd. 14. 1878. S. 345) aufgestellte Begriff der Minimaldoppelflächen, der auch imaginäre Flächen umfaßt, ist für die Flächentheorie von großer Bedeutung geworden. Aber die Bedingungen, unter denen eine Minimaldoppelfläche reell ist, scheinen mir bisher nicht mit der nötigen Klarheit und Vollständigkeit aufgestellt zu sein. Um diese Bedingungen herzuleiten, sind einige Vorbetrachtungen nötig.

Bedeuten $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ drei analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen s, so belegt Lie das durch die Gleichungen:

(1) $$x = A(s),\ y = B(s),\ z = C(s)$$

dargestellte analytische Gebilde mit dem Namen „Kurve“. Die komplexen Zahlen x, y, z werden dabei als „die Koordinaten eines Punktes“ der Kurve bezeichnet. Eine solche „Kurve“ enthält doppelt unendlich viele „Punkte“. Besteht hier die Beziehung:

$$\left(\frac{dA(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dB(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dC(s)}{ds}\right)^2 = 0,$$

so heißt die Kurve eine „Minimalkurve“.

Sind $\mathsf{A}(t)$, $\mathsf{B}(t)$, $\Gamma(t)$ drei analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen t, so belegt Lie das durch die Gleichungen:

(2) $$x = A(s) + \mathsf{A}(t),\ y = B(s) + \mathsf{B}(t),\ z = C(s) + \Gamma(t)$$

dargestellte analytische Gebilde mit dem Namen „Translationsfläche“. Die komplexen Zahlen x, y, z werden dabei als die „Koordinaten“ eines Punktes der Translationsfläche bezeichnet. Eine solche Fläche besitzt vierfach unendlich viele Punkte.

Wenn sowohl:

$$\left(\frac{dA(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dB(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dC(s)}{ds}\right)^2 = 0,$$

als:

$$\left(\frac{d\mathsf{A}(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathsf{B}(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma(t)}{dt}\right)^2 = 0,$$

so heißt die Translationsfläche eine „Minimalfläche“, da die Funktionen x, y, z der Bedingung für eine reelle Minimalfläche formell genügen.

Eine Minimalfläche heißt eine „Doppelfläche“, wenn die auf ihr gelegenen Minimalkurven, wie sich Lie ausdrückt, eine irreduktible

Schar bilden, oder mit anderen Worten, wenn jede Kurve $t = \text{const.}$ mit einer Kurve $s = \text{const.}$ zusammenfällt. Lie stellt als allgemeinste Gleichungen einer Minimaldoppelfläche die folgenden auf:

$$(3)\qquad x = A(s) + A(t),\ y = B(s) + B(t),\ z = C(s) + C(t).$$

Diese Behauptung läßt sich so beweisen. Man betrachte eine auf der Fläche gelegene Minimalkurve $t = \text{const.}$, etwa $t = t_0$. Soll sie mit einer Kurve $s = \text{const.}$, etwa $s = s_0$, zusammenfallen, so muß durch jeden Wert von s ein solcher Wert von t bestimmt sein, daß:

$$A(s) + \mathsf{A}(t_0) = A(s_0) + \mathsf{A}(t), \text{ usw.}$$

oder:

$$A(s) - \mathsf{A}(t) = A(s_0) - \mathsf{A}(t_0), \text{ usw.}$$

Dies besagt, daß sich eine solche Funktion $\varphi(s)$ von s finden lassen muß, die für t gesetzt die Ausdrücke $A(s) - \mathsf{A}(t)$, $B(s) - \mathsf{B}(t)$, $C(s) - \Gamma(t)$ von s unabhängig macht. Besitzt die Gleichung $t = \varphi(s)$ die Umkehrung $s = \psi(t)$, so werden auch die Ausdrücke:

$$A(\psi(t_0)) - \mathsf{A}(t_0),\ B(\psi(t_0)) - \mathsf{B}(t_0),\ C(\psi(t_0)) - \Gamma(t_0)$$

von t_0 unabhängig, und unsere Bedingungen sind nicht nur für die Minimalkurve $t = t_0$, sondern auch für jede Minimalkurve $t = \text{const.}$ oder $s = \text{const.}$ erfüllt.

Wir nehmen:

$$A(s) - \mathsf{A}(\varphi(s)) = C_1,$$
$$B(s) - \mathsf{B}(\varphi(s)) = C_2,$$
$$C(s) - \Gamma(\varphi(s)) = C_3,$$

wo C_1, C_2, C_3 komplexe Konstanten bezeichnen.

Setzen wir nun:

$$a(s) = A(s) - \frac{C_1}{2},\ b(s) = B(s) - \frac{C_2}{2},\ c(s) = C(s) - \frac{C_3}{2},$$

$$\alpha(t) = \mathsf{A}(t) + \frac{C_1}{2},\ \beta(t) = \mathsf{B}(t) + \frac{C_2}{2},\ \gamma(t) = \Gamma(t) + \frac{C_3}{2},$$

so ist:

$$x = a(s) + \alpha(t) \text{ usw.}$$

sowie:

$$a(s) = \alpha(\varphi(s)),\ b(s) = \beta(\varphi(s)),\ c(s) = \gamma(\varphi(s)),$$

d. h. die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ müssen durch eine geeignete Substitution $t = \varphi(s)$ in die Funktionen $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ übergehen. Damit ist die Allgemeingültigkeit der Lieschen Darstellung (3) der Minimaldoppelflächen nachgewiesen.

In der von C. Schilling (Inauguraldissertation, Göttingen 1880, S. 10) gegebenen Darstellung der Bedingungen für die Irreduktibilität der Minimalkurvenschar, nämlich:

$$A(s) - \mathsf{A}(t) = C_1, \text{ usw.}$$

fehlen die Bemerkungen, daß t als Funktion von s anzusehen ist, und daß man es hier noch keineswegs mit den Bedingungen für die Reellität einer Minimaldoppelfläche zu tun hat.

Wir beantworten im folgenden zuerst die Frage, unter welchen Bedingungen die Gleichungen (3) eine reelle Minimalfläche darstellen, sodann die Frage, welche Form diese Bedingungen annehmen, wenn man die Weierstraßsche Darstellung einer Minimalkurve zugrunde legt.

I.

Die von S. Lie (a. a. S. 347) angegebene Bedingung für die Reellität der durch die Gleichungen (3) dargestellten Minimalfläche ist unklar. Schon der einleitende Satz: „Seien $x + \xi i$, $y + \eta i$, $z + \zeta i$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer reellen Doppelfläche" enthält ein Geheimnis, da die Koordinaten eines Punktes einer reellen Fläche reell sind.

G. Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces. Bd. I. Paris 1887. S. 350) kommt auf Grund von Erwägungen, die ich nicht für beweiskräftig halte (vgl. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 256), zu dem Satz, daß eine durch die Gleichungen (3) dargestellte Doppelfläche reell ist, wenn die durch die Gleichungen:

$$x = A(s), \; y = B(s), \; z = C(s)$$

dargestellte Minimalkurve durch eine Translation zum Zusammenfallen mit ihrer konjugierten Kurve gebracht werden kann, und er fügt hinzu (S. 351), daß die Fläche nicht notwendig reell zu sein braucht, wenn die Translation imaginär ist. Es wird sich zeigen, daß die fragliche Translation stets reell sein muß.

Soll das System (3) eine reelle Fläche liefern, so muß es zunächst eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten darstellen d. h. die Werte von t müssen durch die Werte von s bestimmt sein. Setzen wir:

$$s = u + vi,$$

$$t = p + qi,$$

wo u, v, p, q als reelle veränderliche Zahlen zu betrachten sind, so dürfen wir vorderhand nur annehmen, daß p und q voneinander unabhängige Funktionen von u und v sind. Nun sei:

$$(4)\qquad \begin{cases} A(s) = f_1(u,v) + i\varphi_1(u,v), \\ B(s) = f_2(u,v) + i\varphi_2(u,v), \\ C(s) = f_3(u,v) + i\varphi_3(u,v), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1(p,q) = g_1(u,v), \\ f_2(p,q) = g_2(u,v), \\ f_3(p,q) = g_3(u,v). \end{cases}$$

Damit die betrachtete Mannigfaltigkeit reell ausfällt, muß:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_1(p,q) = -\varphi_1(u,v), \\ \varphi_2(p,q) = -\varphi_2(u,v), \\ \varphi_3(p,q) = -\varphi_3(u,v) \end{cases}$$

sein. Dann wird die Fläche auch durch die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} x = f_1(u,v) + g_1(u,v), \\ y = f_2(u,v) + g_2(u,v), \\ z = f_3(u,v) + g_3(u,v) \end{cases}$$

dargestellt. Es wird sich ergeben, daß diese Gleichungen nur dann eine Minimalfläche festlegen, wenn 1) $p + qi$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen $u - vi$ ist, und wenn 2) $f_1 - g_1$, $f_2 - g_2$, $f_3 - g_3$ reelle Konstanten sind.

Zum Beweise dieses Satzes ziehen wir zunächst aus der ersten Gleichung (6) die Folgerungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1(p,q)}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial u} + \dfrac{\partial \varphi_1(p,q)}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial u} = -\dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \varphi_1(p,q)}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial \varphi_1(p,q)}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial v} = -\dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v}. \end{cases}$$

Da aber

$$\frac{\partial \varphi_1(p,q)}{\partial p} = -\frac{\partial f_1(p,q)}{\partial q}, \quad \frac{\partial \varphi_1(p,q)}{\partial q} = \frac{\partial f_1(p,q)}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u} = -\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial f_1(u,v)}{\partial u},$$

so können wir dem System (8) die Form geben:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(p,q)}{\partial q}\dfrac{\partial p}{\partial u} - \dfrac{\partial f_1(p,q)}{\partial p}\dfrac{\partial q}{\partial u} = -\dfrac{\partial f_1(u,v)}{\partial v}, \\ -\dfrac{\partial f_1(p,q)}{\partial q}\dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1(p,q)}{\partial p}\dfrac{\partial q}{\partial v} = -\dfrac{\partial f_1(u,v)}{\partial u}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial f_1(p,q)}{\partial q} = -\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial v}\frac{\frac{\partial q}{\partial v}}{\varDelta} - \frac{\partial f_1(u,v)}{\partial u}\frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\varDelta},$$

$$\frac{\partial f_1(p,q)}{\partial p} = -\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial v}\frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\varDelta} - \frac{\partial f_1(u,v)}{\partial u}\frac{\frac{\partial p}{\partial u}}{\varDelta},$$

wo:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}.$$

Da:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\frac{\partial q}{\partial v}}{\Delta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\Delta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\Delta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\frac{\partial p}{\partial u}}{\Delta},$$

so ergibt sich aus (5):

$$\frac{\partial f_1(p,q)}{\partial q} = \frac{1}{\Delta}\left\{-\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u}\right\},$$

$$\frac{\partial f_1(p,q)}{\partial p} = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right\}$$

und damit:

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = -\frac{\partial f_1}{\partial u}\,\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}{\Delta} - \frac{\partial f_1}{\partial v}\,\frac{\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}}{\Delta},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_1}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}}{\Delta} - \frac{\partial f_1}{\partial v}\,\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2}{\Delta}.$$

Setzen wir nun:

$$1 - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}{\Delta} = a, \qquad -\frac{\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}}{\Delta} = b,$$

$$1 - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2}{\Delta} = c,$$

ferner:

$$f_1(u,v) = x_0, \quad f_2(u,v) = y_0, \quad f_3(u,v) = z_0,$$

so folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial(f_1 + g_1)}{\partial u} = a\,\frac{\partial x_0}{\partial u} + b\,\frac{\partial x_0}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(f_1 + g_1)}{\partial v} = b\,\frac{\partial x_0}{\partial u} + c\,\frac{\partial x_0}{\partial v},$$

wo statt x auch y oder z gesetzt werden darf.

Wir nehmen wie üblich:

$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Fläche (x_0, y_0, z_0) sollen mit E_0, D_0, usw. bezeichnet werden. Dann ist bekanntlich:

$$E_0 = G_0, \quad F_0 = 0, \quad D_0 + D_0'' = 0.$$

Man erhält:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = (ac - b^2) \begin{vmatrix} \frac{\partial y_0}{\partial u} & \frac{\partial z_2}{\partial v} \\ \frac{\partial z_0}{\partial u} & \frac{\partial z_0}{\partial v} \end{vmatrix}, \text{ usw.}$$

und findet:

$$E = (a^2 + b^2)E_0, \quad F = b(a + c)E_0, \quad G = (b^2 + c^2)E_0,$$

$$D = (aD_0 + bD_0')(ac - b^2),$$

$$D' = (aD_0' - bD_0)(ac - b^2),$$

$$D' = (bD_0 + cD_0')(ac - b^2),$$

$$D'' = (bD_0' - cD_0)(ac - b^2).$$

Hieraus folgt die Bedingung:

(10) $$2bD_0 + (c - a)D_0' = 0.$$

Damit die Fläche (x, y, z) eine Minimalfläche sei, muß die Bedingung

$$GD + ED'' - 2FD' = 0$$

erfüllt sein, und dies liefert ausgerechnet die Beziehung:

(11) $$(c - a)D_0 - 2bD_0' = 0.$$

Die Ausdrücke D_0 und D_0' können nur dann beständig verschwinden, wenn die Fläche (x_0, y_0, z_0) eine Ebene ist. Da dieser Fall selbstverständlich ausgeschlossen wird, ergibt sich aus den Bedingungen (10) und (11), daß

$$c - a = 0 \quad \text{und} \quad b = 0$$

ist. Die Gleichung $b = 0$ befriedigen wir durch die Annahme:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial q}{\partial v}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Hierdurch wird:

$$\Delta = -\frac{1}{\lambda}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2\right) = -\lambda\left(\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2\right).$$

Die Gleichung $a = c$ ergibt $\lambda^2 = 1$. Die Annahme $\lambda = -1$ würde auf konstante x, y, z führen. Bei $\lambda = 1$ aber folgt:

$$\frac{\partial(g_1 - f_1)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial(g_1 - f_1)}{\partial v} = 0,$$

so daß die Differenzen $g_1 - f_1$, $g_2 - f_2$, $g_3 - f_3$ konstant, und zwar reell konstant ausfallen. Ferner folgt jetzt:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{\partial q}{\partial v}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u},$$

und dies bedeutet, daß $p + qi$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen $u - vi$ ist. Wir haben somit den Satz:

Damit die Gleichungen (3) *eine reelle Minimalfläche darstellen, muß sich eine Funktion* $\varphi(s')$ *der zu* s *konjugierten Veränderlichen* s' *finden lassen, die bewirkt, daß:*

$$A(\varphi(s')) = A_1(s') + \alpha, \quad B(\varphi(s')) = B_1(s') + \beta, \quad C(\varphi(s')) = C_1(s') + \gamma$$

wird, wo α, β, γ *reelle Konstanten und* $A_1(s')$, $B_1(s')$, $C_1(s')$ *die zu* $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ *konjugierten Werte bedeuten.*

Man versteht unter der zu einer analytischen Funktion $f(s)$ konjugierten Funktion diejenige, welche aus $f(s)$ hervorgeht, wenn man in $f(s)$ alle Konstanten durch die ihnen konjugierten Werte ersetzt. Bezeichnen wir die zu $f(s)$ konjugierte Funktion mit $f_1(s)$, so gilt z. B., wenn:

$$f(s) = \psi_1(u, v) + i\psi_2(u, v),$$

die Gleichung:

$$f_1(s') = \psi_1(u, v) - i\psi_2(u, v),$$

aber:

$$f_1(s) = \psi_1(u, -v) - i\psi_2(u, -v).$$

Hiernach können wir auch von einer zu einer imaginären Kurve konjugierten Kurve reden. Die analytische Darstellung der letzteren wird aus der ersteren erhalten, indem die für die Koordinatenwerte geltenden Funktionen durch ihre konjugierten Funktionen ersetzt werden. Unser Satz ist dann gleichbedeutend mit der Aussage, daß die durch die Gleichungen

$$x = A(s), \quad y = B(s), \quad z = C(s)$$

dargestellte Kurve durch eine reelle Translation in ihre konjugierte überführt werden kann.

Die betrachtete Minimalkurve liegt nur dann auf der durch das System (3) bestimmten Minimalfläche, wenn die Funktionen $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ für ein und denselben Wert von s zugleich verschwinden. Wendet man unsere Reellitätsbedingung auf eine auf der Fläche liegende Minimalkurve, für die etwa $t = t_0$ sei, an, so ergibt sich folgendes: Der zu t_0 konjugierte Wert sei t_0', mit τ werde der Wert von $\varphi(s')$ bezeichnet. Dann ist:

$$A(\tau) - \alpha = A_1(s'),$$

und damit:

$$A(\tau) + A(t_0) - \alpha + A_1(t_0') - A(t_0) = A_1(s') + A_1(t_0').$$

Setzt man nun:

$$A_1(t_0') - A(t_0) = \lambda i, \quad B_1(t_0') - B(t_0) = \mu i, \quad C_1(t_0') - C(t_0) = \nu i,$$

so hat man:

$$A(\tau) + A(t_0) - \alpha + \lambda i = A_1(s') + A_1(t_0'),$$
$$B(\tau) + B(t_0) - \beta + \mu i = B_1(s') + B_1(t_0'),$$
$$C(\tau) + C(t_0) - \gamma + \nu i = C_1(s') + C_1(t_0').$$

Die Größen λ, μ, ν sind reelle Zahlen, die nach Wahl von t_0 festliegen. Die vorstehenden Gleichungen zeigen, daß jede auf der Fläche liegende Minimalkurve in ihre konjugierte durch eine Translation übergeht, deren reelle Komponenten in der ganzen Fläche konstant sind, während ihre rein imaginären Komponenten von dem die Kurve individualisierenden Parameterwert abhängen.

Hierin glaube ich die Erklärung der oben angeführten Stelle bei Lie erblicken zu dürfen, wie ich das schon in einem Enzyklopädieartikel (III D. 5, S. 325, Anmerkung) ausgesprochen habe.

Wir ziehen aus den Reellitätsbedingungen zwei dem Inhalte nach bekannte Folgerungen.

1. Man lege der Veränderlichen s einen bestimmten Wert σ_1 bei, dessen konjugierter Wert σ_1' sei. Ferner setze man:

$$\sigma_2 = \varphi(\sigma_1').$$

Der zu σ_2 konjugierte Wert sei σ_2'. Zu $s = \sigma_1$ und $s = \sigma_2$ mögen die Flächenpunkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ gehören. Dann ist:

$$x_1 = A(\sigma_1) + A(\varphi(\sigma_1')) = A(\sigma_1) + A_1(\sigma_1') + \alpha,$$
$$x_2 = A(\sigma_2) + A(\varphi(\sigma_2')) = A_1(\sigma_1') + \alpha + A_1(\sigma_2') + \alpha.$$

Aus der Gleichung:

$$A(\sigma_2) = A_1(\sigma_1') + \alpha$$

folgt, wenn i durch $-i$ ersetzt wird,

$$A_1(\sigma_2') = A(\sigma_1) + \alpha,$$

daher ist:

$$x_2 = A(\sigma_1) + A_1(\sigma_1') + 3\alpha$$

oder:

$$x_2 = x_1 + 2\alpha,$$

und ebenso:

$$y_2 = y_1 + 2\beta,$$
$$z_2 = z_1 + 2\gamma.$$

Wenn die Zahlen α, β, γ nicht sämtlich gleich Null sind, geht hiernach die Fläche durch eine Parallelverschiebung mit den Komponenten 2α, 2β, 2γ in sich selbst über, sie ist also periodisch.

2. Stellt man die Richtungskosinus der Flächennormalen in der Form dar:

$$X = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Y = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Z = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

wo die Wurzel $\sqrt{EG - F^2}$ als positive Zahl anzusehen ist, so bedeuten X, Y, Z die Richtungskosinus derjenigen Halbnormalen, in der man auf der Fläche stehen muß, um, den Blick auf die dem wachsenden u entsprechende Halbtangente der Kurve $v = \text{const.}$ gerichtet, die dem wachsenden v entsprechende Halbtangente der Kurve $u = \text{const.}$ zur Linken zu haben, vorausgesetzt, daß man die positive y-Achse zur Linken hat, wenn man in der positiven z-Achse auf der x, y-Ebene stehend in die Richtung der positiven x-Achse blickt.

Wir zeigen, daß die so bestimmten Halbnormalen der Fläche in den zu $s = \sigma_1$ und $s = \sigma_2$ gehörenden Punkten parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Man findet zunächst:

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = -2i\left(\frac{dB(s)}{ds}\frac{dC_1(s')}{ds'} - \frac{dC(s)}{ds}\frac{dB_1(s')}{ds'}\right).$$

Die rechts stehende Klammer umschließt eine rein imaginäre Zahl, die mit Δ_1 bezeichnet werden soll. Entsprechend sei:

$$\frac{dC(s)}{ds}\frac{dA_1(s')}{ds'} - \frac{dA(s)}{ds}\frac{dC_1(s')}{ds'} = \Delta_2,$$

$$\frac{dA(s)}{ds}\frac{dB_1(s')}{ds'} - \frac{dB(s)}{ds}\frac{dA_1(s')}{ds'} = \Delta_3.$$

Dann folgt:

$$X = \frac{-i\Delta_1}{\sqrt{-\Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2}}, \quad Y = \frac{-i\Delta_2}{\sqrt{-\Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2}}, \quad Z = \frac{-i\Delta_3}{\sqrt{-\Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2}}.$$

Die Gleichung

$$A(\varphi(s')) = A_1(s') + \alpha$$

liefert:

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi(s')}{ds'} = \frac{dA_1(s')}{ds'}.$$

Nehmen wir hierin $s' = \sigma_1'$, so bedeutet $\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}$ den Wert von $\frac{dA(s)}{ds}$ an der Stelle $s = \sigma_2$. Wir können daher die letzte Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\left(\frac{dA(s)}{ds}\right)_{s=\sigma_2}\left(\frac{d\varphi(s')}{ds'}\right)_{s'=\sigma_1'} = \left(\frac{dA_1(s')}{ds'}\right)_{s'=\sigma_1'},$$

und erhalten weiter, wenn $\varphi_1(s)$ zu $\varphi(s')$ konjugiert ist:

$$\left(\frac{dA_1(s')}{ds'}\right)_{s'=\sigma_2'}\left(\frac{d\varphi_1(s)}{ds}\right)_{s=\sigma_1} = \left(\frac{dA(s)}{ds}\right)_{s=\sigma_1},$$

folglich:

$$(\Delta_1)_{\substack{s=\sigma_2,\\ s'=\sigma_2'}} = \left\{\frac{\frac{dB_1(s')}{ds'}\frac{dC(s)}{ds} - \frac{dC_1(s')}{ds'}\frac{dB(s)}{ds}}{\frac{d\varphi(s')}{ds'}\frac{d\varphi_1(s)}{ds}}\right\}_{\substack{s=\sigma_1,\\ s'=\sigma_1'}}$$

$$= \left\{\frac{-\Delta_1}{\frac{d\varphi(s')}{ds'}\frac{d\varphi_1(s)}{ds}}\right\}_{\substack{s=\sigma_1\\ s'=\sigma_1'}}.$$

Da das Produkt $\frac{d\varphi(s')}{ds'}\frac{d\varphi_1(s)}{ds}$ eine positive Zahl ist, hat man:

$$\sqrt{\frac{-\Delta_1^2-\Delta_2^2-\Delta_3^2}{\left(\frac{d\varphi(s')}{ds'}\frac{d\varphi_1(s)}{ds}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{d\varphi(s')}{ds'}\frac{d\varphi_1(s)}{ds}}\sqrt{-\Delta_1^2-\Delta_2^2-\Delta_3^2}.$$

Bezeichnen wir daher mit X_1, Y_1, Z_1 die Werte von X, Y, Z für $s=\sigma_1$, mit X_2, Y_2, Z_2 die Werte von X, Y, Z für $s=\sigma_2$, so ergibt sich:

$$X_2 = -X_1, \quad Y_2 = -Y_1, \quad Z_2 = -Z_1.$$

Für $\alpha=\beta=\gamma=0$ entspricht den Werten $s=\sigma_1$ und $s=\sigma_2$ ein und derselbe Flächenpunkt, und es sind demnach im allgemeinen in einem Flächenpunkt zwei einander entgegengesetzte Normalrichtungen von der betrachteten Art vorhanden. Wir haben es also mit einer „einseitigen" Fläche zu tun.

II.

Die Funktionen $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ mögen nun in der Weierstraßschen Form, nämlich:

$$(1) \quad A(s) = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s}(1-\vartheta^2)\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta, \quad B(s) = \frac{i}{2}\int_{s_1}^{s}(1+\vartheta^2)\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta,$$

$$C(s) = \int_{s_1}^{s}\vartheta\,\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta$$

gegeben sein. Dabei sind die unteren Grenzen der drei Integrale als konstant anzusehen. Die Integrationsveränderliche ist mit einem besonderen Buchstaben bezeichnet, um hervortreten zu lassen, daß die Integrale Funktionen ihrer oberen Grenzen sind.

Auf Grund dieser Darstellungsform einer Minimalkurve ist die Reellitätsbedingung einer Minimaldoppelfläche wohl zuerst von C. Schilling (a. a. O. S. 10) behandelt. Es wird hier ohne Beweis die Erfüllung des Gleichungssystems:

$$(1-s^2)\mathfrak{F}(s)ds = (1-s'^2)\mathfrak{F}_1(s')ds',$$
$$(1+s^2)\mathfrak{F}(s)ds = (1+s'^2)\mathfrak{F}_1(s')ds',$$
$$s\,\mathfrak{F}(s)ds = s'\,\mathfrak{F}_1(s')ds$$

gefordert, wobei, wohl infolge eines Druckfehlers, vor der rechten Seite der zweiten Gleichung ein minus-Zeichen fehlt. $\mathfrak{F}_1(s)$ bedeutet die konjugierte Funktion von $\mathfrak{F}(s)$. Es findet sich, daß:

$$(2) \qquad s' = -\frac{1}{s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{s^2}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right) = -s^2\mathfrak{F}(s).$$

Die erste dieser Beziehungen ist gleichbedeutend mit $u^2 + v^2 = -1$, also ganz unstatthaft. Die gleiche Bemerkung gilt für die Darstellung von G. Darboux (a. a. O. S. 353). Man kann nicht $u - vi$ als analytische Funktion von $u + vi$ betrachten. Die Darstellung bei G. Scheffers (a. a. O. S. 259) ist in diesem Punkte einwandfrei.

Die zweite der Beziehungen (2) wird allgemein als ausreichend für die Reellität einer Minimaldoppelfläche betrachtet. Man hat dabei gar keine Rücksicht auf die unteren Integralgrenzen s_1, s_2, s_3 genommen. Will man mit Hilfe der Integrale (1) einer beliebig gewählten Funktion $\mathfrak{F}(s)$ eine Minimalfläche zuordnen, so spielen diese Grenzen keine wesentliche Rolle; eine Änderung der Grenzen zieht nur eine Parallelverschiebung der Fläche nach sich. Anders verhält es sich, wenn man mit Hilfe der Integrale (1) eine Minimaldoppelfläche bestimmt. Hier wird:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s}(1-\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta + \frac{1}{2}\int_{s_1}^{t}(1-\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta, \\ y = \frac{i}{2}\int_{s_2}^{s}(1+\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta + \frac{i}{2}\int_{s_2}^{t}(1+\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta, \\ z = \int_{s_3}^{s}\vartheta\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{s_3}^{t}\vartheta\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta. \end{cases}$$

Unsere Reellitätsbedingungen drücken sich hier so aus:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{s_1}^{\varphi(s')}(1-\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta = +\frac{1}{2}\int_{s_1'}^{s'}(1-\vartheta^2)\,\mathfrak{F}_1(\vartheta)\,d\vartheta + \alpha, \\ \frac{i}{2}\int_{s_2}^{\varphi(s')}(1+\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta = -\frac{i}{2}\int_{s_2'}^{s'}(1+\vartheta^2)\,\mathfrak{F}_1(\vartheta) + \beta, \\ \int_{s_3}^{\varphi(s')}\vartheta\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{s_3'}^{s'}\vartheta\,\mathfrak{F}_1(\vartheta)\,d\vartheta + \gamma, \end{cases}$$

wo unter s_1', s_2', s_3' die zu s_1, s_2, s_3 konjugierten Zahlen zu verstehen sind. Differentiieren wir nach s', so folgt:

$$(1-\varphi^2)\,\mathfrak{F}(\varphi)\frac{d\varphi}{ds'}=(1-s'^2)\,\mathfrak{F}_1(s'),$$

$$(1+\varphi^2)\,\mathfrak{F}(\varphi)\frac{d\varphi}{ds'}=-(1+s'^2)\,\mathfrak{F}_1(s'),$$

$$\varphi\,\mathfrak{F}(\varphi)\ \frac{d\varphi}{ds'}=s'\,\mathfrak{F}_1(s').$$

Daraus ergibt sich:

$$\varphi(s')=-\frac{1}{s'},$$

sowie:

$$\mathfrak{F}_1(s')=-\left(\frac{1}{s'}\right)^4\mathfrak{F}\left(-\frac{1}{s'}\right)$$

oder:

$$\mathfrak{F}(s)=-\frac{1}{s^4}\,\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so geht das Integral:

$$\int_{s_1'}^{s'}(1-\vartheta^2)\,\mathfrak{F}_1(\vartheta)\,d\vartheta$$

durch die Substitution $\vartheta=-\frac{1}{\tau}$ über in das Integral:

$$\int_{-\frac{1}{s_1'}}^{-\frac{1}{s'}}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau,$$

und dieses ist bei richtiger Wahl der Integrationswege gleich der Summe:

$$\int_{-\frac{1}{s_1'}}^{s_1}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau+\int_{s_1}^{-\frac{1}{s'}}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau.$$

Aus der ersten der Gleichungen (4) folgt jetzt:

(5) $$\int_{-\frac{1}{s_1'}}^{s_1}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau+2\alpha=0,$$

und auf ähnliche Weise ergibt sich aus den beiden andern:

(6) $$i\int_{-\frac{1}{s_2'}}^{s_2}(1+\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau+2\beta=0,\quad \int_{-\frac{1}{s_3'}}^{s_3}\tau\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau+\gamma=0.$$

Neben der Bedingung (2) *für die Funktion* $\mathfrak{F}(s)$ *erhalten wir also für die Zahlen* s_1, s_2, s_3 *die Bedingungen, daß die Integrale*

$$\int_{-\frac{1}{s_1'}}^{s_1}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau,\quad i\int_{-\frac{1}{s_2'}}^{s_2}(1+\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau,\quad \int_{-\frac{1}{s_3'}}^{s_3}\tau\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau$$

reell sein müssen.

Man kann diese Bedingungen noch anders ausdrücken. Das erste der vorstehenden Integrale sei über ein vom Punkte $s = \frac{-1}{s_1'}$ bis zum Punkte $s = s_1$ hinführendes Kurvenstück (K_1) erstreckt. Dann muß sein:

$$\int_{-\frac{1}{s_1'}}^{s_1}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau = \int_{-\frac{1}{s_1}}^{s_1'}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}_1(\tau)\,d\tau,$$

wo das rechts stehende Integral über das dem Kurvenstück (K_1) konjugierte Kurvenstück (K_1') zu erstrecken ist. Durch die Substitution $\tau = -\frac{1}{\vartheta}$ geht das rechts stehende Integral in das Integral:

$$\int_{s_1}^{-\frac{1}{s_1'}}(1-\vartheta^2)\,\mathfrak{F}(\vartheta)\,d\vartheta$$

über, und dieses ist über das aus (K_1') durch die Substitution $\tau = -\frac{1}{\vartheta}$ hervorgehende Kurvenstück (K_1'') zu erstrecken. Da es auf die Bezeichnung der Integrationsveränderlichen nicht ankommt, haben wir also statt der Bedingung (5) die folgende:

$$(7)\qquad \int_{-\frac{1}{s_1'}\,(K_1)}^{s_1}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau = \int_{s_1\,(K_1'')}^{-\frac{1}{s_1'}}(1-\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau.$$

Entsprechend kann man statt der Bedingungen (6) auch schreiben:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \int_{-\frac{1}{s_2'}\,(K_2)}^{s_2}(1+\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau &= \int_{s_2\,(K_2'')}^{-\frac{1}{s_2'}}(1+\tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau,\\ \int_{-\frac{1}{s_3'}\,(K_3)}^{s_3}\tau\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau &= \int_{s_3\,(K_3'')}^{-\frac{1}{s_3'}}\tau\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Um ein Beispiel anzuführen, setzen wir:

$$A(s) = \frac{im \sin s}{2}, \quad B(s) = -\frac{im \cos s}{2}, \quad C(s) = \frac{ms}{2} + p + qi,$$

wo m, p, q reelle Konstanten bedeuten.

Für $t = s' + \pi$ entsteht:

$$A(t) = \frac{-im \sin s'}{2}, \quad B(t) = \frac{im \cos s'}{2}, \quad C(t) = \frac{ms'}{2} + p + \frac{\pi m}{2} + qi.$$

Die betrachtete Minimalkurve geht nur dann durch eine reelle Verschiebung in ihre konjugierte über, wenn q verschwindet. Wir erhalten:

$$x = im \sin vi \cos u, \quad y = im \sin vi \sin u, \quad z = mu + p + \frac{m\pi}{2},$$

haben es also mit einer gewöhnlichen Schraubenfläche zu tun. Die Zahlen α, β, γ haben der Reihe nach die Werte $0, 0, \frac{m\pi}{2}$.

Um die Weierstraßsche Form zu benutzen, nehmen wir:

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{im}{2s^2}$$

und setzen:

$$s_1 = \varrho_1 e^{i\varphi_1}, \quad s_2 = \varrho_2 e^{i\varphi_2}, \quad s_3 = \varrho_3 e^{i\varphi_3}.$$

Man erhält:

$$-\frac{im}{2}\int\limits_{-\frac{1}{s_1'}}^{s_1} \frac{(1-\vartheta^2)\,d\vartheta}{\vartheta^2} = im\left(\frac{1}{\varrho_1} + \varrho_1\right)\cos\varphi_1,$$

$$\frac{m}{2}\int\limits_{-\frac{1}{s_2'}}^{s_2} \frac{(1+\vartheta^2)\,d\vartheta}{\vartheta^2} = im\left(\frac{1}{\varrho_2} + \varrho_2\right)\sin\varphi_2.$$

Das erste dieser Integrale wird nur dann reell, wenn $\cos\varphi_1$ verschwindet, d. h. der Punkt $s = s_1$ muß auf der y-Achse angenommen werden nach Ausschluß des Nullpunkts. Ebenso muß der Punkt $s = s_2$ auf der x-Achse angenommen werden nach Ausschluß des Nullpunkts.

In dem Integral:

$$\frac{-im}{2}\int\limits_{-\frac{1}{s_3'}}^{s_3} \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

spielt der Integrationsweg eine Rolle. Wir nehmen $-\frac{1}{s_3'} = \frac{1}{\varrho_3} e^{i(\varphi_3 + \pi)}$, legen aber dem in der oberen Grenze s_3 auftretenden Polarwinkel den

Wert $\varphi_3 + 2(\nu + 1)\pi$ bei, so daß der Integrationsweg (K_3) in der Richtung der wachsenden oder abnehmenden Winkel um den Nullpunkt herumführt, je nachdem ν positiv (einschließlich der Null) oder negativ ist. Das Integral wird dann gleich:

$$-\frac{im}{2}\left(2\log\varrho_3 + i(2\nu + 1)\pi\right).$$

Es ist nur dann reell, wenn $\varrho_3 = 1$, d. h. der Punkt $s = s_3$ muß sich auf dem um den Nullpunkt mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreise befinden.

Geometrische Invariantentheorie der binären Formen.[1])

Von Hermann Wiener in Darmstadt.

I. Analytische und geometrische Fragestellung.

Die Geometrie hat aus der Invariantentheorie der binären algebraischen Formen noch bei weitem nicht den vollen Nutzen gezogen; und doch gibt es kaum einen Stoff, der den Methoden der projektiven Geometrie inhaltlich so angepaßt wäre wie die Invariantentheorie. Beschränkt man sich auf die *projektiven Eigenschaften* der algebraischen Formen und auf *rationale Prozesse*, so unterliegt es keinem Zweifel, daß geometrische Betrachtungen wesentliche Vorteile gegenüber der rechnerischen Behandlung haben. Dies zeigt schon der Vergleich der beiderseitigen Grundlagen: Die Analysis stützt sich auf die drei Rechnungsarten des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens sowie auf die Umkehrungen der beiden ersteren; die Geometrie kennt im binären Gebiete nur die Bestimmung projektiver, im besonderen involutorischer Punktreihen und (als Sonderfall der letzteren Konstruktion) die Bestimmung harmonischer Punktepaare. Diese drei Aufgaben werden in Zeichen so ausgedrückt:

(α) $$ABCD \barwedge A'B'C'D'$$

(β) $$ABC \overline{\overline{\wedge}} A'B'C'$$

(γ) $$AB \text{ harm. } A'B',$$

wo jedesmal der zuletzt angeschriebene Punkt aus den voranstehenden zu bestimmen ist. Nun habe ich früher gezeigt, daß jede der beiden ersten

---

1) Auf der Dresdener Naturforscherversammlung hielt ich einen Vortrag gleichen Titels, dessen Inhalt in der folgenden Arbeit weiter ausgeführt ist. Sachlich deckt sich jener Vortrag annähernd mit den Abschnitten I, II, III, VI und teilweise VII. Der Abschnitt V mußte dort wegen Zeitmangels wegbleiben.

Operationen durch eine *endliche* Anzahl der letzten ersetzt werden kann.[1]) Für die Geometrie ergeben sich daher im rationalen binären Gebiet gegenüber der Analysis die beiden Vorteile einer *einheitlichen Grundoperation*[2]) und der *Invarianteneigenschaft* dieser Operation gegenüber den Projektionen (linearen Substitutionen).

Den Nachteil, daß die genannten analytischen Grundoperationen nicht projektiver Natur sind, sucht freilich die Analysis nachträglich dadurch auszugleichen, daß sie aus diesen Operationen gewisse *Zusammenfassungen* einführt, die projektiv sind, wie die Polarenbildung, die Überschiebungen, der Ω-Prozeß u. a. Soll nun die Geometrie nicht hinter der Analysis zurückbleiben, so muß sie alle diese zwar projektiven, aber durch einen analytischen Prozeß definierten Bildungen geometrisch einführen. Dies kann aber nach dem Gesagten nur so verstanden werden, daß sie einen solchen Prozeß *als eine Vorschrift auffaßt, nach der in bestimmter Folge eine endliche Anzahl einfacherer (in letzter Linie harmonischer) Konstruktionen auszuführen ist.*

Auch die Geometrie kennt Zusammenfassungen einfacher Operationen wie z. B. die Bildungen (α) und (β), die, wie erwähnt, aus (γ) hervorgehen, ferner die Polarenbildung, die vorhin als analytische Operation genannt wurde, und die sich auf (α) und (β) stützt.[3]) Eine neue derartige Zusammenfassung einfacherer Konstruktionen liefert uns im folgenden die Lösung einer Aufgabe, die ich als „Grundaufgabe der binären Formen" bezeichne. An diese Aufgabe knüpft die geometrische Fassung des Überschiebungsprozesses sowie insbesondere die Produktbildung an, die sich bisher der geometrischen Konstruktion gegenüber sehr spröde gezeigt hat. Von weiteren Aufgaben, die ich mit denselben Methoden lösen konnte, die ich aber erst in späteren Veröffentlichungen be-

1) Diesen Satz habe ich in meinem Vortrag „Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie" (vgl. Berichte der Mathematiker-Vereinigung für das Jahr 1891) mitgeteilt, seinen Beweis in den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1891, math. phys. Kl. S. 669 ff.

2) Die Definition des Multiplizierens und Potenzierens geht zwar formal in letzter Linie auf das Addieren zurück, man ist jedoch nicht imstande, z. B. das Produkt zweier irrationalen Zahlen durch eine endliche Anzahl von Additionen zu bilden, während man (wie oben erwähnt wurde) in der Projektivität (α) den Punkt D' aus den 7 übrigen durch eine endliche Anzahl von Konstruktionen harmonischer Punkte finden kann. Die im Wurf ($A'B'C'D'$) möglicherweise enthaltene Irrationalität ist ebendieselbe wie die des Wurfes ($ABCD$), oder in anderen Worten, der Punkt D' ist in dem Rationalitätsbereich der 7 übrigen Punkte enthalten.

3) Man vergleiche meine Hab. Schr. Halle (Darmstadt 1885). „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden."

handeln werde, erwähne ich noch die Bildung der Resultante zweier binären Formen und die Bestimmung der zu m gegebenen Formen m^{ten} Grades apolaren Form.

II. Die geometrischen Formen.

Weder in projektiven Eigenschaften noch in rational lösbaren Aufgaben liegt der Ursprung für die algebraische Theorie der binären Formen. Eine Gleichung m^{ten} Grades

(1) $$p(t^m) = 0,$$

die für $m = 3$ geschrieben sei:

(1′) $$p(t^3) = a'''t^3 + 3a''t^2 + 3a't + a = 0,$$

enthielt ursprünglich die *Forderung*, solche Werte t zu suchen, die in die Gleichung eingesetzt, sie erfüllen. Erst viel später trat die durch rationale Prozesse lösbare Aufgabe auf, aus der nun homogen geschriebenen binären Form

$$t_2^3\, p\left(\frac{t_1^3}{t_2^3}\right) = a'''t_1^3 + 3a''t_1^2 t_2 + 3a't_1 t_2^2 + at_2^3,$$

die bei linearer Transformation invariant mit ihr verknüpften Ausdrücke zu bilden. Diese an Stelle der Gleichung tretende Form ist dann nur noch als Träger der Koeffizienten, $p(a''', a'', a', a)$, zu betrachten und verliert vollends ihre geometrische Bedeutung, wenn man auf ihre Versinnbildlichung durch ihre Nullwerte verzichtet, die auf einer Geraden (oder einem anderen rationalen Träger) aufgetragen werden. Um nun dieser verblaßten Form wiederum einen geometrischen Inhalt zu geben, hat man der erwähnten Forderung nach rationalen Prozessen, d. h. nach linearer Konstruktion, Rechnung zu tragen. Man ersetze zu diesem Zweck die Gleichung (1) durch eine andere, die ihr wechselweise eindeutig zugeordnet ist, nämlich durch die in m Veränderlichen lineare Gleichung, die aus jener durch $(m-1)$-malige Polarenbildungen hervorgeht. Eine solche Gleichung,

(2) $$p(x, y, \cdot\cdot v, w) = 0,$$

die für $m = 3$

(2′) $$p(xyz) = a'''xyz + a''(xy + xz + yz) + a'(x + y + z) + a = 0$$

lautet, stellt wiederum eine Forderung dar: man soll zu zwei beliebig gegebenen Werten x, y einen dritten Wert z (bzw. zu $m-1$ Werten einen m^{ten}) berechnen; oder geometrisch gesprochen, man soll zu zwei beliebig gegebenen Punkten X, Y einen dritten Z und allgemein zu $m-1$ be-

liebig gegebenen Punkten $X, Y, .. U, V$ den m^{ten} Punkt W konstruieren; die Zahlenwerte $x, y, .. u, v, w$ sind hierbei die aus einem festen Nullpunkt in gegebenem Sinn und mit gegebener Einheit gemessenen Abstände jener auf einer Geraden liegenden Punkte, oder allgemeiner ihre auf der Geraden oder einer rationalen Trägerkurve aus drei gewählten Punkten festgelegten Doppelverhältnisse. Dabei geben wir der größeren Übersichtlichkeit halber die homogene Schreibweise auf.[1])

Die Gesamtheit der durch die Gleichung (2) definierten Gruppen von je m Punkten nenne ich eine geometrische Polarform (ein Polarsystem) m^{ten} Grades; ich habe diese Formen mit den eingangs erwähnten Hilfsmitteln α) bis γ) in meiner Habilitationsschrift hergeleitet, nachdem vorher Herr H. Thieme[2]) auf Grund linearer ebener und räumlicher Konstruktionen die Polarsysteme von Kurven und Flächen m^{ter}

---

1) Die homogene Schreibweise ist bei Gleichungen zweckmäßig, um eine Erniedrigung des Grades der Gleichung für den Fall zu verhindern, daß eine oder mehrere Wurzeln unendlich werden; sie ist aber bei den mehrfach linearen binären Formen nicht nötig, da jeder der m Werte $x, y, .. w$ die ganze Wertereihe von $+0$ über $\pm\infty$ bis -0 durchläuft. Nur wenn eine der zugehörigen Punktreihen W in einen festen Punkt A entartet, d. h. wenn sich ein Faktor $(w-a)$ abspaltet, würde die homogene Schreibweise noch gerechtfertigt erscheinen, sofern A in den unendlich fernen Punkt der Geraden hineinfällt. Dann kann man aber diesen Faktor ebensogut $(w-\infty)$ schreiben.

2) H. Thieme: „Die Definition der geometrischen Gebilde durch Konstruktion ihrer Polarsysteme", Zeitschr. Math. Phys. 24. (1879) S. 221 u. 276 ff. In dieser Arbeit werden zum erstenmal vom Standpunkt der linearen Konstruktion aus die Kurven und Flächen 2. O. definiert. Eine Übertragung der Sätze auf das binäre Gebiet (wie sie der Verfasser auf S. 225, 4. Absatz andeutet) scheint mir aber unzulässig, da die Formen m^{ten} Grades aus den Büscheln der Formen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades abgeleitet werden, diese aber für binäre Formen 2. Grades bei Thieme weder behandelt werden, noch vorausgesetzt werden durften. Die Theorie der Büschel von Involutionen, abgeleitet aus den Voraussetzungen α) bis γ), bildet den Inhalt des ersten Teiles meiner Hab. Schr. Der zweite Teil hat mit der Thiemeschen Arbeit naturgemäß den Schluß von m auf $m+1$ gemein; sonst aber ist die Methode ganz verschieden. Dies zeigt sich schon in der anders gearteten (oben erwähnten) Definition des Polarsystems, dann aber vor allem in seiner Darstellung, die bei mir so geschieht, daß (entsprechend der homogenen Koordinatenbestimmung aus $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$) auf zwei feste „Ausgangspunkte" in allen möglichen Weisen $m-1$ Punkte einer Gruppe verteilt werden, und für jede Verteilung der m^{te} Punkt als ein Bestimmungsstück des Polarsystems gewählt wird. Aus diesen m Punkten erhält man $m-1$ Involutionen, mittels derer die Ergänzung beliebiger $m-1$ Punkte konstruiert wird.

Herr Thieme verwendet m „konjugierte Paare", dies sind je zwei Punkte, auf die m Punkte einer Gruppe beliebig verteilt sind. Der zweite Punkt eines Paares ist bei gegebenem Polarsystem vieldeutig aus dem ersten bestimmt, wenn nicht $m-1$ Punkte im ersten vereinigt sind. Aber auch in diesem einfachsten Falle

Ordnung definiert hatte. Dagegen führten meine Versuche, auch die früher erwähnten, zur Invariantenbildung nötigen Prozesse für die Geometrie zu gewinnen, erst zum Ziele, als ich außer den Polarformen noch allgemeinere Formen in Betracht zog, die gleichfalls der vorhin aufgestellten Forderung genügen, und die durch eine allgemeine, in m Veränderlichen lineare Gleichung definiert werden, wobei die Bedingung der Vertauschbarkeit dieser Veränderlichen fallen gelassen wird. Eine solche Gleichung

$$(3) \qquad f(xy\ldots zw) = 0$$

sei für $m = 3$ so geschrieben:

$$(3') \quad f(xyz) = a_{123}xyz + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0.$$

Diese mehrfach linearen (multilinearen) Formen sind für die niedrigeren Grade schon eingehend untersucht worden, und zwar ist hier eine Reihe von Arbeiten von le Paige[1]) zu erwähnen, die die Invariantentheorie gerade diesen Formen erschlossen haben. Jedoch liegt diesen Arbeiten die hier erwähnte Auffassung der reinen Geometrie[2]) ferne, und außerdem gelangen sie nicht zu einer allgemeinen Theorie der mehrfach linearen Formen. Dagegen haben le Paige, H. Schubert[3]) und andere schon für niedrigere Grade (im wesentlichen für $m = 3$) eine große Fülle schöner Anwendungen auf die Theorie der Kurven und Flächen gegeben und damit einer allgemeinen Theorie die weitesten Aussichten auf Anwendbarkeit eröffnet.

---

fand ich erhebliche Schwierigkeiten der Konstruktion, da man nicht mit Büschelbildung auskommt, sondern zu höheren linearen Systemen aufsteigen muß.

Diese Bedenken gegen die konstruktive Verwendbarkeit der Thiemeschen Theorie und gegen ihre nicht hinreichend einfachen Grundlagen können der Wertschätzung dieser ersten und wichtigsten Arbeit im Bereich der linearen Geometrie keinen Abbruch tun. Jeder, der an ihr Studium herangegangen ist, wird die Schwierigkeit des Gegenstandes und die Abstraktionskraft des Verfassers herausgefühlt haben.

1) Die einschlägigen Arbeiten von le Paige hat W. Franz Meyer aufgeführt: Jahresber d. D. Math. Ver. 1 (1892) S. 179.

2) Den ersten Schritt zu einer geometrischen Theorie der nicht polaren Formen hat C. Segre in der folgenden Arbeit getan: „Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux", Journ. f. Math. 100 (1887) S. 317; er gibt darin aus den Voraussetzungen α) bis γ) und auf Grund der Rechnung mit geometrischen Verwandtschaften für die in dem 1. Teil meiner Hab. Schr. abgeleiteten Sätze eine sehr vereinfachte Darstellung und entwickelt die vollständige Theorie der Büschel und Bündel von Projektivitäten d. h. von allgemeinen Formen 2. Grades.

3) Math. Ann. 17 (1880) S. 457 ff.: „Die trilinearen Beziehungen zwischen drei einstufigen Grundgebilden."

Wenn ich im folgenden die Anfänge einer solchen allgemeinen Theorie entwickle, so gelingt dies hauptsächlich dadurch, daß ich eine, wie ich glaube, neue Klasse von Formen, die *binären Nullformen*, zugrunde lege, deren Begriff sich unmittelbar aus der in der Einleitung erwähnten „Grundaufgabe“ ergibt.

III. Die Grundaufgabe.

Die Konstruktion der Gruppen aus den für die Formen gegebenen Bestimmungsstücken ist eine später zu behandelnde Aufgabe der linearen Geometrie. Fragt man dagegen nach den Stellen des Trägers, in denen m Punkte einer Gruppe zusammenfallen, so erfordert die Beantwortung dieser Frage die Lösung der Gleichung, die aus (2) hervorgeht, wenn man alle m Veränderlichen einer einzigen, die t heißen möge, gleichsetzt. Dann bekommt man aber eine Gleichung, die mit (1) genau übereinstimmt, und somit gilt der Satz:

Die „Ordnungspunkte“ der durch Gleichung (2) dargestellten Polarform, d. h. die Stellen, in denen m Punkte einer Gruppe zusammenfallen, sind mit den Nullstellen der Gleichung (1) identisch.

Die Bestimmung der Ordnungspunkte der allgemeinen Form m^{ten} Grades führt für $m = 3$ auf die Gleichung

$$(4) \quad f(t^3) = a_{123}t^3 + (a_{12} + a_{13} + a_{23})t^2 + (a_1 + a_2 + a_3)t + a = 0.$$

Es wurde früher gezeigt, daß dieser die folgende Gleichung einer Polarform eindeutig zugeordnet ist:

$$(5) \quad p(xyz) = a_{123}xyz + \tfrac{1}{3}(a_{12} + a_{13} + a_{23})(xy + xz + yz) + \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(x + y + z) + a = 0.$$

Hier haben wir wieder die Gestalt der Gleichung

$$(2) \quad p(xyz) = a'''xyz + a''(xy + xz + yz) + a'(x + y + z) + a = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$(6) \quad a''' = a_{123},\ a'' = \tfrac{1}{3}(a_{12} + a_{13} + a_{23}),\ a' = \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3),\ a = a.$$

Nun ist die Gleichung (5) der Gleichung (3) eindeutig (aber nicht umkehrbar eindeutig) zugeordnet, und es entsteht so die

Grundaufgabe. *Es soll aus der gegebenen nicht polaren Form m^{ten} Grades die „zugeordnete Polarform“ konstruiert werden, d. i. diejenige Polarform, die ihre Ordnungspunkte mit denen der gegebenen Form gemein hat.*[1])

---

1) Für Projektivitäten ($m = 2$) gibt H. Schröter die Lösung der Grundaufgabe, und diese wird von F. London, Math. Ann. 57 (1903) S. 222 ff. auf ebene Kollineationen erweitert. Für $m > 2$ ist mir bisher noch nicht einmal die Stellung der Aufgabe bekannt geworden.

Für eine *Polarform* stimmt die ihr zugeordnete Polarform mit ihr selbst überein.

Die Nullpunkte der Gleichung (4) und (5) sind nur zur Begriffsbildung gebraucht worden, während die Aufstellung der Gleichung (5) aus (3) keineswegs die Auflösung der Gleichung nötig macht, sondern vielmehr mit den denkbar einfachsten rechnerischen Mitteln vor sich geht. Durchaus nicht so einfach und naheliegend ist ihre geometrische Lösung; die Bildungsart der Koeffizienten weist darauf hin, daß hierbei Schwerpunktsbestimmungen und (wegen der Summe) Büschelbildungen im Spiele sind.

IV. Die Büschelbildung und die Konstruktion der Form m^{ten} Grades.

Auf Büschelbildung beruht auch die Konstruktion der im vorigen durch eine Gleichung eingeführten Formen.

Es seien im folgenden die dazu nötigen Sätze mit analytischem Beweis vorausgeschickt; auf den geometrischem Beweis kann ich in dieser ersten Mitteilung über den Gegenstand füglich verzichten, wie ich denn überhaupt die analytische Einkleidung gewählt habe, einerseits um die Veröffentlichung nicht unnötig zu verzögern, andrerseits um den Übergang von der bisherigen zur neuen Auffassung zu erleichtern.

Die geometrische Konstruktion der Form $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades wird dann am Ende dieses Abschnittes auf die Form m^{ten} Grades zurückgeführt, und dieser Schluß von m auf $m+1$ ist gestattet, da die Aufgabe für $m = 2$ gelöst ist.

Um schon in der Schreibweise die Form m^{ten} Grades, d. h. die zwischen den Punktreihen $X, Y, \ldots V, W$ bestehende geometrische Verwandtschaft und die diese Verwandtschaft definierende Gleichung zu unterscheiden, wollen wir unter

$$f(XY \cdots VW)$$

diejenige Form m^{ten} Grades verstehen, die durch die Gleichung

$$f(xy \cdots vw) = 0$$

definiert ist.

Für $m = 2$ ist die Polarform eine Involution, deren Gleichung

$$p(xy) = a''xy + a'(x+y) + a = 0$$

lautet, und die allgemeine Form ist eine Projektivität, die durch die Gleichung

$$f(xy) = a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0$$

dargestellt wird. Die Form dritten Grades $f(XYZ)$ ordnet, wie wir

sahen, einem gegebenen Punktepaar X, Y einen Punkt Z zu, der sie nämlich zu einer Gruppe der Form f ergänzt, ebenso einem gegebenen Punktepaar X, Z einen Punkt Y und einem Punktepaar Y, Z einen Punkt X.

Denkt man sich nun, einen zum Beispiel der X-Reihe angehörigen Punkt X_0 fest, so entspricht jeder Lage von Y eine bestimmte Lage von Z, und die beiden Punktreihen Y und Z bilden eine Projektivität, die wir durch $f(Y_0 | XZ)$ bezeichnen, und die die Gleichung besitzt:

$$f(x_0 | yz) = (a_{123}x_0 + a_{23})yz + (a_{12}x_0 + a_2)y + (a_{13}x_0 + a_3)z + a_1 x_0 + a = 0.$$

Die Projektivität $f(X_0 | YZ)$ nennen wir dann die „Ergänzung“ des Punktes X_0 in der gegebenen Form dritten Grades, da X_0 durch jede Gruppe dieser Projektivität zu einer Gruppe von $f(XYZ)$ ergänzt wird; ebenso bedeutet $f(Y_0 | XZ)$ eine Projektivität zwischen den Reihen X und Z, nämlich die Ergänzung des Punktes Y_0 usw.

Läßt man den vorhin an der Stelle X_0 festgehaltenen Punkt wieder die ganze Punktreihe X durchlaufen, so beschreibt die Ergänzung einen Büschel von Formen zweiten Grades (Projektivitäten), den wir den „Ergänzungsbüschel“ der Reihe X nennen und $f(X | YZ)$ oder auch $f_x(YZ)$ schreiben. Analytisch ist er durch die Gleichung

$$f(x | yz) = f_x(yz) = (a_{123}x + a_{23})yz + (a_{12}x + a_2)y + (a_{13}x + a_3)z + a_1 x + a = 0$$

dargestellt, wo x nun als Parameter des Büschels auftritt, und wo zugleich die Formen des Büschels vermöge der Gleichung auf die Punktreihe X bezogen werden.

Sind umgekehrt zwei beliebige Projektivitäten gegeben, deren Gleichungen wir schreiben wollen

$$f(yz) = a_{23}yz + a_2 y + a_3 z + a = 0$$

und

$$f_1(yz) = a_{123}yz + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0,$$

so kann man hieraus einen allgemeinen Büschel von Formen zweiten Grades (Projektivitäten) bilden:

$$(7)\quad f(yz) + \lambda f_1(yz) = a_{23}yz + a_2 y + a_3 z + a + \lambda(a_{123}yz + a_{12}y + a_{13}z + a_1) = 0$$
$$= (a_{23} + \lambda a_{123})yz + (a_2 + \lambda a_{12})y + (a_3 + \lambda a_{13})z + a + \lambda a_1 = 0.$$

Dann kann man aus ihm eine Form dritten Grades $f(XYZ)$ gewinnen, indem man die im Büschel enthaltenen Projektivitäten auf eine dritte Reihe X projektiv bezieht. Die einfachste analytische Darstellung dieser Beziehung erhält man, wenn man x statt λ setzt. Tut man dies,

so kommt man auf die Gleichung (3), also auf die allgemeine Form dritten Grades.

In der gleichen Weise erhält man die allgemeine Form vierten Grades, indem man einen Büschel von Formen dritten Grades auf eine vierte Reihe projektiv bezieht, usw.

Für eine gegebene Form m^{ten} Grades $f(XY\cdots W)$ und für einen festen Punkt X_0 bedeutet dem vorigen entsprechend $f(X_0 \mid Y\cdots W)$ eine Form $(m-1)^{ten}$ Grades, die „Ergänzung" des Punktes X_0; und es wird $f(X \mid Y\cdots W)$ oder $f_x(Y\cdots W)$ der Ergänzungsbüschel der X-Reihe; allgemeiner für k feste Punkte $X_0, \cdots U_0$ bedeutet $f(X_0\cdots U_0 \mid V\cdots W)$ eine Form $(m-k)^{ten}$ Grades, die Ergänzung jener k Punkte; sie enthält wieder alle Gruppen von $m-k$ Punkten, die jene k festen Punkte in der gegebenen Form zu einer Gruppe von $f(XY\cdots W)$ ergänzen.

Die Ergänzungen von Polarformen sind stets wieder Polarformen, die Ergänzung eines festen Punktes heißt dann auch seine erste Polare, die Ergänzung von k festen Punkten ihre gemischte Polare, jedoch ist die allgemein gültige Bezeichnung „Ergänzung" deutlicher.

Die *Aufgabe der Büschelbildung* ergibt sich aus dem Satze:

Sind zwei Formen m^{ten} Grades gegeben, so ist dadurch ein Büschel von Formen m^{ten} Grades bestimmt. Jede beliebige im Büschel liegende Form ist dann bestimmt, wenn von ihr eine Gruppe gegeben ist, vorausgesetzt, daß diese Gruppe nicht gleichzeitig den beiden gegebenen Formen und damit jeder Form des Büschels angehört.

Ist nämlich die Gleichung des Büschels, der die beiden gegebenen Formen f_1 und f_2 enthalten soll, die folgende:

$$f_\lambda = f_1(xy\cdots w) + \lambda\, f_2(xy\cdots w) = 0, \tag{8}$$

und setzt man in sie die zu einer gegebenen Gruppe $X_0, Y_0, \cdots W_0$ gehörigen Zahlenwerte $x_0, y_0, \cdots w_0$ ein, so berechnet sich daraus ein Wert von λ. Wenn man diesen wieder in die Gleichung (8) einsetzt, so erhält man die Gleichung der gesuchten Form. Gehört diese Gruppe aber gleichzeitig den beiden Formen f_1 und f_2 an, so erhält λ den Wert $0:0$, und die Gleichung ist für jedes λ durch die Werte dieser Gruppe erfüllt.

Hiernach erhält man die folgende Aufgabe der Büschelbildung:

Gegeben seien zwei Formen m^{ten} Grades, $f_1(XY\cdot\cdot VW)$ und $f_2(XY\cdot\cdot VW)$, ferner eine Gruppe von m Punkten $X_0, Y_0, \cdot\cdot V_0, W_0$ und $m-1$ weitere Punkte $X_0', Y_0', \cdot\cdot V_0'$. In der durch die m Punkte $X_0, \cdots W_0$ bestimmten Form f_0 des durch f_1 und f_2 bestimmten Büschels soll die Ergänzung W_0' jener Punkte $X_0', Y_0', \cdot\cdot V_0'$ gesucht werden.

Setzt man die Werte von nur $m-1$ Punkten $Y_0, Z_0, \cdots W_0$ in die Gleichung (8) ein, so erhält man die Gleichung:

$$f_1(xy_0z_0\cdots w_0) + \lambda\, f_2(xy_0z_0\cdots w_0) = 0,$$

und diese stellt eine projektive Beziehung zwischen den Werten x und λ her. Ebenso sind die Werte der Ergänzung von $m-1$ beliebigen anderen Punkten auf λ projektiv bezogen, und somit sind die beiden auf λ projektiv bezogenen Wertsysteme auch untereinander projektiv. Daher gilt der Satz:

Werden in vier Formen des Büschels die Ergänzungen zu irgendwelchen $m-1$ Punkten gesucht und in den vier gleichen Formen die Ergänzungen zu irgend $m-1$ anderen Punkten (wo diese auch anderen $m-1$ Reihen angehören können wie die ersten), so sind die vier ersteren Ergänzungspunkte zu den vier letzteren projektiv.

Der Satz gilt selbstverständlich auch für jede beliebige Anzahl von Formen des Büschels, die größer als drei ist, und ebenso für die ganze Reihe der Formen des Büschels. Man kann sagen, jede dieser Reihen von Ergänzungspunkten seien auf die zugehörigen Formen des Büschels projektiv bezogen.

Soll nun mit Hilfe dieses Satzes die Aufgabe der Büschelbildung gelöst werden, so besteht noch eine gewisse Schwierigkeit darin, daß der Büschel durch zwei Formen, die projektive Beziehung aber erst durch drei Formen bestimmt ist. Denkt man sich den Büschel durch die gegebenen Formen f_1 und f_2 bestimmt, und eine dritte Form f_3 des Büschels durch die gegebene Gruppe $X_3, Y_0, Z_0, \cdots W_0$ bestimmt, so hat man die letzten $m-1$ Punkte durch andere zu ersetzen und zu diesen die Ergänzung zu konstruieren. Statt dessen ersetzen wir nur einen dieser Punkte durch einen neuen, etwa Y_0 durch X_0, und können dann durch Wiederholung dieses Verfahrens zum Ziele kommen. Als die vierte in der Projektivität nötige Form denken wir uns diejenige f_0 des Büschels, die durch die Gruppe $X_0, Y_0, Z_0, \cdots W_0$ bestimmt ist. Dann werden in den vier Formen f_0, f_1, f_2, f_3 die Punkte $Y_0, Z_0, \cdots W_0$ durch X_0, X_1, X_2, X_3 zu einer Gruppe ergänzt, und ebenso die Punkte $X_0, Z_0, \cdots W_0$ durch $Y_0 Y_1 Y_2 Y_3$. Von allen diesen Punkten sind $X_0, \cdots W_0$ und X_3 gegeben, X_1, Y_1 und X_2, Y_2 aus den gegebenen Formen f_1 und f_2 konstruiert, und nur der Punkt Y_3 ist unbekannt. Wir finden ihn nach dem letzten Satz aus der Beziehung:

$$X_0X_1X_2X_3 \;\overline{\wedge}\; Y_0Y_1Y_2Y_3,$$

und damit ist das Verfahren angegeben, dessen Wiederholung die Aufgabe der Büschelbildung löst.

Ist z. B. $m = 4$, und sind für die drei Formen f_1, f_2, f_3

die	Punkte	X_1, X_2, X_3	die	Ergänzungen	zu	Y_0, Z_0, W_0,
„	„	Y_1, Y_2, Y_3	„	„	„	X_0', Z_0, W_0,
„	„	Z_1, Z_2, Z_3	„	„	„	X_0', Y_0', W_0,
„	„	W_1, W_2, W_3	„	„	„	X_0', Y_0', Z_0',

so erhält man die Beziehungen:

$$X_0' X_1 X_2 X_3 \barwedge Y_0 Y_1 Y_2 Y_3,$$
$$Y_0' Y_1 Y_2 Y_3 \barwedge Z_0 Z_1 Z_2 Z_3,$$
$$Z_0' Z_1 Z_2 Z_3 \barwedge W_0 W_1 W_2 W_3,$$

wo in jeder Zeile der zuletzt angeschriebene Punkt der gesuchte ist. Damit ist für die durch die gegebene Gruppe $X_3 Y_0 Z_0 W_0$ bestimmte Form f_3 des durch f_1 und f_2 bestimmten Büschels die Ergänzung W_3 der Punkte X_0', Y_0', Z_0' konstruiert.

Eine Form m^{ten} Grades konstruieren heißt, aus ihren gegebenen Bestimmungsstücken zu $m-1$ beliebig gewählten, auf $m-1$ der Reihen verteilten Punkten die Ergänzung in der letzten Reihe zu suchen. Nehmen wir diese Aufgabe für die Formen $(m-1)^{ten}$ Grades als gelöst an (für $m = 2$ besteht sie in der Konstruktion projektiver Punktreihen), so verfährt man für die Formen m^{ten} Grades so:

a) Man wähle zwei Formen $(m-1)^{ten}$ Grades, etwa in den Reihen $Y, Z, \cdots W$ und nehme den durch beide Formen bestimmten Büschel als Ergänzungsbüschel einer neuen Reihe X für die zu bestimmende Form. Diesen Büschel beziehe man (nach S. 300 oben) auf die Punktreihe X projektiv, und damit ist (nach S. 299 oben) die Form m^{ten} Grades bestimmt.

b) Sind nun die $m-1$ Punkte $X_0, Z_0, \cdots W_0$ gegeben und der Punkt Y gesucht, so entspricht dem Punkt X_0 in dem Ergänzungsbüschel eine gewisse Form, und in dieser suche man (nach S. 300 unten) die Ergänzung Y der Punkte $Z_0, \cdots W_0$. Sind dagegen $m-1$ Punkte Y_0, $Z_0, \cdots W_0$ gegeben und X gesucht, so ist hierdurch (nach dem Satze S. 299) eine Form des Ergänzungsbüschels bestimmt, die diese Punkte als Gruppe besitzt, und zu ihr suche man den projektiv entsprechenden Punkt X.

V. Die Produktbildung und die Überschiebungen.

Ehe ich die binären Nullformen kannte, erschien mir die Lösung der „Grundaufgabe“ wegen ihrer Verwendbarkeit für die invarianten Prozesse als der wichtigste Schritt zur geometrischen Begründung der Invariantentheorie. Meine erste Lösung werde ich im nächsten Abschnitt mitteilen und hier vorgreifend zeigen, wie sich Produktbildung

und Überschiebung auf diese Aufgabe zurückführen lassen; es sei jedoch gleich bemerkt, daß nicht diese erste Lösung, sondern die später zu gebende, die sich an die Bestimmung der Nullformen anschließt, die kürzesten Konstruktionen liefert.

Hier gilt mir die Grundaufgabe, welche Lösung man auch wählen mag, als eine *Zusammenfassung projektiver Konstruktionen*, und deshalb erscheint es zweckmäßig, für ihre Lösung eine einfache Schreibweise einzuführen. Wir bezeichnen[1]) daher durch $\boldsymbol{f}(\overline{X\,Y\cdots W})$ die Polarform, die der nicht polaren Form $f(X\,Y\cdots W)$ zugeordnet ist, oder kürzer durch $\bar{\boldsymbol{f}}$ die zugeordnete Polarform von f; und dementsprechend sei $f(\overline{x\,y\ldots w})=0$ die Gleichung dieser Polarform.

Die *Produktbildung* (nullte Überschiebung) zweier Formen ergibt sich folgendermaßen. Sind

$$f(t^m)=0 \quad \text{und} \quad g(t^n)=0$$

zwei Gleichungen vom m^{ten} und n^{ten} Grade, so ist

$$f(t^m)\cdot g(t^n)=0$$

eine Gleichung, die die Wurzeln jener beiden umfaßt. Führt man statt der Gleichungen ihre Polarformen ein (Übergang von Gleichung (1) S. 293 zu Gleichung (2')), so besteht die *Aufgabe der Produktbildung* darin, daß man zu zwei gegebenen Polarformen $\boldsymbol{f}(X_1\,X_2\cdots X_m)$ und $\boldsymbol{g}(Y_1\,Y_2\cdots Y_n)$ eine neue Polarform $\boldsymbol{p}(X_1\cdots X_m\,Y_1\cdots Y_n)$ sucht, deren Ordnungspunkte die der beiden gegebenen Polarformen umfassen. Nun stellt die Gleichung

$$(9)\qquad h(x_1\cdots x_m\,y_1\cdots y_n)=f(x_1\cdots x_m)\cdot g(y_1\cdots y_n)=0$$

eine Form $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades dar, die nicht polar ist, da in ihr zwar die x untereinander und die y untereinander vertauschbar sind, nicht aber die x mit den y. Jedoch umfassen die Nullpunkte dieser Form, wie es verlangt wurde, die der beiden gegebenen Formen, und somit ist

$$(10)\qquad \boldsymbol{p}(X_1\cdots X_m\,Y_1\cdots Y_n)=\boldsymbol{h}(\overline{X_1\cdots X_m\,Y_1\cdots Y_n})$$

die gesuchte Polarform.

Daß die Form $\boldsymbol{h}$, die ich die *unfertige Produktbildung* nennen will, auch geometrisch völlig bestimmt ist, erkennt man in der folgenden Weise: Man wähle $m+n-1$ den Reihen $X_2,\cdots X_m,\ Y_1\cdots Y_n$ angehörige Punkte beliebig und bestimme den letzten, der Reihe X_1 angehörigen Punkt so, daß die m Punkte $X_1, X_2,\cdots X_m$ eine Gruppe

1) Dies entspricht der Bezeichnung von v. Staudt, der das Zeichen der Projektivität $\barwedge$, in dem Falle, daß sie zur Involution wird, in $\overline{\barwedge}$ abändert.

von f bilden. Oder man wähle $m+n-1$ den Reihen $X_1, \cdots X_m$, $Y_2, \cdots Y_n$ angehörige Punkte beliebig und bestimme den letzten, der Reihe Y_1 angehörigen Punkt so, daß die n Punkte Y_1, $Y_2 \cdots Y_n$ eine Gruppe von g bilden. Wegen der Vertauschbarkeit der Reihen X in f und der Reihen Y in g sind hiermit alle Möglichkeiten der Bildung von Gruppen erschöpft und die Form h völlig bestimmt.

Für $m = 1$ wird die erste Form linear, d. h. ein Punkt $f(X) = A$. Man bilde dann die Gruppen, indem man die n Punkte $Y_1, \cdots Y_n$ beliebig wählt und X mit A zusammenfallen läßt, oder indem man X und die $n-1$ Punkte $Y_2, \cdots Y_n$ beliebig wählt, und den n^{ten} Punkt Y_1 so konstruiert, daß Y_1, $Y_2, \cdots Y_n$ eine Gruppe von g bilden.[1])

Bei den *Überschiebungen* beschränken wir uns auf Betrachtung zweier Polarformen vom gleichen Grade, die Ausdehnung auf solche von ungleichem Grade und auf nicht polare Formen geschieht ohne Änderung des Verfahrens. Wir benützen hier ein rückgreifendes Verfahren, das die Überschiebungen für Formen m^{ten} Grades auf die von Formen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückführt und sich auf den Begriff der *Apolarität* stützt. In einer späteren Arbeit werde ich diesem ein zweites Verfahren gegenüberstellen, das sich aus den Eigenschaften der Nullformen ergibt.

Für $m = 2$ sind die gegebenen Polarformen $p(X_1 X_2)$ und $q(Y_1 Y_2)$ Involutionen, und man bilde aus ihnen zuerst die „unfertige 1. Überschiebung", d. i. die Projektivität $f(X_1 Y_1)$, die *die Folge der beiden Involutionen* darstellt. Setzt man nämlich $X_2 = Y_2 = Z$, so erhält man in der gewöhnlichen Schreibweise $X_1 \overline{\overline{\wedge}} Z$, $Z \overline{\overline{\wedge}} Y_1$ und daraus $X_1 \overline{\wedge} Y_1$, und dieses ist die Projektivität $f(X_1 Y_1)$. Sucht man zu ihr die zugeordnete Involution (Doppelpunktsinvolution) $f(X_1 Y_1)$, so ist dies die *erste Überschiebung* der beiden gegebenen Involutionen, sie ist bekanntlich die zu beiden apolare Involution.

Ebenso ergibt sich für zwei polare oder nicht polare Formen m^{ten} Grades die unfertige $(m-1)^{\text{te}}$ (vorletzte) Überschiebung als eine Projektivität $f(X_1 Y_1)$, und die Überschiebung selbst ist ihre zugeordnete Involution $f(\overline{X_1 Y_1})$.[2])

---

1) Die Aufgabe der Produktbildung für $m = 1$ und beliebiges n findet sich geometrisch gelöst in der oben erwähnten Arbeit von H. Thieme S. 283 und 284. Die Vergleichung der dort gegebenen Lösung, die nicht nur sehr umständlich ist, sondern auch weitergehende Hilfsmittel (Bündelbildung) benützt, mit der obigen, die sich in die Gleichung (10) zusammendrängt, zeigt schlagend den Vorteil der „Zusammenfassung" in der Grundaufgabe.

2) Bei nichtpolaren Formen entstehen i. a. je nach der Auswahl der Reihen verschiedene Überschiebungen. Die unfertige erste Überschiebung zweier Projek-

Die analytische Bildung der letzten Überschiebung zweier Formen m^{ten} Grades liefert einen Ausdruck, der keine Veränderlichen mehr enthält, also eine *Invariante* im engeren Sinn. Das Verschwinden dieser Invariante (und nur dieses kann hier geometrisch gedeutet werden) ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die Projektivität $f(X_1 Y_1)$ zur Involution wird. Wir definieren nun:

Zwei Formen m^{ten} Grades heißen apolar, wenn ihre unfertige $(m-1)^{\text{te}}$ Überschiebung zur Involution wird.

Eine solche Projektivität möchte ich „*Apolaritätsprojektivität*“ der beiden Formen nennen. Die Invariante der Apolarität für nicht polare Formen dritten Grades $f(xyz) = a_{123}xyz + \cdots$ und $g(xyz) = b_{123}xyz + \cdots$ schreibe ich hier an:

$$a_{123}b - (a_{12}b_3 + a_{13}b_2 + a_{23}b_1) + (a_1 b_{23} + a_2 b_{13} + a_3 b_{12}) - a b_{123},$$

woraus das Bildungsgesetz für Formen m^{ten} Grades ersichtlich ist.

Da wir vorhin die erste Überschiebung und die Apolaritätsbedingung für zwei Polarformen zweiten Grades aufgestellt haben, nehmen wir an, sie seien für zwei Polarformen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades aufgestellt, und leiten sie daraus für solche m^{ten} Grades ab.

Die beiden gegebenen Polarformen seien

$$p(X_1 X_2 \cdots X_m) \quad \text{und} \quad q(Y_1 Y_2 \cdots Y_m).$$

Aus ihnen leite man zur Bildung der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \cdots k^{\text{ten}}, \cdots (m-1)^{\text{ten}}$ Überschiebung die Ergänzungen von Punkten in der Anzahl $m-1$, $m-2, \cdots m-k, \cdots 1$ ab, die so geschrieben seien, daß die festen Punkte links, die veränderlichen rechts vom Ergänzungsstrich stehen. Durch Wahl der festen Punkte werden wir es erreichen, daß je zwei so gebildete Ergänzungen gleichen Grades apolar werden, nämlich:

$$\begin{array}{lll}
p(X_1 \cdots X_{m-1} \mid X_m) & \text{apolar} & q(Y_1 \cdots Y_{m-1} \mid Y_m) \\
p(X_1 \cdots X_{m-2} \mid X_{m-1} X_m) & \text{„} & q(Y_1 \cdots Y_{m-2} \mid Y_{m-1} Y_m) \\
\vdots & & \\
p(X_1 \cdots X_{m-k} \mid X_{m-k+1} \cdots X_m) & \text{„} & q(Y_1 \cdots Y_{m-k} \mid Y_{m-k-1} \cdots Y_m) \\
\vdots & & \\
p(X_1 \mid X_2 \cdots X_m) & \text{„} & q(Y_1 \mid Y_2 \cdots Y_m).
\end{array}$$

In der ersten dieser Reihe stehen zwei lineare Formen, also Punkte, X_m und Y_m, in der zweiten Reihe zwei Involutionen zwischen den

tivitäten $g(X_1 X_2)$ und $h(Y_1 Y_2)$ ist, nach der zweiten Reihe genommen, die durch die Verwandtschaftsfolge gh^{-1} dargestellte Projektivität, dagegen nach der ersten Reihe genommen, die Projektivität $g^{-1}h$. Wird die eine dieser Projektivitäten zur Involution, so wird es auch die andere, und g und h heißen dann harmonische (konjugierte, apolare) Projektivitäten (vgl. Segre a. a. O.).

Veränderlichen X_{m-1}, X_m und Y_{m-1}, Y_m, in der k^{ten} Reihe Polarformen k^{ten} Grades usf. Das Apolarliegen der Punkte bedeutet ihr Zusammenfallen, $X_m = Y_m$, man erreicht es in der folgenden Weise: man wähle

$m-1$ Pkt. $X_1, \cdots X_{m-1}$ u. best. dazu in p die Ergzg. X_m und

$m-2$ „ $Y_1, \cdots Y_{m-2}$ „ „ „ „ q „ „ $q(Y_1 \cdots Y_{m-2} \mid Y_{m-1} Y_m)$.

Setzt man in dieser letzten Involution $Y_m = X_m$, so ist aus ihr der Punkt Y_{m-1} eindeutig bestimmt.

Von den $2(m-1)$ Punkten $X_1, \cdots X_{m-1}$, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ können daher alle bis auf einen beliebig gewählt werden, während der letzte dadurch eindeutig bestimmt ist. Da außerdem, wenn alle bis auf zwei angenommen werden, die beiden letzten in projektiven Punktreihen laufen, so definieren diese $2(m-1)$ Reihen eine Form $2(m-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$f^1(X_1 \cdots X_{m-1}\, Y_1 \cdots Y_{m-1}),$$

und diese nennen wir die *unfertige erste Überschiebung* und ihre zugeordnete Polarform

$$f^1(\overline{X_1 \ldots X_{m-1}\, Y_1 \ldots Y_{m-1}})$$

die *erste Überschiebung* der beiden Polarformen p und q.

Für die k^{te} Überschiebung verfährt man entsprechend: man wähle

$m-k$ Pkt. $X_1, \ldots X_{m-k}$ u. best. dazu in p die Ergz. $p(X_1 \ldots X_{m-k} \mid X_{m-k+1} \ldots X_m)$ u.

$m-k-1$ „ $Y_1, \ldots Y_{m-k-1}$ „ „ „ „ q „ „ $q(Y_1 \ldots Y_{m-k-1} \mid Y_{m-k} \ldots Y_m)$;

diese letzte Form ist vom $(k+1)^{\text{ten}}$ Grade, die Reihe Y_{m-k} wird in ihr also durch einen Büschel von Formen k^{ten} Grades ergänzt. Wir wollen sogleich zeigen, daß dieser Büschel i. a. eine einzige Form enthält, die zu der Form m^{ten} Grades $p(X_1 \ldots X_{m-k} \mid X_{m-k+1}\, X_m)$ apolar ist. Ihr ist eine bestimmte Lage der Reihe Y_{m-k} zugeordnet, und somit ist dieser Punkt Y_{m-k} durch die Annahme der $2(m-k)-1$ Punkte $X_1, \ldots X_{m-k}$, $Y_1, \ldots Y_{m-k-1}$ eindeutig bestimmt, und es entsteht wie vorhin eine nicht polare und daraus eine polare Form:

$$f^k(X_1 \ldots X_{m-k}\, Y_1 \ldots Y_{m-k}) \text{ und } f^k(\overline{X_1 \ldots X_{m-k}\, Y_1 \ldots Y_{m-k}}),$$

die wir als *unfertige* k^{te} *Überschiebung* und als k^{te} *Überschiebung* der beiden Polarformen p und q bezeichnen.

Es ist nun noch der im vorigen benutzte Hilfssatz zu beweisen: *In einem Büschel von Formen* k^{ten} *Grades gibt es eine einzige Form, die zu einer beliebig gegebenen festen Form* k^{ten} *Grades apolar ist* (wenn nicht jede Form des Büschels zu ihr apolar ist).

Stellt man nämlich für jede Form des Büschels und für die feste Form die Apolaritätsprojektivität auf, so bilden diese Projektivitäten gleichfalls einen Büschel. Es folgt dies analytisch daraus, daß, wenn man in die Apolaritätsinvariante (S. 304) für die Koeffizienten b solche von der Form $b' + \lambda b''$ setzt, der Ausdruck in λ linear wird. Ein Büschel von Projektivitäten enthält aber nach einem Satze von Segre eine einzige Involution[1]), wenn er nicht ein Büschel von Involutionen ist. Die zu dieser Involution gehörige Form des gegebenen Büschels ist die gesuchte.

Auf den Ausnahmefall will ich gelegentlich zurückkommen; ebenso auf den Fall, daß die Überschiebung identisch verschwindet, wobei die unfertigen Überschiebungen zu Nullformen werden.

VI. Die erste Lösung der Grundaufgabe.

Da wir die einer Form $f(XY\ldots W)$ zugeordnete Polarform $f(\overline{XY\ldots W})$ als diejenige eingeführt haben, die mit ihr die Ordnungspunkte gemein hat, stellen wir zuerst einige Verfahren zusammen, um aus einer gegebenen Form andre zu bilden, die mit ihr die Ordnungspunkte gemein haben.

a) Man wende die Grundaufgabe auf nur $m-1$ der Reihen an und bilde aus $f(XY\ldots W)$ die Form $f(X\overline{Y\ldots W})$. Für jede Lage von X fallen für $f(X\overline{Y\ldots W})$ dann $m-1$ Punkte $Y\ldots W$ an den gleichen Stellen zusammen wie für $f(XY\ldots W)$; fallen daher an einer Stelle m Punkte einer Gruppe von $f(X\overline{Y\ldots W})$ zusammen, so trifft an dieser Stelle dasselbe für $f(XY\ldots W)$ zu.

---

1) Zur Konstruktion der Involution q, die dem durch zwei Projektivitäten q_1 und q_2 bestimmten Büschel angehört, verfahre ich so: Der Büschel der Projektivitäten ist projektiv auf den Büschel ihrer zugeordneten Polarformen $\overline{q_1}$ und $\overline{q_2}$ bezogen, und beiden Büscheln gehört die gesuchte Involution $q = \overline{q}$ gleichzeitig an. Sucht man daher zu einem beliebigen Punkt O die entsprechenden Punkte A_1, A_2, A in den drei Formen q_1, q_2, q des ersten Büschels und ebenso die entsprechenden Punkte A_1', A_2', A in den entsprechenden drei Formen $\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{q}$ des zweiten Büschels, und fügt als eine vierte Form diejenige q_0 (bzw. $\overline{q_0}$) des ersten (bzw. zweiten) Büschels hinzu, die O zum Doppelpunkt hat, so erhält man

$$A_1 A_2 A O \barwedge A_1' A_2' A O,$$

also läßt sich (nach einem v. Staudtschen Satze) der Punkt A aus der Involution bestimmen:

$$A_1 A_2 O \overline{\overline{\wedge}} A_2' A_1' A.$$

So kann für die gesuchte Involution zu jedem Punkt O sein entsprechender A gefunden werden.

Anmerkung. Die Bildung der Form $f(X\overline{Y\ldots W})$ bedarf noch einer Erläuterung. Für jede Form des Ergänzungsbüschels $f(X|Y\ldots W)$ kann die Grundaufgabe gelöst werden, und so erhält man unendlich viele Polarformen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades $f(X|\overline{Y\ldots W})$. *Nun liefert aber die Anwendung der Grundaufgabe auf die Formen eines Büschels einen Büschel von Polarformen.* Denn setzt man in der Gleichung (3) an Stelle der Koeffizienten a solche von der Form $a+\lambda b$, so tritt das λ auch in der Gleichung (5) linear auf. Daher ist $f(X|\overline{Y\ldots W})$ ein Büschel von Polarformen, und da dieser projektiv auf die X-Reihe bezogen ist (was wieder aus dem linear auftretendem λ folgt), so ist $f(X\overline{Y\ldots W})$ wiederum eine Form m^{ten} Grades mit $m-1$ vertauschbaren Reihen.

b) Vertauscht man in einer Form m^{ten} Grades zwei Reihen, so entsteht i. a. eine neue Form, die mit der gegebenen die Ordnungspunkte gemein hat. Denn setzt man in den Gleichungen der beiden Formen alle Reihen einander gleich, so erhält man für beide dieselbe Gleichung m^{ten} Grades zur Bestimmung der Ordnungspunkte.

Werden in der Form $f(XY\ldots W)$ die Reihen X und W vertauscht, so soll die so entstehende neue Form durch $f(\overparen{XY\ldots W})$ bezeichnet werden.

c) Bildet man aus zwei Formen m^{ten} Grades, die dieselben Ordnungspunkte haben, einen Büschel, so besitzt auch jede andre Form dieses Büschels dieselben Ordnungspunkte. Denn jeder Ordnungspunkt enthält m Punkte einer Gruppe in sich, und diese Gruppe ist zweien, also allen Formen des Büschels gemein (vgl. den Satz S. 299).

Bildet man jetzt aus der gegebenen Form $f(XY\ldots VW)$ der Reihe nach die Formen

$$f(X\overline{Y\ldots VW}),\ f(\overline{X\,\overline{Y\ldots VW}}),\ f(\overparen{\overline{X\,\overline{Y\ldots VW}}}),$$

wo die horizontalen Operationszeichen von unten nach oben zu nehmen sind, so sind in der ersten dieser drei Formen $Y, \ldots W$ vertauschbar; sollten es auch X und Y sein, so ist damit die Grundaufgabe gelöst. Schließt man diesen Fall (auch für die zweite Form) aus, so sind in der zweiten Form zwar $X, \ldots V$ vertauschbar, aber nicht mehr Y und W; in der dritten Form sind dann wieder $W, Y, \ldots V$ vertauschbar, also dieselben Reihen wie bei der ersten, und wir können aus der dritten und ersten Form einen Büschel bilden, der lauter in $Y\ldots W$ vertauschbare Formen enthält. Nach den Sätzen a), b) und c) haben alle Formen dieses Büschels auch dieselben Ordnungspunkte wie die gegebene Form. Nun stellt sich heraus, *daß in diesem Büschel stets eine Polarform ent-*

halten ist. Eine einfache Rechnung liefert den Beweis dieses Satzes, ich übergehe sie aber, da aus der Theorie der Nullformen sich der innere Grund dieses Satzes ergeben wird. Die Gleichung, die sich herausstellt, ist die folgende:

$$(11) \qquad mf(\overline{xy\ldots vw}) = f(x\overline{y\ldots v}\,\overline{w}) + (m-1)f(\widehat{\overline{xy\ldots vw}}).$$

Dieser Satz liefert eine geometrische Konstruktion für die Lösung der Grundaufgabe. Es ist dabei nötig, die Aufgabe für den Grad $m-1$ als gelöst vorauszusetzen. Für $m=2$ hat H. Schröter die Lösung angegeben.[1])

Die *erste Lösung der Grundaufgabe* zerfällt daher in zwei Teile: *1. Man bestimme aus der gegebenen Form $f(XY\cdots VW)$ durch Lösung der Grundaufgabe für den Fall $m-1$, bzw. durch Vertauschung der Reihen, die beiden Formen*

$$f(X\overline{Y\cdots V W}) \text{ und } f(\widehat{\overline{XY\cdots VW}})$$

2. Man bilde aus diesen beiden Formen einen Büschel und suche die in ihm enthaltene Polarform.

Hierzu wähle man $m-2$ beliebige Punkte $Z_0, \cdots V_0, W_0$ und konstruiere zu ihnen die Ergänzungen in sämtlichen Formen des Büschels. Diese bilden einen Büschel von Projektivitäten, und in ihm ist eine einzige Involution enthalten. Diese muß die Ergänzung der Punkte $Z_0, \cdots W_0$ in der gesuchten Polarform sein, und man findet sie nach der Fußnote auf S. 306. Ist $X_0 Y_0$ irgendeine Gruppe dieser Involution, so ist $X_0, Y_0, Z_0, \cdots V_0, W_0$ eine Gruppe der gesuchten Polarform, und diese ist daher im Büschel der unter 1. bestimmten Formen nach dem Satze S. 299 eindeutig bestimmt.

VII. Die Nullformen.

Die Bildung der einer nicht polaren Form $f(XY\cdots W)$ zugeordneten Polarform oder die Aufstellung der Gleichung (5) aus (3) versagt, wenn die Gleichung (5) identisch verschwindet[2]), wenn also z. B. für $m=3$ gleichzeitig die Bedingungen bestehen:

$$a_{123}=0, \quad a_{12}+a_{13}+a_{23}=0, \quad a_1+a_2+a_3=0, \quad a=0.$$

---

1) Sie folgt aus dem Satze: Entsprechen in einer Projektivität den Punkten A und B die Punkte B und C, und man sucht von B den vierten harmonischen Punkt B' zu A und C, so entsprechen einander B und B' in der Involution, die dieselben Doppelpunkte besitzt wie jene Projektivität.

2) Nennt man die beiden im vorigen Abschnitt zur Büschelbildung benutzten Formen f_1 und f_2 und schreibt die Gleichung des Büschels $f_1 + \lambda f_2 = 0$, so ergibt

Trifft dies zu, und man läßt dann an einer beliebigen Stelle zwei Punkte X und Y (allgemein $m-1$ Punkte $X, Y \cdot \cdot V$) zusammenfallen, so fällt auch der letzte Punkt Z (bzw. W) in diese Stelle hinein, da durch Gleichsetzen der Werte $x = y = z = t$ die Gleichung (4) für jedes t erfüllt wird, also auch (3). Eine solche Form $n\,(XY \cdots W)$, die für $m = 3$ durch die Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{cases} n(xyz) = n_{12}xy + n_{13}xz + n_{23}yz + n_1x + n_2y + n_3z = 0 \quad \text{und} \\ n_{12} + n_{13} + n_{23} = 0, \quad n_1 + n_2 + n_3 = 0 \end{cases}$$

definiert ist, nennen wir eine *Nullform*. Sie ist nach dem soeben gesagten durch folgende Eigenschaft bezeichnet:

Für eine Nullform ist jeder Punkt der Punktreihe ein Ordnungspunkt.

Wir schreiben dann

$$n(XY \cdots W) = n(\dot{X}\dot{Y} \dot{\cdots} \dot{W}),$$

um auch in der Bezeichnung auszudrücken, daß sich die Ordnungspunkte über die ganze Punktreihe ausbreiten. Wennschon die zugeordnete Polarform für eine Nullform identisch verschwindet, so bleibt doch die Beziehung der Punkte bestehen, falls nicht alle Koeffizienten gleichzeitig verschwinden. Tritt dies ein, so erhält man die „identisch verschwindende Form“, die analytisch durch die Gleichung

$$f(xy \cdots w) \equiv 0$$

dargestellt ist; geometrisch ordnet sie $m-1$ beliebig gewählten Punkten jeden weiteren beliebigen Punkt zu. Diese Form kann sowohl als Nullform wie als Polarform aufgefaßt werden.

Als *Beispiel* einer Nullform sei die allgemeine *Nullform dritten Grades* erwähnt, die durch die Bedingung

$$ABC \,\bar{\wedge}\, XYZ$$

definiert ist, wo A, B, C drei beliebige feste Punkte und X, Y, Z die veränderlichen Punkte der drei Reihen sind. Werden zwei von den letzteren, z. B. X und Y, gewählt, so ist dadurch eine Involution $AB \,\bar{\wedge}\, XY$ bestimmt und in ihr der Punkt Z als entsprechender Punkt des Punktes C. Fallen an einer beliebigen Stelle X und Y zusammen, so erhält

---

sich für den Fall, daß $f_2 = f_1$ wird, und daß f_1 nicht schon die gesuchte Polarform ist, die Form f als eine Nullform. Der Büschel erhält dann die Gleichung $f_1\,(1 + \lambda) = 0$, er enthält also die Form f_1 unendlich oft, und außerdem (für $\lambda = -1$) die identisch verschwindende Form, und diese ist als die zugeordnete Polarform der Form f aufzufassen.

die Involution zwei an dieser Stelle zusammenfallende Doppelpunkte, und es muß dann auch der dem Punkte C entsprechende Punkt Z in diese Stelle hineinfallen, wie es die Nullform verlangt.

Hält man den Punkt Z an der Stelle Z_0 fest, so entsprechen einander nach bekannten Eigenschaften der Projektivitäten die Punkte X und Y in der Projektivität:

$$CBZ_0X \wedge CAZ_0Y.$$

Soll diese Projektivität zur *Involution* werden, so ist diese durch

$$CB \overline{\wedge} CA$$

bestimmt, und Z_0 muß als zweiter Doppelpunkt der Involution in den Punkt C' rücken, der sich aus

$$AB \text{ harm. } CC'$$

ergibt. Ebenso findet man zwei Punkte A' und B' aus

$$BC \text{ harm. } AA' \text{ und } AC \text{ harm. } BB';$$

auch diesen beiden Punkten entsprechen, wenn man A zur Reihe X und B zur Reihe Y rechnet, in den veränderlichen Reihen *Involutionen* statt Projektivitäten. Bekanntlich befinden sich die drei Punkte ABC zu $A'B'C'$ in einer Wechsellage, so daß aus den drei letzteren die ersteren wieder durch dieselbe Konstruktion hervorgehen wie umgekehrt.

Diesen Sätzen werden wir später entsprechende für die Nullformen m^{ten} Grades an die Seite stellen.

Die Wichtigkeit der Nullformen beruht vor allem auf den Satz:

Einer jeden Form m^{ten} Grades, die nicht Polarform ist, ist eine Nullform m^{ten} Grades eindeutig zugeordnet.

Zieht man von der Gleichung (3′), die eine Form 3ten Grades darstellt, die Gleichung (5) ihrer Polarform ab, so erhält man eine neue Form:

$$(13) \qquad \begin{aligned} n(xyz) &= f(xyz) - p(xyz) \\ &= (a_{12} - a'')xy + (a_{13} - a')xz + (a_{23} - a')yz \\ &\quad + (a_1 - a')\,x + (a_2 - a')\,y + (a_3 - a')\,z = 0. \end{aligned}$$

Sucht man zu dieser Form wieder die zugeordnete Polarform und bezeichnet ihre Koeffizienten mit b''', b'', b', b, so erhält man wegen (6)

$$\begin{aligned} b''' = 0,\ b'' &= \tfrac{1}{3}(a_{12} + a_{13} + a_{23} - 3a'') = 0 \\ b' &= \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 - 3a') = 0,\ b = 0; \end{aligned}$$

somit verschwindet diese Polarform identisch, und es ist die durch die Gleichung (13) dargestellte Form eine Nullform.

Ganz dieselben Schlüsse gelten für Formen m^{ten} Grades, und wir bezeichnen die durch die Gleichung

$$(13') \qquad n(xy\cdots w) = f(xy\cdots w) - p(xy\cdots w) = 0$$

dargestellte Form als *die der Form* $f(XY\cdots W)$ *zugeordnete Nullform,* wobei $p(XY\cdots W)$ die der Form zugeordnete Polarform ist. Die Gleichung (13′) enthält nun den folgenden Satz:

In dem aus einer nicht polaren Form und aus ihrer zugeordneten Polarform gebildeten Büschel ist stets eine Nullform enthalten.

Setzen wir nun

$$(14) \qquad n(xy\cdots w) = f(\overset{\cdots\cdots}{xy\cdots w}),$$

so nimmt mit Rücksicht auf die (S. 306) für die zugeordnete Polarform eingeführte Bezeichnung die Gleichung (13′) die Gestalt an:

$$(13'') \qquad f(\overset{\cdots\cdots}{xy\cdots w}) = f(xy\cdots w) - f(\overline{xy\cdots w}).$$

Das gegenseitige Verhalten von Polar- und Nullformen ergibt sich aus folgenden Sätzen:

I. a) *Die einer Nullform zugeordnete Polarform und* b) *die einer Polarform zugeordnete Nullform verschwindet identisch.*

II. a) *Die einer Polarform zugeordnete Polarform stimmt mit ihr selbst überein, ebenso* b) *die einer Nullform zugeordnete Nullform.*

Die beiden Sätze a) folgen aus der Definition der Nullform bzw. der Polarform. Dagegen folgt nach (13″) der Satz I b aus II a und II b aus I a. Die Sätze lassen sich, wenn n eine beliebige Nullform, p eine beliebige Polarform bezeichnet, in folgende Formeln bringen:

(15) $n(\overline{xy\cdots w}) \equiv 0,$ (16) $p(\overset{\cdots\cdots}{xy\cdots w}) \equiv 0,$

(17) $p(\overline{xy\cdots w}) = p(xy\cdots w).$ (18) $n(\overset{\cdots\cdots}{xy\cdots w}) = n(xy\cdots w).$

Ist aber $f(xy\cdots w)$ eine beliebige Form, so gilt stets:

(19) $f(\overline{\overset{\cdots\cdots}{xy\cdots w}}) \equiv 0.$ (20) $f(\overset{\cdots\cdots}{\overline{xy\cdots w}}) \equiv 0.$

Für einen Büschel von Polarformen wurde früher bewiesen (Anm. S. 307), daß sich aus der Gleichung

$$f_\lambda(xy\cdots w) = g(xy\cdots w) + \lambda h(xy\cdots w)$$

die folgende Gleichung ableiten läßt:

$$(21) \qquad f_\lambda(\overline{xy\cdots w}) = g(\overline{xy\cdots w}) + \lambda h(\overline{xy\cdots w}).$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man nach (13″):

$$(22)\qquad f_\lambda(\dot{x}\dot{y}\cdots\dot{w}) = g(\dot{x}\dot{y}\cdots\dot{w}) + \lambda h(\dot{x}\dot{y}\cdots\dot{w}),$$

und diese Sätze heißen in Worten: *Sucht man zu den Formen eines Büschels* a) *die zugeordneten Polarformen und* b) *die zugeordneten Nullformen, so bilden diese jeweils wieder einen Büschel, und es ist die Zuordnung der Büschel projektiv.*

In der Theorie der Projektivitäten spielen bekanntlich diejenigen Büschel eine wichtige Rolle, die aus einer gegebenen Projektivität $f(XY)$ und aus ihrer Umkehrung $f(\widehat{XY})$ gebildet werden. In einem solchen Büschel sind enthalten: die zu allen Projektivitäten des Büschels zugeordnete Polarform (Involution) und die Identität $y - x = 0$, d. h. die Nullform zweiten Grades. Setzt man irgendeine Involution mit der Identität zu einem Büschel zusammen, so wird er von solch besonderer Art.

Dementsprechend bilden wir jetzt aus einer beliebigen, durch die Gleichung $p(xy\cdots w) = 0$ gegebenen Polarform und aus einer beliebigen durch die Gleichung $n(xy\cdots w) = 0$ gegebenen Nullform m^{ten} Grades einen Büschel

$$f_\lambda(xy\cdots w) = p(xy\cdots w) + \lambda n(xy\cdots w),$$

und wenden auf ihn die Beziehungen (21) und (22) an; dann erhalten wir mit Rücksicht auf (15) bis (18) die Sätze:

$$f_\lambda(\overline{xy\cdots w}) = p(xy\cdots w)$$

und

$$f_\lambda(\dot{x}\dot{y}\cdots\dot{w}) = \lambda n(xy\cdots w),$$

in Worten:

Bildet man aus einer beliebig gegebenen Polarform m^{ten} Grades und aus einer beliebig gegebenen Nullform m^{ten} Grades einen Büschel, so fällt für jede Form des Büschels die zugeordnete Polarform mit der gegebenen Polarform und die zugeordnete Nullform mit der gegebenen Nullform zusammen.

Enthält ein Büschel zwei Polarformen, so enthält er lauter solche Formen, enthält er zwei Nullformen, so enthält er lauter Nullformen. Diesen beiden Büscheln, die wir *„Polarbüschel“* und *„Nullbüschel“* nennen wollen, stellen wir den *„Polar-Nullbüschel“* gegenüber, der eine Polarform und eine Nullform enthält.

Da innerhalb eines Büschels jede Form bestimmt ist, wenn von ihr eine Gruppe gegeben ist, so folgt der Satz:

Eine Form m^{ten} Grades ist bestimmt, wenn ihre zugeordnete Polarform, ihre zugeordnete Nullform und außerdem eine Gruppe, die nicht

der Polarform und der Nullform gleichzeitig als Gruppe angehört, gegeben sind.[1])

Wir haben vorhin aus der gegebenen Form ihre zugeordnete Polarform und (rechnerisch) aus beiden ihre Nullform abgeleitet. Ebenso gut kann man sich die Aufgabe stellen, aus der gegebenen Form zuerst die zugeordnete Nullform und dann aus dem Büschel beider die zugeordnete Polarform zu bestimmen. Dieses wird uns eine *zweite Lösung der Grundaufgabe* liefern.

Umfang der einzelnen Abhandlungen Leonhard Eulers.

(Eine Ergänzung des Hagenschen Index und der Fußschen Liste.)

Von Felix Müller.

Seit der Feier des 200jährigen Geburtstages Leonhard Eulers, am 15. April vorigen Jahres, wurde wiederholt der Mahnruf nach Einlösung der dem großen Mathematiker gebührenden Ehrenschuld, nach einer *Gesamtausgabe der Werke Leonhard Eulers,* laut. Besonders durch die Initiative der Schweizerischen Naturforscher-Gesellschaft wurde, auf Antrag des Prof. F. Rudio-Zürich, der Plan einer solchen Ausgabe von neuem erwogen. Es ist bekannt, daß schon im vorigen Jahrhundert die Vorarbeiten zur Verwirklichung dieses Unternehmens von Nikolaus v. Fuß, Paul Heinrich v. Fuß, C. G. J. Jacobi und Joh. Hagen gemacht wurden. (Siehe Felix Müller, Biographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler, Jahresber. **16**, 185—195, 423—424; **17**, 36—39). Auf Anraten Jacobis hatte P. H. v. Fuß seiner „Correspondance mathématique de quelques célèbres géomètres du XVIIIme siècle", I, St. Pétersbourg 1843, eine „Liste complète et systématique des Ouvrages de Léonard Euler" beigegeben. Zu dieser Liste veröffentlichte er mehrere Ergänzungen im Jahre 1849 in den von ihm herausgegebenen „Commentationes arithmeticae collectae" Eulers. Im Jahre 1896 erschien der „Index Operum Leonardi Euleri" mit weiteren Verbesserungen. Neuerdings haben die Herren Paul Stäckel und Wilhelm Ahrens in dem von ihnen herausgegebenen „Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers", Leipzig, B. G. Teubner 1908, die Fußsche „Systematische Liste der Schriften Leonhard Eulers" (S. 79—169) wieder abgedruckt. Sie haben das ihnen zur Verfügung gestellte Handexemplar,

---

1) Wie mir H. Graßmann (Gießen) mündlich mitteilte, bestehen für räumliche Reziprozitäten ($m = 2$) ganz entsprechende Sätze: Jede Reziprozität liegt in einem Büschel, der ein Polarsystem und ein Nullsystem enthält usw.; auch gelang es ihm, diese Sätze in die Ebene zu übertragen, indem er eine gewisse entartete Reziprozität als „ebenes Nullsystem" ($m = z$) einführte.

Diese Bemerkungen lassen die Ausdehnung der obigen Sätze auf Formen m^{ten} Grades der Ebene und des Raumes als aussichtsvoll erscheinen.

in welches P. H. v. Fuß nicht nur die ihm von Jacobi mitgeteilten Daten der Vorlegung bei der Berliner Akademie, sondern auch manche noch unveröffentlichten Ergebnisse seiner eigenen Eulerstudien, insbesondere die von ihm ermittelten Exhibitionsdaten eingetragen hatte, durch die Resultate der neueren Veröffentlichungen über die Bibliographie Eulerscher Schriften ergänzt und berichtigt. Die Herausgeber des „Briefwechsels“ haben sich um eine Gesamtausgabe der Werke Eulers durch die Bereitstellung der von Jacobi und Fuß hierfür geleisteten Vorarbeiten ein großes Verdienst erworben.

Die Liste der Schriften Eulers bedarf aber noch einer wesentlichen Ergänzung, wenn man mit ihrer Hilfe einen Plan zu einer Gesamtausgabe entwerfen will, weil man aus ihr nicht den Umfang der einzelnen Abhandlungen ersehen kann. Schon Jacobi sagt in seinem Briefe an Fuß vom Jahre 1848 (Briefwechsel S. 50): „Leider kann ich den Umfang nicht beurtheilen, da Sie in ihrer Liste nur die Anfangspagina, aber nicht die Endpagina der Abhandlungen angeben.“ Auch Herr Valentin (l. c. S. 41) bedauert, daß aus den in dem Hagenschen Index gemachten Angaben die Länge der Abhandlungen nicht zu ersehen ist.

Deshalb habe ich die Mühe nicht gescheut, besagte Lücke in dem Index Operum auszufüllen. Die nachstehende Tabelle gibt für jede einzelne Abhandlung Eulers die Zahl der Seiten an, welche sie umfaßt. Jetzt ist es möglich, bei Herstellung einer Gesamtausgabe den Umfang der einzelnen Bände, in denen Abhandlungen derselben Disziplin zusammengefaßt werden sollen, zu beurteilen.

Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten
6	61	29	55	51	22	73	14	95	15	117	13	139	27
8	45	30	22	52	14	74	16	96	19	118	13	140	20
9	38	31	2	53	22	75	19	97	13	119	39	141	19
10	34	32	51	54	30	76	15	98	15	120	13	142	11
11	46	33	52	55	30	77	12	99	30	121	9	143	36
12	24	34	3	56	10	78	13	100	7	122	9	144	11
13	20	35	13	57	37	79	14	101	14	123	20	145	17
14	23	36	28	58	39	80	11	102	12	124	31	146	13
15	11	37	21	59	22	81	6	103	50	125	38	147	16
16	14	38	36	60	52	82	4	104	33	126	14	148	10
17	13	39	54	61	40	83	11	105	54	127	16	149	16
18	5	40	16	62	6	84	19	106	24	128	8	150	29
19	21	41	40	63	13	85	15	107	30	129	11	151	17
20	6	42	11	64	27	86	3	108	13	130	17	152	12
21	31	43	25	65	20	87	9	109	12	131	18	153	44
22	3	44	31	66	11	88	11	110	22	132	25	154	30
23	29	45	8	67	26	89	23	111	12	133	7	155	23
24	85	46	41	68	10	90	12	112	12	134	22	156	24
25	16	47	4	69	31	91	14	113	29	135	12	157	20
26	9	48	21	70	19	92	9	114	37	136	12	158	27
27	34	49	73	71	11	93	6	115	38	137	37	159	32
28	31	50	16	72	16	94	41	116	21	138	4	160	35

Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten
161	20	207	32	253	21	299	17	345	20	391	33	445	33
162	17	208	21	254	20	300	41	346	19	392	61	446	33
163	47	209	35	255	25	301	25	347	35	393	43	447	19
164	23	210	36	256	64	302	17	348	15	394	12	448	31
165	23	211	41	257	26	303	15	349	20	395	11	449	18
166	7	212	12	258	25	304	14	350	9	396	10	450	14
167	155	213	36	259	22	305	8	351	5	397	14	451	10
168	45	214	21	260	32	306	11	352	17	398	9	452	38
169	13	215	11	261	20	307	7	353	7	399	14	453	4
170	17	216	14	262	44	308	10	354	24	400	7	454	20
171	5	217	17	263	26	309	25	355	51	401	16	455	11
172	13	218	24	264	10	310	8	356	12	402	16	456	112
173	5	219	15	265	11	311	5	357	10	403	22	457	3
174	12	220	46	266	28	312	89	358	10	404	40	458	13
175	11	221	16	267	14	313	151	359	22	405	7	459	18
176	40	222	7	268	31	314	40	360	22	406	16	460	23
177	50	223	12	269	39	315	32	361	19	407	32	461	17
178	17	224	16	270	44	316	35	362	18	408	20	462	10
179	27	225	13	271	40	317	37	363	13	409	30	463	9
180	15	226	23	272	25	318	28	364	24	410	8	464	15
181	36	227	39	273	8	319	38	365	3	411	9	465	18
182	10	228	7	274	12	320	19	366	13	412	13	466	27
183	36	229	10	275	21	321	17	367	35	413	26	467	14
184	40	230	23	276	6	322	17	368	43	414	13	468	22
185	23	231	19	277	15	323	13	369	22	415	18	469	41
186	23	232	4	278	8	324	46	370	69	416	6	470	15
187	23	233	4	279	12	325	61	371	27	417	7	471	33
188	21	234	22	280	15	326	21	372	31	418	43	472	136
189	9	235	28	281	14	327	27	373	21	419	36	473	21
190	16	236	17	282	18	328	46	374	26	428	24	474	31
191	45	237	15	283	4	329	45	375	19	429	40	475	23
192	67	238	15	284	14	330	35	376	22	430	30	476	43
193	13	239	19	285	29	331	21	377	26	431	33	477	18
194	29	240	11	286	24	332	48	378	13	432	29	478	16
195	14	241	27	287	6	333	14	379	21	433	13	479	13
196	31	242	12	288	10	334	45	380	14	434	30	480	20
197	24	243	22	289	28	335	14	381	24	435	20	481	17
198	19	244	5	290	10	336	38	382	44	436	27	482	21
199	22	245	6	291	11	337	45	383	17	437	9	483	41
200	9	246	27	292	5	338	20	384	18	438	34	484	17
201	11	247	7	293	2	339	22	385	9	439	23	485	51
202	22	248	50	294	12	340	6	386	31	440	40	486	19
203	20	249	36	295	11	341	39	387	5	441	50	487	24
204	15	250	34	296	15	342	22	388	20	442	27	488	14
205	18	251	34	297	33	343	10	389	13	443	36	489	11
206	19	252	25	298	32	344	27	390	49	444	8	490	21

Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten	Nr.	Seiten
491	22	537	5	583	12	629	34	675	2	728	2	780	18
492	18	538	10	584	25	630	19	676	71	729	13	781	11
493	15	539	20	585	6	631	21	677	16	730	90	782	9
494	16	540	16	586	13	632	16	678	26	731	33	783	16
495	7	541	57	587	45	633	42	679	53	732	24	784	16
496	12	542	42	588	14	634	27	680	34	733	24	785	8
497	12	543	46	589	28	635	32	681	77	734	51	786	4
498	5	544	41	590	6	636	6	682	50	735	16	787	17
499	15	545	18	591	15	637	29	683	7	736	3	788	6
500	12	546	36	592	4	638	7	691	4	737	4	789	13
501	18	547	112	593	39	639	16	692	18	738	19	790	11
502	34	548	17	594	17	640	30	693	44	739	36	791	14
503	78	549	42	595	27	641	38	694	41	740	25	792	3
504	48	550	45	596	10	642	61	695	5	741	45	793	10
505	31	551	5	597	59	643	23	696	2	742	39	794	28
506	20	552	26	598	26	644	18	697	37	743	30	795	5
507	27	553	22	599	34	645	2	698	13	744	15	796	9
508	23	554	5	600	28	646	4	699	31	745	37	(2)	34
509	47	555	3	601	46	647	40	700	1	746	43	(3)	34
510	47	556	5	602	29	648	50	701	56	747	40	(6)	22
511	23	557	16	603	12	649	40	702	41	748	84	(14)	8
512	15	558	28	604	10	650	10	703	13	749	138	(19)	2
513	15	559	23	605	17	651	10	704	6	750	47	F 6	14
514	25	560	35	606	39	652	10	705	32	751	40	F 7	2
515	17	561	18	607	31	653	11	706	7	752	23	F 8	7
516	31	562	11	608	59	654	19	707	38	753	50	F 9	9
517	13	563	16	609	10	655	17	708	7	754	12	F 10	48
518	12	564	44	610	5	656	26	709	16	755	29	F 11	1
519	8	565	32	611	34	657	40	710	11	756	11	Fragm.	143
520	10	566	34	612	13	658	10	711	33	757	9		
521	30	567	26	613	28	659	31	712	20	758	26		
522	12	568	57	614	4	660	23	713	24	759	40		
523	31	569	38	615	3	661	16	714	41	760	12		
524	11	570	36	616	22	662	60	715	13	761	25		
525	40	571	48	617	25	663	12	716	19	762	28		
526	41	572	70	618	31	664	27	717	2	763	44		
527	21	573	69	619	24	665	40	718	14	764	10		
528	7	574	40	620	10	666	20	719	14	765	140		
529	17	575	18	621	25	667	42	720	39	766	16		
530	27	576	71	622	18	668	31	721	94	767	14		
531	6	577	25	623	21	669	11	722	38	768	31		
532	10	578	38	624	29	670	34	723	47	775	16		
533	9	579	26	625	24	671	29	724	19	776	21		
534	11	580	49	626	2	672	48	725	11	777	11		
535	29	581	33	627	18	673	38	726	26	778	21		
536	11	582	24	628	77	674	81	727	17	779	40		

Die Nummern der vorstehenden Tabelle beziehen sich auf den Hagenschen Index. Die entsprechenden Nummern der Fußschen Liste lassen sich leicht aus der vergleichenden Tabelle II entnehmen, welche die Herren Stäckel und Ahrens dem „Briefwechsel" auf S. 174—176 angefügt haben. Die sechs Nummern F 6 bis F 11 fehlen bei Hagen und sind neuere Nachträge zu der Fußschen Liste (Briefwechsel S. 169). Bei Hagen sowohl wie bei Fuß fehlen die „Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis deprompta", Op. post. I, 157—266, und die „Continuatio Fragmentorum", ib. 487—518, sowie die „Fragmenta mechanica", ib. II, 824—826. Sie sind in unserer Tabelle mit „Fragm." bezeichnet.

Die selbständigen Werke und die Briefe Eulers habe ich in diese Tabelle nicht aufgenommen, sondern nur die Journalabhandlungen. Zu einigen Nummern muß ich einige *Bemerkungen* hinzufügen.

Zu 51. Die Abhandlung, welche nach Herrn Valentin (l. c. 43) zuerst in der Bibl. impart. **3,** 10—31 veröffentlicht wurde, umfaßt in den Comment. arithm. II, 1849 die Seiten 639—647 und in den Op. post. I die Seiten 76—84.

Zu 194. Die von Herrn Valentin (l. c. 43) erwähnte deutsche Übersetzung Michelsens **3,** 24—25 ist wohl nur ein kurzer Auszug.

Zu 310. Die französische Übersetzung steht Nouv. Ann. **12,** 1853, 5—21, nicht **13,** wie Herr Valentin (l. c. 44) angibt.

Zu 315. Der Artikel „Sur l'évaluation du volume d'un parallélépipède à une base sphérique", Nouv. Ann. **4,** 1895, 422—423 (Valentin p. 44) ist nur die Übersetzung eines kleinen Abschnittes der umfangreichen Arbeit.

Zu 585. Eulers Abhandlung: „De la résistance qu'éprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement", Hist. Mém Ac. sc. Paris, a. 1778 (1781), nimmt die Seiten 597—602 ein. Darauf folgen: „Extraits de différentes lettres de M. Euler à M. le Marquis de Condorcet", 603—609. Diese drei Briefe enthalten zwei Formeln bestimmter Integrale und eine Formel für die Koeffizienten von $(1+x)^n$, mit Beweisen.

Zu 662. Lagrange fügt dieser Abhandlung Eulers hinzu: „Formules de Dioptrique nécessaires pour l'intelligence du Mémoire précédent", Misc. Taur. **3,** 152—155. Diese Formeln sind der Abhandlung Eulers Nr. 648 in Hist Mém. Ac. Berlin **13** entnommen.

Zu 794. Nach dem Umfange zu urteilen, kann die von Herrn Valentin (l. c. 47) erwähnte englische Übersetzung von 7 Seiten nur ein Auszug sein.

Schließlich sei erwähnt eine Abhandlung: „Methodus viri Celeb. Leonhardi Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli telluris secundum mensuram a Celeb. de Maupertuis cum sociis institutam", Comm. Ac. Petrop. **12,** 224—231, Tab. A bis D: 232—239, die nicht bei Hagen erwähnt wird.

In den Göttinger Anzeigen **1,** St. 3. vom 4. Januar 1753 finden sich: „Lettres concernant le jugement de l'Académie", Berlin 1753, 85 S., angezeigt, welche den Streit mit König betreffen. Der erste der drei Briefe ist von Euler.

In den Comm. Ac. Petrop. **9,** a. 1737 (1744) steht Hist. Pag. XVI angezeigt: Euleri Tractatus philosophicus de Musica tam antiqua quam hodierna. In 4^0.

Zur Ergänzung des von Jacobi (Briefwechsel S. 28 ff.) gegebenen Verzeichnisses der Abhandlungen, die Euler vom Jahre 1746 an in der Berliner

Akademie gelesen hat, dient der in Hist. Mém. Ac. Berlin a 1745 (1746) gegebene Bericht über Abhandlungen, die Euler im Jahre 1744 gelesen hat. Die Titel sind folgende:

Sur la lumière et les couleurs (6. Febr. 1744), 17—24;

Sur le choc et la pression (4. Juni 1744), 25—28;

Sur la nature des moindres parties de la matière (18. Juni 1744), 28—32;

Astronomie: Sur les nouvelles tables astronomiques pour calculer la place du Soleil (9. April 1744), 36—40;

Sur le mouvement des nœuds de la Lune, et sur la variation de son inclinaison à l'écliptique (5. Okt. 1744), 40—44;

Sur quelques propriétés des sections coniques (Mém. p. 71 ff.), 53;

Mécanique: Sur le mouvement des corps flexibles (5. Nov. 1744), 54—55;

Sur un nouveau problème de mécanique (9. Jan. 1744), 56.

Herr G. Eneström teilt mir soeben mit, daß er auf Anregung der Euler-Kommission der Deutschen Mathematiker-Vereinigung eine ausführliche „Euler-Bibliographie" bearbeitet, die etwa 300 Druckseiten umfassen wird. Die einzelnen Schriften Eulers sind chronologisch geordnet.

Analytische Geometrie der Ebene

Von **C. Runge**

Professor an der Universität Göttingen

Mit 75 Figuren im Text

[IV u. 198 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

Das Buch ist entstanden aus den Vorlesungen, die der Verfasser 18 Jahre lang an der Technischen Hochschule zu Hannover gehalten hat. Der Stoff mußte so gewählt werden, daß er den Bedürfnissen der Ingenieure entsprach. Dadurch ergab sich einerseits eine Beschränkung, andererseits aber eine Ausdehnung der Themata, die sich andere Lehrbücher der analytischen Geometrie stellen. Der Verfasser hielt es z. B. für wünschenswert, den Begriff des Vektors einzuführen und zu gebrauchen, ferner die rechnerische Ausführung von Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal gemacht werden können, ausführlich zu behandeln. Ausführlich werden auch die Abbildungen der Ebene, Verschiebung, Drehung, ähnliche, affine, perspektivische Abbildungen analytisch formuliert und dabei die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises abgeleitet.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie

für technische Hochschulen

von Dr. **Emil Müller,**

o. ö. Professor an der K. K. Technischen Hochschule zu Wien.

In 2 Bänden.

I. Band. Mit 273 Figuren im Text und 3 Tafeln.

[XIV u. 368 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Der vorliegende erste Band behandelt auf Grund der Darstellung durch zugeordnete Normalrisse (Orthogonalprojektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen) die Elementaraufgaben und die Kurven und Flächen (abwickelbare Flächen, Kugelfläche, Dreh- und Schraubenflächen, windschiefe und „graphische" Flächen), während die kotierte Projektion, Dachausmittlung, Axonometrie, schiefe Projektion und Perspektive den Inhalt des zweiten Bandes bilden werden. Die Anpassung an das praktische technische Zeichnen zeigt sich in dem vorliegenden Bande unter anderem darin, daß das Konstruieren mit Hilfe von Auf- und Kreuzriß stets mitberücksichtigt, die Verwendung der Projektionsachsen und damit der Spurelemente von Geraden und Ebenen vermieden wird, daß ferner bei zahlreichen Konstruktionen möglichst mit einem Riß gearbeitet oder, besser gesagt, die verwendeten anderen Risse in jenen hineingelegt werden. Das Konstruieren der Schatten an technischen Gegenständen liefert, neben deren axonometrischer Darstellung, wohl den besten Übungsstoff zur Ausbildung der räumlichen Vorstellung in der beabsichtigten Richtung. Hauptsächlich aus diesem Grunde, neben ihrer praktischen Anwendung, erfahren die Schattenkonstruktionen eine eingehendere Behandlung als sonst in Lehrbüchern ähnlichen Umfangs.

Obgleich das Buch mit den Elementen beginnt, so wird doch eine vorangegangene Beschäftigung mit dem Gegenstand, also eine gewisse Denk- und Konstruktionsfertigkeit, vorausgesetzt. Der Verfasser war bestrebt, soweit es die mathematische Vorbildung des angehenden Technikers zuläßt, allgemeine Methoden zu verwenden und höhere Gesichtspunkte zu gewinnen.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 9./10. (DOPPEL-)HEFT. SEPTEMBER/OKTOBER.

AUSGEGEBEN AM 31. OKTOBER 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Das nächste Heft wird Ende November ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

1. Abteilung.

Seite

2. Abteilung.

Über die Probleme der technischen Hydromechanik.

Von R. v. Mises in Brünn.

Wenn ich die Hydromechanik abgrenzen darf als die Mechanik der Systeme, die aus *festen Körpern* und *Wasser* — oder wasserähnlichen Flüssigkeiten — bestehen, so erscheint es mir zweckmäßig, die Probleme, welche die Technik an die Hydromechanik stellt, in drei Gruppen zu teilen.

Es gibt *erstens* Aufgaben, bei denen man mit der sogenannten Theorie *idealer Flüssigkeit*, ich will kurz sagen: mit dem *Eulerschen Ansatz*, zu befriedigenden Ergebnissen gelangt. Hierher gehört beispielsweise das Ausflußproblem. Es gibt *zweitens* Fragen, die sich heute schon auf Grund der Navier-Stokesschen Theorie *zäher* Flüssigkeit erledigen lassen, oder für die wenigstens die prinzipielle und praktische Möglichkeit einer solchen Erledigung gesichert erscheint. Hierher rechne ich z. B. das Problem der Schmiermittelreibung, zumal bei kleineren Gleitgeschwindigkeiten. Aber der großen Mehrzahl aller Probleme ist nicht auf dem einen und nicht auf dem anderen Wege beizukommen: es ergeben sich Widersprüche oder Lücken bei Benützung des Eulerschen Ansatzes und quantitativ unrichtige Resultate als Folgerungen der Stokesschen Gleichungen. Zu dieser *dritten Gruppe* von Problemen führen alle Strömungserscheinungen in offenen Flußläufen, in Kanälen, Rohrleitungen, hydraulischen Motoren usf.

Zunächst ein paar Worte über Aufgaben der beiden ersten Gruppen. Beim *Ausflußproblem* handelt es sich um eine Anwendung der Helmholtz-Kirchhoffschen Strahltheorie auf den Ausfluß von Wasser und Luft aus der kleinen Öffnung eines großen Gefäßes. Ein mit Versuchsergebnissen vergleichbares Resultat ist das von Fritz Kötter im Archiv von 1887 gegebene: der theoretische Kontraktionskoeffizient für den Fall einer kreisförmigen Bodenöffnung, eine Zahl, die ganz gut mit der von Bazin experimentell ermittelten übereinstimmt. Es liegt auch auf der Hand, daß die Voraussetzungen der Theorie hier mit großer Annäherung zutreffen: die Reibung des Strahles an der Luft ist ganz gering, im Gefäß die Geschwindigkeit sehr klein, eine ausspringende

Ecke stört die Bewegung fast gar nicht; überdies läßt sich von vornherein behaupten, daß die Bewegung wirbelfrei erfolgt, da sie aus einer Gleichgewichtslage hervorgeht. Was wir nun weiter brauchen, ist eine Ausdehnung der Untersuchung auf verschieden gestaltete — zunächst immer noch in der Draufsicht kreisförmige — Mündungen, auf den Einfluß der Seitenwände, des Niveauabfalles usf. Die mit elementaren Hilfsmitteln arbeitenden technischen „Theorien" über den Ausfluß (über die Forchheimer in Enz. IV, 20, Nr. 8 berichtet) sind ganz unzuverlässig.

Für das Folgende wird es nützlich sein, gleich zu bemerken, daß eine Anwendung der Helmholtzschen-Strahltheorie auf den sogenannten Ausfluß *unter Wasser* oder überhaupt auf Unstetigkeitsstellen im Innern der Strömung, infolge der sich hier geltend machenden Zähigkeit nicht ohne weiteres möglich ist. Die Untersuchung des *Ventilspieles* der Kolbenpumpen ist also ein Problem der dritten Gruppe.

Was die Theorie der *Schmiermittelreibung* anbelangt, so hat bekanntlich Sommerfeld Integrale der Stokesschen Gleichungen gefunden, die für mittlere Umlaufzahlen der Welle die gerade hier sehr charakteristischen Beobachtungsresultate von Stribeck gut wiedergeben. Bei größeren Geschwindigkeiten scheinen die Vernachlässigungen in der Durchführung des Ansatzes unstatthaft zu sein; darin, daß die Lösung beim Übergang zur Geschwindigkeit Null versagt, sehe ich keinen Mangel: es tritt eben *trockene Reibung* d. i. unmittelbares Gleiten der Welle auf der Lagerschale ein. — Andere Fälle, in denen die Stokesschen Gleichungen, bzw. ihr von Poiseuille angegebenes Integral verwendbar bleiben, sind die Strömung in den ringförmigen Spalten der sogenannten *Labyrinthdichtungen*, dann Erscheinungen an gewissen, mit Drucköl arbeitenden Motoren usf.

Auf die Prandtlschen Untersuchungen über die „Grenzschichten" und auf das sogenannte *Turbulenzproblem* komme ich noch zurück. Etwas näher gehe ich jetzt auf die allgemeine Behandlung der Probleme der dritten Gruppe ein.

Seit Saint-Vénant wissen wir, daß die Abweichung der Beobachtungsergebnisse von denen der Theorie darauf zurückzuführen sind, daß das, was wir als Geschwindigkeits- und Druckgrößen messen, nicht die *realen Werte* sind, für welche die Sätze der Mechanik gelten, sondern *Durchschnittszahlen* aus stark und rasch schwankenden Augenblickswerten. Die wirkliche Flüssigkeitsbewegung setzt sich aus zwei Teilen zusammen: aus einer *Grundbewegung* und aus den sich darüber lagernden *Pulsationen*. Es war nun die Idee von Boussinesq, zu versuchen, ob sich nicht unmittelbar für die Durchschnittswerte, also für

die Größen der Grundbewegung, Differentialgesetze aufstellen lassen. Er kam mit Hilfe plausibler Überlegungen zu dem Schlusse, daß die Mittelwerte des Druckes und der Geschwindigkeit annähernd Gleichungen von der Form der Stokesschen genügen, in denen nur an Stelle des konstanten Zähigkeitskoeffizienten ein variabler — erst noch besonders zu bestimmender — „*Turbulenzkoeffizient*“ tritt. Was mit dieser Theorie geleistet werden kann, ist folgendes: Man entnimmt der Beobachtung etwa von Strömungen in geraden kreisförmigen Rohren den Wert des Turbulenzkoeffizienten als Funktion des Rohrdurchmessers, der Durchflußmenge und der Koordinaten eines Querschnittspunktes; man führt diese Funktion als eine gegebene in die Boussinesqschen Gleichungen ein; man sucht endlich Integrale dieser Gleichungen auf, entsprechend Randbedingungen, die nicht stark von denen der geraden gleichförmigen Bewegung abweichen, also für mäßig gekrümmte Leitungen von langsam veränderlichem Querschnitt usf.; diese Integrale sollen annähernd die Mittelwerte des Druckes und der Geschwindigkeit, die unter den neuen Bedingungen eintreten, wiedergeben. Tatsächlich hat man aber bis heute die Theorie in dieser Weise nicht durchzuführen vermocht, sind doch die Boussinesqschen Gleichungen nur komplizierter als die Stokesschen, einer numerischen Verwertung also noch schwieriger zugänglich. In jedem Einzelfall, z. B. bei Behandlung des *Stauproblems*, verwendet Boussinesq willkürliche Annahmen wie etwa über die gegenseitige Neigung der Stromlinien u. ä., die ihm eine Umgehung oder Vereinfachung der Integrationsschwierigkeiten ermöglichen. Das eigentliche Ziel des Boussinesqschen Ansatzes ist damit nicht erreicht.

Ich habe nun in meiner eben erschienenen Habilitationsschrift „Theorie der Wasserräder“[1]) eine Auffassung entwickelt und an einer bestimmten Problemgruppe auch durchgeführt, die im Prinzip der Boussinesqschen verwandt ist, aber wie sich zeigt, bedeutend leichter praktische Verwertung gestattet. Vor allem wird die Bestimmung des Druckverlaufes (der Grundbewegung) von der der Geschwindigkeiten abgetrennt. Um den Kernpunkt voranzustellen, spreche ich gleich meine Hypothese aus: die der rohen Beobachtung zugänglichen Mittelwerte der *Geschwindigkeit* genügen annähernd einem Gleichungssystem, *das aus dem Eulerschen Ansatz entsteht, wenn daraus der Druck eliminiert wird.* Diese Gleichungen nenne ich die Helmholtzschen, da sie inhaltlich den bekannten Wirbelsätzen von Helmholtz äquivalent sind. Die Mittelwerte des *Druckes* sind erst noch durch eine besondere Untersuchung zu bestimmen.

---

1) Leipzig 1908, B. G. Teubner, auch Z. f. Math. u. Phys. Bd. 57.

Um den Inhalt der Hypothese zu übersehen, muß man sich zunächst über folgende Fragen Rechenschaft ablegen: In welcher Weise wird überhaupt eine bestimmte Lösung der Eulerschen Gleichungen *individualisiert?* Oder mit anderen Worten: Welche Form hat das für diese Gleichungen zu stellende Randwertproblem? Es wäre sehr erwünscht, wenn von mathematischer Seite dieser Frage näher getreten würde. Ich habe nur auf dem Wege plausibler Schlüsse eine Orientierung gesucht und möchte hier speziell für *stationäre* Strömung folgendes als sichere Vermutung hinstellen: es bedarf zur Bestimmung einer stationären Bewegung außer den eigentlichen Randbedingungen (also den begrenzenden Wänden, dem Druckverlauf an freien Oberflächen, den Aus- und Eintrittsgeschwindigkeiten) noch der Kenntnis zweier Dinge: einmal des Wertes, den die *Konstante H der Bernoullischen Gleichung*

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - U = \text{konst.} = H$$

in den Punkten eines jede Stromlinie einmal schneidenden Querschnittes annimmt, zweitens einer Reihe von „Verteilungsziffern", deren Anzahl um eins kleiner ist als die Zusammenhangszahl des Gebietes. Eine Lösung ist also erst bestimmt nach Angabe von Größen, *über die man physikalisch nicht verfügt.* Darin liegt gewiß ein prinzipieller Mangel der Theorie idealer Flüssigkeit, im Rahmen meiner Auffassung läßt sich aber gerade dieser Umstand günstig verwerten: durch eine geeignete, in jedem Einzelfalle erst noch zu überlegende, Annahme über jene Größen kann ich mich den Beobachtungsresultaten gut anpassen. Der Gedankengang wird also ein dem Boussinesqschen ganz analoger: aus der Beobachtung der Geschwindigkeitsmittel bei gleichförmiger Bewegung gewinne ich die erforderliche Kenntnis der Querschnittsverteilung der Bernoullischen Konstanten; und mit dieser Funktion als Randbedingung suche ich Integrale der Helmholtzschen Gleichungen für andere Fälle, die von dem gleichförmiger Strömung nicht zu sehr verschieden sind.

Zur Begründung meiner Hypothese kann ich hier nur anführen: erstens daß sie, soweit ich übersehe, zu keinem prinzipiellen Widerspruch führt; zweitens, daß sie mir mit Beobachtungen, die ich anzustellen Gelegenheit hatte, qualitativ übereinzustimmen scheint. Auch glaube ich, daß mancher, der die Theorie idealer Flüssigkeit auf wirkliche Bewegungsvorgänge angewendet hat, schon stillschweigend von dieser Hypothese Gebrauch machte oder doch von einer ähnlichen Vorstellung ausging. Ferner möchte ich eine Bemerkung von Helmholtz zu ihren Gunsten auslegen, der darauf hinweist, daß den idealen Lösungen mit

Unstetigkeitsflächen im Innern ganz ähnliche beobachtbare Bewegungsformen des Wassers entsprechen. Schließlich entnehme ich dem eben erschienenen Enzyklopädieartikel von C. H. Müller über die Hydrodynamik des Schiffes, daß sowohl in der Theorie der Schiffsbewegung als in der der Luftfahrzeuge Tatsachen bekannt sind, die meine Hypothese bestätigen. Um es also noch einmal zusammenzufassen: *die innere Reibung reguliert die Pulsationen der Geschwindigkeit derart, daß das Durchschnittsbild dem einer reibungsfreien Flüssigkeit annähernd gleichkommt.* Oder, wie man kürzer sagen kann: man erhält Übereinstimmung, wenn man in den Gleichungen die Zähigkeitsglieder, in den Beobachtungen die Pulsationen wegläßt.

Hinsichtlich der Bedeutung des *Druckverlaufes* sind zwei Fälle zu unterscheiden. Gehören zu den Randbedingungen keine freien Oberflächen, so läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung ermitteln *ohne* irgendeine Annahme über den Druck. Dies ist z. B. der Fall bei den in meiner Turbinentheorie behandelten Aufgaben. Andernfalls wie etwa beim Stauproblem, muß man sich schon *vorher* über den Zusammenhang von Druck und Geschwindigkeit längs einer Stromlinie, also im wesentlichen über den *Energieverlust durch Reibung* ein Urteil verschaffen. In diesem Punkte nun schließe ich mich dem Gebrauch der technischen Hydraulik an, d. h. ich begnüge mich mit einer *planmäßigen Verwendung von Beobachtungs- und Rechnungsergebnissen über den Energieverlust bestimmter einfacher Strömungsformen.* Man pflegt über diese Art der Betrachtung oder ihren Mißbrauch geringschätzig zu urteilen und sie als „Koeffizienten-Wirtschaft" zu bezeichnen. Sie läßt sich aber ganz ordentlich formulieren, wenn man eine Untersuchung verfolgt, die ich auch berührt habe: wieweit nämlich die Integrale von den Randbedingungen gerade der *nächsten Umgebung* abhängen. Auch glaube ich, daß wir noch genug zu tun haben werden, um nur für die einfachsten Formen, etwa die Strömung im zylindrischen oder konischen Rohre und dgl. die Widerstandszahlen als Funktion der maßgebenden Problemkonstanten zu finden; und wenn man mit der Stokesschen Theorie einmal so weit sein wird, dann wird die hier vertretene Auffassung erst noch nicht überholt sein.

Man hat bisher in zweierlei Fällen versucht, solche Widerstandszahlen zu finden. Einmal gehört hierher das oben schon genannte *Turbulenzproblem* d. i. die Aufgabe, das wirkliche, der *pulsierenden* Bewegung entsprechende Integral der Stokesschen Gleichungen für eine zylindrische Leitung zu finden. Bekanntlich hat hier der Ansatz für „kleine Schwingungen", wie ihn Lord Kelvin durchgeführt hat, ein negatives Resultat ergeben. Die Ursache dafür liegt meines Erachtens in der

experimentell erhärteten Tatsache, daß die Strömungsverhältnisse oberhalb der kritischen Grenze stark von der Beschaffenheit der Wände, von ihrer *Rauhigkeit* abhängen. Man wird also als Randbedingung nicht eine *glatte* Wand, sondern etwa eine Sinuslinie einzuführen haben, und dann mit Amplitude und Elongation in solcher Weise zur Grenze Null übergehen müssen, daß verschiedene „Rauhigkeitsgrade“ damit charakterisiert werden können. Selbstverständlich kann nur über die Lösung dieses „Turbulenzproblems“ der Weg führen, der einen Beweis meiner oben hypothetisch ausgesprochenen Behauptung ermöglicht. Man wird zu zeigen haben, daß sich ganz allgemein in den Stokesschen Gleichungen — unter Einführung gewisser Vernachlässigungen — eine Grundbewegung abspalten läßt, die von den Zähigkeitsspannungen unabhängig ist.

Die zweite Art hier anzuführender Untersuchungen ist die von Prandtl in Angriff genommene Mechanik der „Übergangsschichten“. Wenn man in ein Gebiet wesentlich bekannter Geschwindigkeitsverteilung ein Strömungshindernis einbaut, so kann man die Lösung der Stokesschen Gleichungen in der nächsten Umgebung — d. i. eben die Übergangsschicht, die für den Energieverlust maßgebend ist — annähernd als dadurch bestimmt ansehen, daß sie einerseits den durch das Hindernis gegebenen Randbedingungen genügt, andrerseits sich jener bekannten Bewegungsform in weiterer Entfernung anschließt. In dieser Weise wurde von Prandtl beispielsweise der Widerstand einer dünnen rechteckigen Platte berechnet, die in der Längsrichtung einer gleichförmigen Strömung eingetaucht wird.

Ich darf vielleicht zum Schluß mit ein paar Worten andeuten, welchen Weg die weitere Durchführung meiner *Turbinentheorie* nimmt. Es handelt sich hier im wesentlichen um die *Ermittlung der Strömung in dem sogenannten Schaufelraum* des Lauf- und Leitrades. Seit jeher ist es in der technischen Literatur üblich, das Problem als ein *zweidimensionales* aufzufassen d. h. nur nach einem *Durchschnittsbild* von dem, was zwischen zwei Schaufeln vorgeht, zu fragen. Man hat also ein Problem von „Stromschichtenbewegung“ vor sich und findet unmittelbar aus den Helmholtzschen Sätzen die Beziehung zwischen der Stromfunktion $\psi(r, z)$ auf der Schaufelfläche und der Gleichung der Fläche in Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

$$\varphi = f(r, z) + \text{konst.}$$

Es resultiert eine in ψ lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, deren Koeffizienten vom zweiten Grad in f und deren ersten beiden Ableitungen sind. Zur Integration verwende

ich ein rein graphisches Verfahren, das eigentlich ein direktes *Skizzieren der Stromlinien* auf Grund ihrer aus den Gleichungen folgenden infinitesimalgeometrischen Eigenschaften ist. Man gelangt so gerade zu der Lösung der Aufgabe, vor die sich der Turbinenkonstrukteur beim Entwerfen eines Rades gestellt sieht. Daran knüpfen sich Erörterungen über die Gesichtspunkte zur *Wahl der Schaufelform*, während in loserem Zusammenhange damit eine umfassendere, auch an Versuchsergebnissen geprüfte Untersuchung über die Arbeitsleistung und Energiebilanz der Kreiselräder steht.

Es ist selbstverständlich, daß alle hier vorgetragenen Untersuchungen, an der *idealen* Mechanik gemessen, etwas durchaus Vorläufiges darstellen. Aber ich glaube, man muß auch gelegentlich zu Unvollkommenem greifen, wenn man an den Bedürfnissen der Praxis nicht einfach vorbeigehen will.

Bemerkungen über die Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege“) auf einer Fläche.

Von Rudolf Rothe in Clausthal.

In seinen vor kurzem erschienenen Vorlesungen über Differentialgeometrie hat Herr R. v. Lilienthal[1]) mehrere Paragraphen einer Art von ebenen Kurvennetzen gewidmet, die von Herrn G. Scheffers[2]) früher als „Kurvennetze ohne Umwege“ bezeichnet worden sind. Sie haben die Eigenschaft, daß alle aus Kurven des Netzes gebildeten und zwei beliebige Punkte verbindenden Wege dieselbe (algebraisch zu zählende) Bogenlänge besitzen.

Ich möchte hier kurz auf diese Netze zurückkommen, zunächst um eine Lücke in Herrn v. Lilienthals Literaturangabe, die nur die Scheffersche Arbeit und seine eigene[3]) berücksichtigt, durch Hinzufügung meiner Veröffentlichungen über diese Netze auszufüllen, die ich *Gewebe* genannt und auf beliebig gekrümmten Flächen untersucht habe.[4])

---

1) R. v. Lilienthal. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erster Band: Kurventheorie. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Es kommen für das Folgende hauptsächlich die Seiten 123 ff. in Frage.

2) G. Scheffers. Ebene Kurvennetze ohne Umwege. Berichte üb. d. Verh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Kl. Bd. 57 S. 353. 1905.

3) R. v. Lilienthal. Über ebene Kurvennetze ohne Umwege. Dieser Jahresb. Bd. 16, S. 204. 1907.

4) R. Rothe. Bemerkungen über ein spezielles krummliniges Koordinatensystem. Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. I, S. 47. 1902. — Über die Bekleidung

Sodann will ich auf einen Satz zu sprechen kommen, den Herr v. Lilienthal seinen früheren Untersuchungen neu hinzufügt, nämlich *daß sich die Kurven eines Gewebes nur dann senkrecht schneiden können, wenn ihre Winkelhalbierenden aus Parallelkurven und deren orthogonalen Trajektorien gebildet werden.* Dieser Satz, von Herrn v. Lilienthal nur für die Ebene ausgesprochen, gilt, wie ich schon früher gezeigt habe, wörtlich für eine beliebige Fläche. Er ist aber für die orthogonalen Netze *nicht* charakteristisch, sondern besteht für alle Gewebe, *deren Maschenwinkel* (Schnittwinkel zweier Kurven) *längs jeder Winkelhalbierenden der einen Schar konstant sind.*

Gewebe dieser Art habe ich *gestreift* genannt und unter anderm von ihnen bewiesen, daß die geodätischen Krümmungen zweier beliebiger Kurven der beiden Scharen des Netzes im Schnittpunkt einander gleich sind; wenn umgekehrt ein Gewebe die letztere Eigenschaft hat, so ist es gestreift, d. h. der Maschenwinkel ist längs jeder Winkelhalbierenden der einen Schar konstant. Würde man allgemeiner die Frage nach den Kurvennetzen von der Beschaffenheit aufwerfen, daß in den Schnittpunkten die geodätische Krümmung jeder Kurve der einen Schar gleich der geodätischen Krümmung der Kurve der anderen Schar ist, so würden sich nach dem eben Gesagten keine Gewebe ergeben, wenigstens nicht im allgemeinen Falle.

Der Kern für die Untersuchungen über die Gewebe und die damit im Zusammenhang stehenden Kurvennetze scheint mir nun in folgenden allgemeinen Betrachtungen zu liegen, die sich zunächst auf ganz beliebige Kurvennetze beziehen. — Es seien $u =$ konst., $v =$ konst. irgend zwei Kurvenscharen auf einer Fläche. Das Quadrat des Linienelements einer beliebigen Kurve auf der Fläche nehme, wenn das Netz (u, v) als krummliniges Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, die Form

$$ds^2 = E du^2 + 2\sqrt{EG} \cos\omega \, du dv + G dv^2 \tag{1}$$

an, worin die Quadratwurzel positiv zu wählen ist, und ω den Koordinatenwinkel bedeutet. Die Kurven

$$\varphi(u, v) = \text{konst.}$$

seien die Halbierenden des Supplementwinkels zu ω; dann muß nach bekannten Sätzen der Flächentheorie

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} = \frac{D(\varphi, u)}{\Delta(\varphi, u)} = \frac{D(\varphi, v)}{\Delta(\varphi, v)}$$

---

einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz. Ebenda V, S. 9. 1906. — Über die Bekleidung einer Fläche mit einem Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege"). Ebenda VII. S. 12. 1907.

sein; hierin bedeuten Δ den Zwischenparameter und D die Funktionaldeterminante, diese dividiert durch die Quadratwurzel aus der Determinante der quadratischen Differentialform (1). Die Berechnung der Differentialparameter liefert

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{EG}\sin\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} : \left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \sqrt{EG}\cos\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$$
$$= \sqrt{EG}\sin\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} : \left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \sqrt{EG}\cos\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

und diese Gleichungen sind gewiß und nur dann erfüllt, wenn man

$$(2)\qquad E = \lambda^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2,\quad G = \lambda^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$$

setzt, unter λ einen Proportionalitätsfaktor verstehend.

Man gelangt auf diese Weise zu folgender Form für das Quadrat des Linienelements:

$$(3)\qquad ds^2 = \lambda^2\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\omega\,du\,dv + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2\right);$$

sie gilt für ein ganz beliebiges Kurvennetz (u, v), *die Kurven* $\varphi = konst.$ *sind die Halbierenden des äußern Koordinatenwinkels* $(\pi - \omega)$.

Wegen des positiven Vorzeichens von $\sqrt{EG}$ müssen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ einerlei Zeichen haben. Man kann beide Wurzeln als positiv annehmen; dann folgt aus den Formeln (2), daß λ ein Multiplikator für den Differentialausdruck

$$(4)\qquad \sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv = \lambda\,d\varphi$$

ist. Sei μ ein Multiplikator für den Differentialausdruck

$$(5)\qquad \sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv = \mu\,d\psi,$$

so ist jedenfalls auch

$$(6)\qquad \sqrt{E} = \mu\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad \sqrt{G} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

somit genau analog zu (3)

$$ds^2 = \mu^2\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 du^2 - 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\cos\omega\,du\,dv + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 dv^2\right).$$

Hieraus ist aber ersichtlich, daß *die Kurvenschar*

$$\psi(u, v) = \text{konst.}$$

den Koordinatenwinkel ω *selbst halbiert*, mithin senkrecht zur Schar $\varphi(u, v) = $ konst. steht. Diese Tatsache kommt am Besten zum Ausdruck, wenn man das Netz (φ, ψ) als krummliniges Koordinatensystem bei der Bildung von ds^2 zugrunde legt: man multipliziere beiderseits (4) mit $\cos\frac{\omega}{2}$, (5) mit $\sin\frac{\omega}{2}$, quadriere und addiere, so erhält man

$$(7)\qquad ds^2 = \lambda^2\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\varphi^2 + \mu^2\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\psi^2.$$

Aus den Formeln (2) und (6) folgt für $\nu = \mu : \lambda$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \nu \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\nu \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

so daß also ν ein Multiplikator für den Differentialausdruck

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du - \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = \nu \, d\psi$$

ist. Wenn daher ϑ eine beliebige Funktion des Ortes auf der Fläche ist, so gelten folgende Transformationsformeln für den Übergang vom System (u, v) zum System der Winkelhalbierenden (φ, ψ):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

und demnach

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = 2 \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{2}{\nu} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \psi} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingung für den Multiplikator ν,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$$

läßt sich mit Benutzung der Transformationsformeln für $\vartheta = \nu$ leicht in die Form

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \nu}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

setzen.

Bevor ich zu den Anwendungen dieser Formeln durch Spezialisierung schreite, mögen die geodätischen Krümmungen g_u, g_v der Linien $u =$ konst., $v =$ konst. berechnet werden. Aus den allgemeinen Formeln

$$\sqrt{EG} \sin \omega \, g_u = \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E} \cos \omega\right) - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

$$\sqrt{EG} \sin \omega \, g_v = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G} \cos \omega\right) - \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

folgt für das Linienelement (3)

$$(10) \qquad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \sin \omega \, g_u = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cos \omega\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \\ \lambda^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \sin \omega \, g_v = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \end{cases}$$

und weiter nach einigen hier übergangenen Zwischenrechnungen

$$\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sin \omega \,(g_u - g_v) = 2 \cdot \frac{\partial\left(\varphi, \lambda \cos^2 \frac{\omega}{2}\right)}{\partial (u, v)}.$$

Diese Formel gilt ebenfalls ohne Einschränkung für ein beliebiges Kurvennetz (u, v); ihre rechte Seite erhält auf Grund der zweiten Transformationsformel (8) für $\vartheta = \lambda \cos^2 \frac{\omega}{2}$ die Form

$$-\frac{4}{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\lambda \cos^2 \frac{\omega}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

so daß sich schließlich

$$(11) \qquad -\lambda^2 \sin \omega \, (g_u - g_v) = \frac{4}{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\lambda \cos^2 \frac{\omega}{2}\right)$$

ergibt.

Ich gehe nun zu den Anwendungen über und nehme *erstens* an, *das Netz (u, v) sei ein Gewebe.*

Die eingangs gegebene Definition für ein Gewebe („Kurvennetz ohne Umwege“) läßt sich auch so aussprechen: *Längs jedes geschlossenen, nur aus Stücken des betrachteten Kurvennetzes zusammengesetzten Integrationsweges soll die Gleichung*

$$\int ds = 0$$

erfüllt sein. Die Integrabilitätsbedingung dafür ist

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Man kann sich auf den Fall beschränken, wo beide Wurzeln positiv sind. Wie durch Einsetzen der Werte (2)

$$\sqrt{E} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \sqrt{G} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

folgt, *muß dann λ eine Funktion von φ allein sein.* Man darf sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins setzen; dann wird nach (3)

$$(12) \qquad ds^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega \, du dv + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

und nach (7)

$$(13) \qquad ds^2 = \cos^2 \frac{\omega}{2} \, d\varphi^2 + \mu^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \, d\psi^2.$$

Die Funktion φ drückt hierin die Bogenlänge sowohl der Linien $u =$ konst. wie auch $v =$ konst. aus.

Zweitens seien die Kurven $\varphi =$ konst. Parallelkurven.

Dann muß in (7) der Faktor von $d\varphi^2$ d. i. $\lambda^2 \cos^2 \frac{\omega}{2}$ *eine Funktion von φ allein sein,* die man wieder gleich Eins annehmen kann, so daß

$$\lambda^2 = 1 : \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

Mithin ergibt sich

$$(14)\qquad ds^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\omega\,du\,dv + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2\right)$$

und

$$(15)\qquad ds^2 = d\varphi^2 + \mu^2 \sin^2\frac{\omega}{2}\,d\psi^2.$$

Drittens seien die geodätischen Krümmungen g_u und g_v einander gleich. Soll

$$g_u = g_v = g$$

sein, dann muß zufolge der Gleichung (11) $\lambda \cos^2\frac{\omega}{2}$ *allein von φ abhängen.* Man darf

$$\lambda = 1 : \cos^2\frac{\omega}{2}$$

setzen und erhält

$$(16)\qquad ds = \frac{1}{\cos^4\frac{\omega}{2}}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\omega\,du\,dv + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2\right)$$

und

$$(17)\qquad ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} + \varrho^2\,\frac{d\psi^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

worin

$$\varrho = \mu \sin^2\frac{\omega}{2}\cdot$$

Der gemeinschaftliche Wert g der geodätischen Krümmungen läßt sich aus einer der Formeln (10) ermitteln. Mit Benutzung der Integrabilitätsbedingung (9) ergibt sich

$$-\,2g\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\log\nu}{\partial\varphi}\sin\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

und wenn man auf den Klammerausdruck der rechten Seite die erste Transformationsformel (8) für $\vartheta = \omega$ anwendet und dann die Größe ϱ einführt,

$$(18)\qquad -\,2g = \sin\omega\cdot\frac{\partial\log\varrho}{\partial\varphi}\cdot$$

Man kann jetzt folgenden Satz aussprechen:

Wenn ein Kurvennetz irgend zwei der Bedingungen erfüllt,

1. *ein Gewebe zu sein,*
2. *eine Schar Parallelkurven zu Winkelhalbierenden zu haben,*
3. *daß die geodätischen Krümmungen der Fäden in den Knotenpunkten einander gleich sind,*

so erfüllt es auch die dritte und ist ein gestreiftes Gewebe.

Die drei Bedingungen finden nämlich nach dem Vorstehenden ihren analytischen Ausdruck dadurch, daß 1. λ, 2. $\lambda \cos\frac{\omega}{2}$, 3. $\lambda \cos^2\frac{\omega}{2}$ Funktionen von φ sein müssen; es leuchtet jetzt ein, daß, wenn zwei von ihnen erfüllt sind, es auch die dritte ist. Dann muß aber auch ω eine Funktion von φ allein sein, d. h. der Maschenwinkel längs der einen Schar von Winkelhalbierenden konstant sein; damit ist auch die letzte Behauptung des ausgesprochenen Satzes bewiesen.

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich aus den vorstehenden Entwicklungen durch Spezialisierung weiter gewinnen lassen, sei der Satz von Herrn Weingarten erwähnt: *Die Winkelhalbierenden eines Netzes von geodätischen Linien bilden ein Netz von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln.* Setzt man nämlich in den zuletzt besprochenen Netzen, für die $g_u = g_v$ ist,

$$\varrho = 1,$$

so folgt aus der Formel (18) $g = 0$; das Netz (u, v) besteht also aus geodätischen Linien. Die Formel (17) ergibt

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} + \frac{d\psi^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

zeigt somit an, daß (φ, ψ) aus geodätischen Ellipsen und Hyperbeln zusammengesetzt ist.

Nun seien (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zwei Netze, *die dieselbe Schar* $\varphi =$ konst. *von Winkelhalbierenden besitzen.* Zufolge der Formel (7) muß dann der Quotient

$$\lambda_1 \cos\frac{\omega_1}{2} : \lambda_2 \cos\frac{\omega_2}{2}$$

eine Funktion von φ allein sein. Dieses Ergebnis ist trivial für die Netze, die die zweite der obigen drei Bedingungen erfüllen. Sind aber beide Netze Gewebe, *oder* genügen sie beide der Bedingung $g_u = g_v$, so folgt in beiden Fällen, daß die Quotienten

$$\cos\frac{\omega_1}{2} : \cos\frac{\omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_1 : \lambda_2$$

nur von φ allein abhängen dürfen. Daraus läßt sich unmittelbar der Satz folgern:

Man betrachte alle Kurvennetze, die dieselbe Schar von Winkelhalbierenden besitzen und entweder sämtlich Gewebe sind oder sämtlich der Bedingung $g_u = g_v$ genügen; befindet sich darunter auch nur ein gestreiftes Gewebe, so haben sie alle diese Eigenschaft.

Zu demselben Schluß gelangt man, wie ersichtlich, wenn sich unter den betrachteten Netzen zwei befinden, zwischen deren Maschenwinkeln eine funktionale Beziehung

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0$$

besteht, speziell, wenn zwei von den Netzen aufeinander senkrecht stehen[1]).

Ich will weiter noch mit einigen Worten auf die Fragestellung zu sprechen kommen, von der ausgehend Herr v. Lilienthal in seinem Buche zu den „Kurvennetzen ohne Umwege“ gelangt[2]): Wenn zwei beliebig gewählte Kurven der Schar $\varphi =$ konst. aus den Kurven einer Schar $u =$ konst. dieselbe Bogenlänge ausschneiden, und die Scharen $\varphi =$ konst. und $u =$ konst. nicht aufeinander senkrecht stehen, so gibt es noch eine weitere Schar $v =$ konst., aus deren Einzelkurven die beiden beliebig gewählten Kurven der Schar $\varphi =$ konst. dieselbe Bogenlänge ausschneiden. Beachtet man nun die Eigenschaft der Kurven $\varphi =$ konst., den (äußern) Maschenwinkel des Gewebes zu halbieren, so sieht man den Grundgedanken des vorstehenden Satzes in folgender Konstruktion der Gewebe wieder[3]):

Man trage, von einer willkürlichen Kurve ausgehend, auf den Kurven einer beliebigen Kurvenschar $u =$ konst. gleiche Bogenlängen ab, wodurch die Schar $\varphi =$ konst. entstehe, und ziehe dann die Kurvenschar $v =$ konst., mit der die Schar $\varphi =$ konst. dieselben Winkel einschließt wie mit der Schar $u =$ konst. Dann ist (u, v) ein Gewebe („Kurvennetz ohne Umwege“). —

Die charakteristischen Eigenschaften der hier betrachteten Netze, im besondern der Gewebe, sind durchweg bei der *Biegung der Fläche invariant*. Sollen daher diese Eigenschaften solchen Netzen zukommen, die sich bei der Verbiegung der Fläche ändern, so ist das nur auf speziellen Flächen möglich. So können die *Asymptotenkurven* nur dann ein Gewebe bilden, wenn die Fläche zu den Ribaucourschen gehört, bei denen das Krümmungsmaß längs der einen Schar von Krümmungslinien konstant bleibt[4]). Auf diesem Wege bietet sich eine Menge von Problemen dar, die größtenteils noch nicht behandelt sind, aber sehr wohl der Untersuchung wert zu sein scheinen. Ich möchte von ihnen, ohne auf die Sache selbst hier näher einzugehen, nur eins erwähnen, die Frage nach der Bestimmung derjenigen Flächen, deren *Krümmungslinien* ein Gewebe bilden. Die Ermittlung dieser Flächen hängt von einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung ab und ist anscheinend mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft.

Clausthal, 15. September 1908.

---

1) Man vgl. hierzu Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. VII. S. 16.

2) a. a. O. S. 124.

3) Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. VII, S. 17. — Auch die Beweisführung stimmt im wesentlichen mit der v. Lilienthalschen überein.

4) Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. V, S. 13.

Über Pläne zur Herausgabe von Abhandlungen Leonhard Eulers.

Von Felix Müller in Dresden.

Mit meinem Vortrage beabsichtige ich durchaus nicht, — wie es aus dem Wortlaute meines Themas vermutet werden könnte, — der Initiative der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich oder den Plänen unsres Komitees, das berufen ist, Schritte zur Verwirklichung einer Gesamtausgabe der Werke Leonhard Eulers in Erwägung zu ziehen, in irgendeiner Weise vorzugreifen. Ich möchte lediglich hier noch einmal den Zweck und die Nützlichkeit einer Neuausgabe Eulerscher Abhandlungen betonen, über frühere Pläne und Vorschläge sowohl für diese Neuausgabe wie für andere damit in Verbindung stehende literarische Unternehmungen auf Grund neuerer Studien zur Euler-Bibliographie referieren, ferner die Gründe, welche gegen eine Gesamtausgabe der Werke Eulers ins Feld geführt worden sind, zur Sprache bringen und schließlich auf die Wichtigkeit des Studiums Eulerscher Schriften für die wissenschaftliche Fortbildung der Lehrer der Mathematik hinweisen.

Wie wir aus dem kürzlich von den Herren Stäckel und Ahrens herausgegebenen Briefwechsel zwischen J. Jacobi und Paul Heinrich v. Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers wissen, reichen die Pläne für diese Gesamtausgabe bis in die 40er Jahre des vorigen Jahrhunderts zurück. Jacobi teilt in einem Briefe an seinen Bruder vom 9. Juli 1846 mit, er wolle an Fuß einen großen Brief schreiben über die Notwendigkeit der Herausgabe der Eulerschen Werke, und wie sie ohne Unbequemlichkeit zu leisten sei. Später schreibt er, er habe eine große Arbeit von 6 Wochen darangesetzt, um sich über die *zweckmäßigste Anordnung* des ungeheuren Stoffes zu orientieren. Ein Plan für die Herausgabe der Abhandlungen Eulers, nach den Gegenständen geordnet, sei allerdings eine schwierige Arbeit, die gewiß unter mehrere Fachgenossen verteilt werden müsse.

Hierauf teilt Fuß mit, daß er vor ca. 20 Jahren ein streng systematisches Verzeichnis der sämtlichen Schriften Eulers zu seinem Gebrauche angelegt und bei den Abhandlungen, deren Titel zu vag sind, eine kurze Erläuterung des Inhalts hinzugefügt habe. Jetzt schlägt Jacobi vor, in jenem Verzeichnisse bei jeder Arbeit ein paar Worte über den Inhalt oder ihre Hauptresultate anzugeben. Sie wissen, daß

das später in der Ausgabe der Commentationes arithmeticae v. J. 1849 geschehen ist. Fuß hält für die einzelnen Doktrinen oder deren Unterabteilungen die chronologische Reihenfolge für die rationellste und instruktivste. Zur Erleichterung des Nachsuchens sollen systematische Inhaltsverzeichnisse, auch alphabetische Register oder sonstige Hilfsmittel beigefügt werden, wobei man nicht allein auf ganze Abhandlungen, sondern auf Paragraphen und einzelne Seiten hinweisen kann.

Von diesem Vorschlage, den Fuß bereits vor 60 Jahren gemacht hatte, wußte ich noch nichts, als ich gelegentlich der Euler-Feier bei den Mitgliedern unsrer bibliographischen Kommission den Antrag stellte, als *Vorarbeit* zur Herausgabe der Werke Eulers, ein *ausführliches Sachregister zu Eulers Schriften* herzustellen, da die Überschriften der Abhandlungen keine genügende Auskunft über den Inhalt geben. Ein möglichst spezielles, systematisch oder lexikographisch geordnetes Verzeichnis aller von Euler behandelten Gegenstände würde am leichtesten über die vielseitige schriftstellerische Tätigkeit Eulers belehren und das Interesse an einer Neuausgabe seiner Werke beleben. Zu dem Zweck stellte ich für die einzelnen Disziplinen eine große Reihe von Stichwörtern zusammen, die auf Stellen in den, am besten chronologisch anzuordnenden, Schriften verweisen sollten. An diesem Verzeichnisse habe ich inzwischen weitergearbeitet, ermuntert durch den ähnlichen Gedanken von Paul Heinrich v. Fuß, von dem ich durch den Briefwechsel Kenntnis erhielt. Jacobis Antwort (Briefwechsel S. 49) lautete: „Die Idee, die Sie haben, es wäre möglich, einmal einen *Sachindex* zu geben, der womöglich sich auf die einzelnen Paragraphen der Abhandlungen bezöge, ist großartig. Es würde dadurch etwas Ungeheures geleistet; aber wenn auch die Mühe gegen die Wichtigkeit der Sache gering ist, wer sollte diese Arbeit unternehmen? Sie müßte vielleicht unter mehrere jüngere Gelehrte, die dafür honoriert würden, verteilt werden, etwa wie die Berliner Sterncharten".

Abgeschreckt durch die Summe von 80000 Rubel, auf welche Fuß die Kosten einer Gesamtausgabe der Werke Eulers veranschlagt hatte, will Jacobi zunächst die *größeren Werke Eulers* von einer Neuausgabe ausgeschlossen wissen. „Denn das *Haupt*bedürfnis ist auf die einzelnen Abhandlungen gerichtet, — und das Bessere darf nicht der Feind des Guten werden." Man müßte Bände von ungefähr gleichem Umfang machen, welche ein abgeschlossenes Ganze von gleichem oder verwandtem Inhalt enthalten. Diese Bände *sollten einzeln käuflich* sein. Wenn wir an den Hauptzweck einer Neuausgabe denken, der darin besteht, das Studium der Eulerschen Schriften zu erleichtern, so können wir der letzten Bemerkung Jacobis nur beistimmen.

Jacobi bedauert, den *Umfang* der einzelnen Abhandlungen nicht beurteilen zu können, da in der Fußschen Liste nur die Anfangspagina, aber nicht die Endpagina angegeben sind. Diese Lücke in der Euler-Bibliographie habe ich durch eine Arbeit über den Umfang der Abhandlungen Eulers ausgefüllt, die vor kurzem in Ihre Hände gelangt ist.

Aus dieser meiner Tabelle ergibt sich, daß alle Abhandlungen Eulers (— die Einzelwerke habe ich ausgeschlossen —) ca. 19200 Seiten oder 1200 Bogen in 8° umfassen. Schließt man auch die bis heute in den Sammelbänden, den Commentationes arithmeticae, den Opera posthuma, den Opuscula analytica, den Opuscula varii argumenti, dem IV. Bande der Institutiones calculi integralis bereits veröffentlichten Abhandlungen, zu denen man noch die von Michelsen in seiner deutschen Übersetzung des genannten Bandes aufgenommenen Abhandlungen rechnen kann, von einer Neuausgabe aus, so bleiben nur 565 Nummern des Hagenschen Index, mit einem Umfang von ca. 14500 Seiten oder nur ca. 900 Bogen 8°. In dem großen 4-Format der Opera posthuma würde dieser Rest nur ca. 9000 Seiten füllen. Sie wissen, daß Nic. Fuß den Umfang aller Werke Eulers auf 25 Bände in 4° zu je 640 Seiten schätzte. Jacobi schreibt (l. c. S. 56) an Fuß: „Hätten Sie den Leuten nicht mit Ihren 80000 Fr. solchen Schreck gemacht, so wären wir vielleicht schon etwas weiter".

Jacobi macht nun mehrfach spezielle Vorschläge für die systematische Gruppierung der Arbeiten Eulers, für Geometrie, Algebra und Analysis, Integralrechnung, Mechanik und Astronomie. Eine systematische Anordnung ist sehr schwer; wir können uns mit der Jacobischen Systematik nicht befreunden und würden eine andere Gruppierung vorschlagen. Doch verbietet uns die Zeit, hier Näheres mitzuteilen. Die Arbeiten aus der Dioptrik möchte Jacobi am liebsten ganz ausschließen, da sie „die langweiligsten aller Eulerschen Arbeiten sind, die noch dazu in zahlloser Menge und von unendlichem Umfang sind". Ich zähle 38 solcher Arbeiten mit einem Umfang von ca. 1000 Seiten.

Die Vorschläge dieser oder jener Auswahl oder Anordnung werden ja eingehender von der Züricher Gesellschaft und dem Euler-Komitee der Deutschen Mathematiker-Vereinigung geprüft werden. Wir werden wohl noch heute das Vergnügen haben, Näheres darüber von den Herren Stäckel und Rudio zu erfahren.

Ich bin überzeugt, daß das Bedürfnis einer Neuausgabe sämtlicher Werke oder ausgewählter Werke Leonhard Eulers fast allgemein anerkannt wird. Dem Einwurf des Herrn Knoblauch, daß die Eulerschen Abhandlungen sich mit verhältnismäßig leichter Mühe beschaffen lassen, kann ich nicht beistimmen. Ich habe auf verschiedenen großen

Bibliotheken eine ganze Reihe von Abhandlungen Eulers vergeblich gesucht und trotz des größten Entgegenkommens der Bibliotheksbeamten keine geringe Mühe gehabt bei der Beschaffung des Materials.

Herr Knoblauch wirft die Frage auf, ob das, was durch eine Neuherausgabe der Werke Eulers erreicht werden kann, den damit verbundenen Aufwand an Arbeit, Zeit und Kosten lohnen würde, — und *verneint* diese Frage. Von der Kostenfrage sehe ich ab; ich habe die Zuversicht, daß die zur Errichtung dieses Ehrendenkmals für den großen Euler verpflichteten Akademien und Gesellschaften es an der pekuniären Unterstützung nicht werden fehlen lassen, und daß zahlreiche Freunde der Mathematik sich finden werden, welche in der Lage sind, die erforderliche Summe flüssig zu machen. Im übrigen sollte keine Mühe gescheut werden, keine Zeit zu kostbar sein, um ein für die Wissenschaft so wichtiges Unternehmen durchzuführen. Bei einer Teilung der Arbeit ließen sich doch wohl die *Schwierigkeiten* überwinden. Als solche führt Herr Knoblauch an: 1. die Verbesserung der Druck- und Schreibfehler, 2. die Kontrolle der numerischen Beispiele, 3. die berichtigenden Anmerkungen zu etwaigen Fehlschlüssen, „die man bei ihrer großen Menge und weil sie für den mathematischen Standpunkt des 18. Jahrhunderts charakteristisch sind, nicht weglassen dürfe“, — und endlich 4. die Übersetzung der Eulerschen Abhandlungen. Der schwierigste Punkt sind wohl die berichtigenden Anmerkungen. Leider begegnet man verschiedentlich der Ansicht, Eulers Schriften seien *veraltet*, und leider wird dieses Argument gegen eine Gesamtausgabe seiner Werke von verschiedenen Seiten geltend gemacht. Häufig beruht dieser Vorwurf auf einer *ungenügenden* Kenntnis der Eulerschen Schriften. Lassen Sie mich nur *ein* Beispiel anführen. Vor einigen Jahren äußerte ein Berliner Universitätsprofessor, es verlohne sich nicht, Eulers Werke herauszugeben, da Euler mit divergenten Reihen gerechnet habe. Euler wußte sehr wohl, was unter der *Summe* einer divergenten Reihe zu verstehen sei; er fand, — man möchte sagen, mit glücklichem Instinkt, — die Fälle, in denen das Rechnen mit divergenten Reihen berechtigt ist. Borel hat neuerdings in seinen Leçons sur les séries divergentes das Verfahren Eulers glänzend gerechtfertigt. Er zeigt, daß Euler berechtigt war, eine divergente Reihe durch einen schnell konvergierenden Kettenbruch zu ersetzen, und daß gerade in Eulers Untersuchungen die Keime der Behandlung semikonvergenter Reihen durch Stieltjes und die neueren Anwendungen asymptotischer Reihen durch Poincaré beruhen. Überhaupt ist neuerdings mehrfach nachgewiesen worden, besonders durch die Herren Stäckel und Engel, daß die Keime mehrerer ganz moderner Theorien in Arbeiten Eulers

zu finden sind. Darauf sollte man in den von Herrn Knoblauch gewünschten Anmerkungen zu Eulers Abhandlungen an geeigneter Stelle hinweisen.

Eine *vierte* Schwierigkeit sieht Herr Knoblauch, wie wir oben sagten, in der Übersetzung. Er bemerkt mit Recht, daß in den neueren Dezennien die klassische Bildung in Deutschland leider sehr gesunken ist. Selbst Abiturienten der humanistischen Gymnasien würde das Latein Eulers Schwierigkeiten machen, — von den Realgymnasialabiturienten und Oberrealschulabiturienten, die ja neuerdings auch die Berechtigung haben, Mathematik zu studieren und Lehrer der Mathematik zu werden, ganz zu schweigen. Jacobi durfte noch vor 60 Jahren vorschlagen, *alle* Eulerschen Schriften in lateinischer Sprache herauszugeben. Er wollte sogar diejenigen Abhandlungen der Mémoires de Berlin, die ursprünglich lateinisch geschrieben waren und hernach in französischer Übersetzung veröffentlicht wurden, nach den noch vorhandenen lateinischen Originalen publizieren. Heute muß man dem traurigen Umstand Rechnung tragen, daß die lateinische Sprache aufgehört hat, Sprache der Gelehrten zu sein. Aber der lateinische Ausdruck Eulers ist so charakteristisch, daß er der Gesamtausgabe, die ja auch fremden Nationen zugute kommen soll, erhalten bleiben muß.

Obwohl Herr Knoblauch die Frage, ob eine Neuherausgabe der Werke Eulers den Aufwand an Arbeit, Zeit und Kosten lohnen würde, verneint, schlägt er doch vor, diejenigen Arbeiten Eulers, die selten geworden oder in wenig bekannten, auch auf großen Bibliotheken nicht vorhandenen Zeitschriften enthalten sind, wieder abzudrucken und damit die bisher noch nicht veröffentlichten Abhandlungen und Briefe, — letztere, soweit sie wissenschaftlichen Inhalts sind, — zu vereinigen.

Statt einer Gesamtausgabe wünscht Herr Knoblauch eine ins einzelne gehende wissenschaftliche Würdigung Eulers, also ein historisches Werk, das jedenfalls allen Mathematikern hoch willkommen sein würde. Die Durchführung dieses Unternehmens möchte er 3 Mathematikern anvertraut wissen, welche Zahl doch wohl zu gering sein dürfte, wenn das Werk der Bedeutung Eulers würdig entsprechen sollte.

So verdienstlich ein solches Werk wäre, so wenig würde es dem Zweck, den wir mit einer Neuausgabe Eulerscher Abhandlungen verfolgen, das Studium derselben zu erleichtern, entsprechen. Und dieses Studium sollte einem jeden Studenten der Mathematik dringend empfohlen werden. Wie wir aus Dirichlets Gedächtnisrede wissen, hat Jacobi als Student seine mathematische Ausbildung nicht durch den Besuch von Vorlesungen, sondern durch eifriges Studium der Werke von Euler und Lagrange erhalten. Lagrange selbst antwortete auf

die Frage, wie man am besten Mathematik studiere: „Durch das Studium der Werke Eulers“, und Gauß schreibt in einem Briefe vom 16. September 1849 an Paul Heinrich v. Fuß, er sei der Überzeugung, daß „das Studium aller Eulerschen Arbeiten doch stets die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird“. — Euler ist der beste Dozent, ein Vorbild für alle Lehrer der Mathematik. Das Studium seiner Schriften verschafft nicht nur *Kenntnisse*, sondern gewährt zugleich wegen der einfachen und klaren Darstellung einen außerordentlichen *Genuß*. Euler fördert nicht nur das Wissen, sondern auch das Können. Die Methoden, nach denen er die einzelnen Probleme erfaßt und behandelt, sind vorbildlich. Mit großer Offenheit und Ehrlichkeit zeigt er den Weg oder die Wege, auf denen er zu seinen Resultaten gelangt ist. Er versteht es, die Liebe, mit der er selbst die Probleme umfaßt, auch auf seine Schüler zu übertragen. Zwanglos eignen sich auch diese die Technik des Aufgabenlösens an. — Man hat eingewendet, bei der Eigenart der Darstellung Eulers müsse der Leser *viel Überflüssiges* mit in den Kauf nehmen. Ja freilich, wer *nur nach den Resultaten* verlangt und an der Darstellung keinen Genuß findet, der opfere seine kostbare Zeit nicht dieser Lektüre. Gibt es doch Studenten, welche sich *möglichst schnell* diejenigen Kenntnisse einpfropfen wollen, welche beim sogenannten *Staatsexamen* verlangt werden. Weierstraß pflegte zu sagen: „Mit dem Staatsexamen kann man keinen Staat machen“. Unter den Kandidaten, welche mir betreffs Ableistung ihres Probejahrs zugewiesen waren, fand ich *mehrere*, welche zwar die *volle* Fakultät für Mathematik erhalten, aber niemals ernstlich studiert hatten. Als einer meiner Kandidaten bemerkte, daß ich im Lehrerzimmer vor Beginn der Konferenz ein mathematisches Werk studierte, fragte er mich: „Warum studieren Sie denn das; Sie sind doch schon angestellt?“ — Der junge Mann wußte schon, daß er, auch wenn er gar nichts *für seine wissenschaftliche Fortbildung* täte, dennoch in einigen Jahren nicht bloß die schöne Funktionszulage, sondern auch den schönen Professortitel erhalten würde. Für solche pseudomathematischen Professoren sind allerdings alle Verhandlungen über Reform des mathematischen Unterrichts und über Vorbildung und Fortbildung der Lehrer der Mathematik in den Wind gesprochen, für sie existiert keine Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, kein Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, sie kennen weder eine mathematische Bibliographie noch eine Geschichte der Mathematik. *Sie* sind es gerade, die die Lektüre Eulers gern mit den Worten von sich weisen: „Der ist veraltet“.

Gerade für die wissenschaftliche Fortbildung der Lehrer der Mathematik möchte ich das Studium der Schriften Eulers dringend empfehlen. Mein verehrter Lehrer, der „alte“ Schellbach, pflegte seinen Seminarkandidaten zu sagen: „Lesen Sie Euler, von dem haben Sie mehr als von Weierstraß“! Ich bin überzeugt, daß eine Neuausgabe ausgewählter, dem genannten Zwecke entsprechender Schriften Eulers vielen sehr willkommen sein würde. Ich selbst verspreche mir von einer solchen Sammlung eine wesentliche Förderung des wissenschaftlichen Interesses der mathematischen Oberlehrer.

M. H.! Zum Glück finden sich unter dem akademischen Nachwuchs junge Leute genug, die — trotz der immer noch nicht überwundenen Phrase von der Überbürdung — schon auf der Schule *arbeiten* gelernt haben, — welche von ihren Lehrern auf der Universität eine Begeisterung für unsre Wissenschaft gewonnen haben, die weit über die Studienzeit hinaus andauert. *Diesem besseren akademischen Nachwuchs* wollen wir für seine Studien durch die Herausgabe von Werken Eulers die Wege ebenen, — ein jeder nach seinen Kräften.

Berichtigungen zu Felix Müllers „Ergänzung des Hagenschen Index und der Fußschen Liste“.

Von Wilhelm Ahrens und Paul Stäckel.

Verschiedene Angaben, die Herr Felix Müller in seiner Note: *Umfang der einzelnen Abhandlungen Leonhard Eulers* (Seite 313—318 dieses Bandes) gemacht hat, bedürfen der Berichtigung.

1. Zur „Ergänzung der Angaben Jacobis“ hat Herr Müller die Titel der Abhandlungen zusammengestellt, die Euler im Jahre **1744** in der Berliner Akademie gelesen hat, und zwar benutzt er dazu die *Histoire* der Akademie für 1745. Auf diese Quelle hatte jedoch schon Jacobi in dem Briefe an Fuß vom 24. Oktober 1847 hingewiesen (vgl. den von uns herausgegebenen *Briefwechsel zwischen Jacobi und Fuß*, Leipzig 1908, S. 22), und Fuß hatte die betreffenden Daten in sein Handexemplar der *Liste* eingetragen. Dementsprechend sind diese Daten in unseren Abdruck der Fußschen Liste überall eingesetzt worden. Zum Überfluß haben wir sogar alle in Betracht kommenden Nummern in einer Anmerkung auf S. 131 des Briefwechsels zusammengestellt. Während wir aber dort *sechs* Abhandlungen anführen, finden sich bei Herrn Müller *acht* Titel. Der Unterschied erklärt sich folgendermaßen.

2. Die sechste Abhandlung bei Müller: *Sur quelques propriétés des sections coniques* war, wie an der von Herrn Müller angeführten Stelle der *Histoire* (S. 53) berichtet wird, noch der alten Berliner Societät vorgelegt worden, konnte aber in dem siebenten und letzten Bande der *Miscellanea Berolinensia* (der bekanntlich im Jahre 1743 erschienen ist) keinen Platz finden und ist daher erst in dem ersten Bande der Berliner *Mémoires* für 1745 veröffentlicht worden. Wie wir jetzt wissen (Briefwechsel, S. 22), ist das Exhibitionsdatum der 6. September **1742**; diese Angabe hätte Herr Müller auch unter Nr. 345 der von uns ergänzten Fußschen Liste (Briefwechsel, S. 120) finden können.

3. Die achte Abhandlung bei Müller: *Sur un nouveau problème de mécanique* hat nicht Euler, sondern **Daniel Bernoulli** zum Verfasser. Man kann dies schon dem Berichte auf S. 56 der *Histoire* entnehmen, wo es heißt: „c'est ce qui a engagé Mr. Bernoulli à donner sa propre solution dans un Mémoire qu'il a fourni à l'Académie Royale des Sciences de Berlin“, überdies wird aber an dem Rande auf S. 54 der *Mémoires* verwiesen, wo ausdrücklich Daniel Bernoulli als Autor angegeben ist.

4. Als „nicht bei Hagen erwähnt“ bezeichnet Herr Müller eine Abhandlung: *Methodus viri Celeb. Leonhardi Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli telluris secundum mensuram a Celeb. de Maupertuis cum sociis institutam,* Comm. Petrop. 12 (1740); Herr Müller äußert sich zwar nicht darüber, ob sie sich in dem Wiederabdruck der Fußschen Liste findet, da er aber vorher (S. 317, Zeile 4) vermerkt hat, welche Nummern dieses Verzeichnisses bei Hagen fehlen, so muß der Leser annehmen, daß die Lücke auch dort vorhanden ist. In Wahrheit hat Jacobi diese Abhandlung, die in einer Veröffentlichung Winsheims „latitierte“, im Jahre 1848 entdeckt (Briefwechsel, S. 55), und sie wird auf Grund der Mitteilung Jacobis in der Vorrede zu den *Commentationes arithmeticae* (T. I. S. XXIV) von Fuß erwähnt. Wir hatten sie in Übereinstimmung mit dem Fußschen „Handexemplar“ als Nr. 638a in die Liste eingeschaltet (Briefwechsel, S. 149). Aber auch bei Hagen fehlt sie nicht, sie ist die Nr. (14) des *Appendix* (S. 72). Merkwürdigerweise wird diese Hagensche Nr. (14) von Herrn Müller selbst in der letzten Spalte der S. 316, Zeile 9 von unten angeführt.

The Number of Types of Collineations.

By E. B. Wilson at Cambridge, Mass.

A recent note on „the number of classes of conjugate periodic linear substitutions with rational coefficients“ by A. Ranum in the Jahresbericht, June, 1908, brings to mind the question of the number of types of collineations. As I have been unable to find the matter discussed anywhere, it occurs to me that there might be some interest in the tabulation of the numbers of types up to and including $n = 12$ which I have made, even though a general formula applicable to an arbitrary n appears not to be available.

The method of constructing the table is simple. In the first place it may be noted that in the reduction of any collineation or matrix to a standard form it is shown that the different latent roots are indepedent to the extent that the given matrix may be written as a sum of matrices each of which depends on a single latent root and the exponents of the elementary divisors corresponding to that root. The first task is therefore the enumeration of the number of types of matrices with a single root. Then the results for the case of different roots may be obtained by combining the numbers found for the case of a single root.

If the number of dimensions is $n - 1$ so that the matrix is of order n, the exponents of the elementary divisors corresponding to a single root satisfy the relations

$$k_1 \leq k_2 < \cdots \leq k_p, \qquad p < n,$$
$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n.$$

The problem is thus reduced to that of finding the number of ways in which a sequence of p numbers (which never decrease) may be picked out so that their sum is n. Let $\varphi_p(n)$ denote this number. Clearly $\varphi_1(n) = 1$. If $p = 2$, the possibilities are $(1, n-1)$, $(2, n-2) \ldots$, and if n is even, the number is $\frac{1}{2} n$ but if n is odd, it is $\frac{1}{2}(n-1)$. Hence if $E(x)$ denote the integral part of x, it is seen that $\varphi_2(n) = E(\frac{1}{2} n)$. The result for $p = 3$ may be found as follows. If the first k is $k_1 = 1$, there is left $n - 1$ as the sum of k_2 and k_3 and the number of possibilities is $\varphi_2(n-1)$. If $k_1 = 2$, there is left only $n - 2$ for $k_2 + k_3$ and as k_2 and k_3 must each be as great as 2, the sum of

$k_2 - 1$ and $k_3 - 1$ is equal to only $n - 4$. Hence the number of possibilities in $\varphi_2(n-4)$. And so on. The total number of types when $p = 3$ is

$$\varphi_3(n) = \varphi_2(n-1) + \varphi_2(n-4) + \varphi_2(n-7) + \cdots$$

In like manner it is evident that when $p = 4, \cdots, p$.

$$\varphi_4(n) = \varphi_3(n-1) + \varphi_3(n-5) + \varphi_3(n-9) + \cdots,$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\varphi_p(n) = \varphi_{p-1}(n-1) + \varphi_{p-1}(n-p-1) + \varphi_{p-1}(n-2p-1) + \cdots,$$

where it goes without saying that the series must stop between the terms for which

$$n - ip - 1 \geqq p \quad \text{and} \quad n - (i+1)p - 1 < p.$$

These expressions for $\varphi_3(n)$, $\varphi_4(n)$, $\cdots$, $\varphi_p(n)$ clearly may be put in the form

$$\varphi_3(n) = \varphi_2(n-1) + \varphi_3(n-3),\ n \geqq 6;\ \varphi_3(n) = \varphi_2(n-1),\ n < 6;$$

$$\varphi_4(n) = \varphi_3(n-1) + \varphi_4(n-4),\ n \geqq 8;\ \varphi_4(n) = \varphi_3(n-1),\ n < 8;$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\varphi_p(n) = \varphi_{p-1}(n-1) + \varphi_p(n-p),\ n \geqq 2p;\ \varphi_p(n) = \varphi_{p-1}(n-1),\ n < 2p.$$

As φ_2 is known, the results for φ_3, φ_4, ... may be obtained by these recursion formulas. The following table contains the results up to and including $n = 12$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ_2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
φ_3		1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
φ_4			1	1	2	3	5	6	9	11	15
φ_5				1	1	2	3	5	7	10	13
φ_6					1	1	2	3	5	7	11
φ_7						1	1	2	3	5	7
φ_8							1	1	2	3	5
φ_9								1	1	2	3
φ_{10}									1	1	2
φ_{11}										1	1
φ_{12}											1
N	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77

The lowest line contains the sums of the columns plus one

$$N = \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \cdots + \varphi_n(n)$$

which is the total number of types of collineation with a single root.

As far as the table goes, neither $\varphi_p(n)$ nor N become very large; but as n increases, these numbers increase very rapidly. In fact it is not difficult to show that approximately

$$\varphi_3(n) = \frac{n^2}{12}, \quad \varphi_4(n) = \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48}, \quad \varphi_5(n) = \frac{n^4}{2880} + \frac{n^3}{288}$$

for large values of n, and similar asymptotic formulas for $\varphi_p(n)$ may be obtained for higher values of p. The very rapid increase in N is therefore evident. In fact where $n = 20$, the value of N has already become 627.

If now the collineation in n variables has p roots with multiplicities $k_1, k_2, \cdots, k_p$, the same relations

$$k_1 \leqq k_2 < \cdots \leqq k_p, \qquad p \leqq n,$$
$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$$

must hold. The above table will therefore give the number of possible ways in which the roots may be picked out. The number of possibilities in the arrangement of the exponents of the elementary divisors of a root of multiplicity k_i being $N(k_i)$, it follows that the number of types of collineation corresponding to a specified selection of multiplicities which are all different is

$$N(k_1) \cdot N(k_2) \cdot \ldots \cdot N(k_p).$$

If some of the multiplicities are equal, this product would count some of the types more than once. In fact if there be s sets of t things, all the sets being alike, the number of different ways in which s things, one taken from each set, may be selected is

$$\frac{t(t+1) \cdot \ldots \cdot (t+s-1)}{s!}.$$

Hence if $p = 5$ and $k_1 = k_2 = k_3 \neq k_4 = k_5$, the number of types of collineation would be

$$\frac{[N(k_1)] \cdot [N(k_1) + 1] \cdot [N(k_1) + 2] \cdot [N(k_4)] \cdot [N(k_4) + 1]}{3!\ 2!}.$$

Consider next the possible selections of multiplicities for the roots. If $n = 3$ and $n = 4$ the results are respectively

(111), (12), (3) and (1111), (112), (13), (22), (4).

Here it is seen, as in general, that every type for $n = 3$ is repeated for $n = 4$ with an additional 1 prefixed and that there are also certain extra types which here are (22) and (4). Thus the number of types $C(n)$ of collineation will be

$$C(4) = C(3) + E(4) \quad \text{or} \quad C(n+1) = C(n) + E(n+1),$$

where $E(4)$ and $E(n+1)$ designate the additional types due to the distribution of multiplicities for which $k_1 > 1$. It is well known that $C(3) = 6$, and hence it follows that

$$C(4) = 6 + \frac{N(2)\cdot[N(2)+1]}{2!} + N(4) = 6 + 3 + 5 = 14$$

by taking the values for N out of the table. For $n = 5$, the extra possibilities are (23) and (5). Hence it follows that

$$C(5) = 14 + N(2)\cdot N(3) + N(5) = 27.$$

As the extra types of multiplicities are very easy to write down for a sequence of values of n, the computation of $C(n)$ to any desired value of n is readily performed. The results up to and including $n = 12$ are given in the table below.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$C(n)$	3	6	14	27	58	111	223	424	817	1527	2870

These numbers run on with rapidly increasing magnitudes when n increases. As a convenient method of classifying matrices is by means of their latent roots and their equation of lowest degree, it is not without interest to ascertain how far the number $L(n)$ of these classes falls short of $C(n)$. The method used in evaluating $C(n)$ may be applied with the sole change that the products of the numbers k replace the products of the numbers $N(k)$. The results are given in the following table.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$L(n)$	3	6	13	24	48	86	160	282	496	855	1475

Massachusetts Institute of Technology.

Boston, Mass., August 1908.

Zur Erinnerung an Heinrich Maschke.

Von Oskar Bolza in Chicago.

Am 1. März 1908 starb im Alter von nur 54 Jahren Heinrich Maschke, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Chicago, seit 1897 Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.



H. Maschke.

Maschke war am 24. Oktober 1853 in Breslau geboren. Sein Vater, der Besitzer der, alten Breslauern wohl bekannten, „Maschkeschen Apotheke" war ein Mann von hervorragender Tüchtigkeit und vielseitigen wissenschaftlichen Interessen, dessen Leistungen auf verschiedenen Gebieten der Naturwissenschaft von der Universität Breslau durch Verleihung des Doctor honoris causa anerkannt wurden. Von ihm scheint Maschke viele seiner charakteristischen Züge geerbt zu haben.

Seinen ersten Unterricht erhielt Maschke auf dem Maria-Magdalenen-Gymnasium seiner Vaterstadt, dem er bis zum Abgang zur Universität angehört hat. Schon sehr frühzeitig machte sich bei ihm, wohl unter dem väterlichen Einfluß, eine große Vorliebe für die Naturwissenschaften bemerkbar; bald zeigte sich jedoch, daß seine eigenste Begabung auf dem Gebiet der Mathematik lag, die er dann auch zu seinem Lebensberuf erwählte, als er im Herbst 1872 das Gymnasium verließ.

Er bezog zuerst für einige Semester die Universität Heidelberg, wo er von Königsberger in die Differential- und Integralrechnung eingeführt wurde, genügte dann seiner Militärpflicht in Breslau und ging 1875 nach Berlin, angezogen durch die glänzenden Namen Weierstraß, Kummer und Kronecker, von denen wohl Kummer

den dauerndsten Einfluß auf seine mathematische Entwicklung gehabt hat. Maschke war Mitglied des Berliner Mathematischen Vereins, an dessen wissenschaftlichen und geselligen Bestrebungen er regen Anteil nahm, in Gemeinschaft mit einer Reihe Gleichstrebender, die sich seitdem einen geachteten Namen in der Wissenschaft erworben haben, wie Knoblauch, v. Mangoldt, W. F. Meyer, Runge, Schoenfließ, Schulze-Berge, Schur, Wiltheiß u. a., und mit denen er zum Teil in näheren freundschaftlichen Verkehr trat. In jener Zeit (1875) lernte auch ich ihn kennen, und der engere Freundschaftsbund, der sich damals zwischen uns beiden und Schulze-Berge, einem Schüler von Helmholtz, knüpfte, ist auch für die äußere Gestaltung seines Lebens von solchem Einfluß geworden, daß ich nicht unterlassen kann, ihn hier zu erwähnen.

Im Jahr 1878 machte Maschke in Berlin sein Staatsexamen mit Physik und Philosophie als Nebenfächern, war dann ein Jahr als Probekandidat unter Schellbachs bewährter Leitung tätig, der seiner hervorragenden pädagogischen Tüchtigkeit die höchste Anerkennung zollte, und nahm dann eine Stelle am Luisenstädtischen Gymnasium in Berlin an. Bald darauf (1880) promovierte er in Göttingen unter Schwarz und Listing mit einer Dissertation „Über ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus Flächen dritter Ordnung“.

Obgleich Maschke großen Erfolg als Lehrer hatte, so fühlte er doch bald, daß die Tätigkeit am Gymnasium ihn nicht dauernd befriedigen konnte. Aus diesem Gefühl heraus nahm er im Jahr 1886 Urlaub zur Fortsetzung seiner Studien, und sein guter Stern führte ihn nach Göttingen, wo er bei Klein die direkte, fruchtbare Anregung fand, die ihm bisher gefehlt hatte. Mit der ihm eigenen geistigen Elastizität und Anpassungsfähigkeit arbeitete er sich in überraschend kurzer Zeit in die Kleinschen Theorien ein, und als er im Herbst 1887 Göttingen verließ, um wieder ans Gymnasium zurückzukehren, da hatte er nicht nur eine umfangreiche und bedeutende Arbeit vollendet, sondern, was wichtiger war, der Anstoß, den er erhalten hatte, war so kräftig und nachhaltig, daß er es fertig brachte, neben einer Berufstätigkeit, die an sich schon die ganze Arbeitskraft eines Mannes in Anspruch zu nehmen pflegt, stetig und angestrengt wissenschaftlich weiterzuarbeiten, wie seine während der Jahre 1888 und 1889 veröffentlichten Arbeiten beweisen.

Die erwähnten Arbeiten beschäftigen sich mit der Theorie[1]) der endlichen Gruppen linearer Substitutionen, die damals im Vordergrund

1) Vgl. für das Folgende den Artikel von Wiman in der Enzyklopädie, I. B. 3f.

des Interesses stand. Nur wenige Jahre vorher hatte Klein seine Vorlesungen über das Ikosaeder veröffentlicht und inzwischen die Verallgemeinerung seiner Theorie der Auflösung der Gleichung fünften Grades gegeben, nach welcher die Auflösung einer Gleichung von gegebener Gruppe als spezieller Fall des Formenproblems einer endlichen linearen Substitutionsgruppe aufgefaßt wird. Daher die Wichtigkeit der Aufgabe: für eine gegebene endliche Gruppe linearer Substitutionen das volle System invarianter Formen zu bestimmen. Für die binären Gruppen war dasselbe von Schwarz, Klein und Gordan gelöst worden, für die ternäre G_{168} von Klein. Es war noch ungelöst für die übrigen ternären Gruppen sowie für die damals bekannten quaternären Gruppen.

Von letzteren hatte Klein die interessantesten teils aus der Liniengeometrie, teils aus der Transformationstheorie der hyperelliptischen Funktionen abgeleitet, nämlich:

1. die Gruppe der sogenannten Borchardtschen Moduln, eine Gruppe von $64 \cdot 720$ Substitutionen, isomorph mit der alternierenden Vertauschungsgruppe von sechs Buchstaben;

2. die Gruppe der Kleinschen hyperelliptischen $Z_{\alpha,\gamma}$-Funktionen für die Transformation dritten Grades, eine Gruppe von 51840 Substitutionen, isomorph mit der Gruppe der Gleichung der 27 Geraden auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung;

3. eine aus der Liniengeometrie abgeleitete Gruppe von $\frac{2 \cdot 7!}{2}$ Substitutionen, isomorph mit der alternierenden Vertauschungsgruppe von sieben Buchstaben.

Hier setzte nun Maschke ein, indem er es unternahm, *für diese drei quaternären Gruppen das volle Formensystem zu bestimmen.* Bedenkt man die hohen Ordnungen der Gruppen, so scheint die Aufgabe zunächst von hoffnungsloser Kompliziertheit. Trotzdem gelang Maschke die vollständige Lösung der Aufgabe, wenigstens für die beiden ersten Gruppen, indem er durch scharfsinnige Vorüberlegungen zunächst die rechnerischen Schwierigkeiten auf ein Minimum reduzierte und sodann den hiernach noch verbleibenden Rest durch einen energischen direkten Angriff bewältigte.

Der Kernpunkt seiner Bestimmung des vollen Formensystems für die Borchardtschen Moduln[1]) (3) besteht in der Auffindung einer Form, Φ, vom vierten Grade, die bei Anwendung einer Untergruppe vom Index 2 sechs Werte annimmt, aus denen dann die invarianten Formen der Hauptgruppe aufgebaut werden. Die Gleichung sechsten

1) Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die am Ende gegebene Liste von Maschkes Arbeiten.

Grades, welcher diese sechs Werte der Funktion Φ genügen, hat dadurch eine besondere Wichtigkeit gewonnen, daß Maschke und Brioschi auf dieselbe eine *Auflösung der allgemeinen Gleichung sechsten Grades mittels hyperelliptischer ϑ-Nullwerte* (4) gegründet haben, analog der Hermiteschen Auflösung der Gleichung fünften Grades mittels elliptischer Modulfunktionen.

Bei der Gruppe der Ordnung 51840 geht Maschke von derjenigen Untergruppe aus, welche die Koordinatenebene $z_0 = 0$ invariant läßt, und welche sich als die ternäre Hessesche Gruppe von $6 \cdot 216$ Substitutionen erweist; indem er zunächst für diese das volle Formensystem aufstellt, löst er zugleich ein wichtiges Problem der Theorie der ternären[1]) Gruppen (5).

In ähnlicher Weise versuchte Maschke, die Aufgabe für die Gruppe von der Ordnung $\frac{2 \cdot 7!}{2}$ zu lösen, indem er zunächst das volle Formensystem für eine darin enthaltene Untergruppe[2]) der Ordnung $2 \cdot 168$ aufstellte (7), die mit der Kleinschen ternären G_{168} isomorph ist. Für die Hauptgruppe selbst ist ihm jedoch die Lösung der Aufgabe nicht gelungen. Doch hat die Beschäftigung mit dieser Gruppe Maschke zu einer interessanten linien-geometrischen Untersuchung (6) über eine *Konfiguration von 140 Geraden im Raum geführt,* welche mit der Gruppe in engem Zusammenhang steht.[3])

Aber je erfolgreicher Maschke in der wissenschaftlichen Arbeit war, um so unbefriedigender wurde ihm seine Tätigkeit an der Schule. Und doch waren keine Aussichten für ihn vorhanden, die fast unüberwindlichen Schranken zu übersteigen, welche das Gymnasium von der Universität trennen. So konnte nur ein radikaler Schritt die Befreiung

1) Noch für eine andere ternäre Gruppe oder vielmehr Klasse von Gruppen hat Maschke später das volle Formensystem bestimmt (9), nämlich für diejenigen „monomialen" Gruppen, welche durch zwei Substitionen der Form

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = z_3, \quad z_3' = z_1,$$
$$z_1' = a_1 z_1, \; z_2' = a_2 z_2, \; z_3' = a_3 z_3$$

erzeugt werden.

2) Im Jahr 1888, publiziert erst mehrere Jahre später in den Chicago Congress Papers.

3) Als letzter Ausläufer dieser Untersuchungen ist eine mehrere Jahre später verfaßte Arbeit (12) über Systeme von sechs Punkten, welche auf drei Arten in Involution liegen, zu betrachten. Hier werden solche Punktsysteme und insbesondere auch die von Maschke als „metharmonisch" bezeichneten Sextupel, welche in der obenerwähnten Konfiguration auftreten, in der komplexen Ebene untersucht.

von einer Beschäftigung bringen, die er mehr und mehr als eine unerträgliche Last empfand. Und dieser Schritt war bereits von anderer Seite her vorbereitet.

Gleichzeitig mit Maschke wirkte am Luisenstädtischen Gymnasium sein bereits obenerwähnter Freund Schulze-Berge, und auch er fand keine Befriedigung in der Schultätigkeit. Aber von rastloserem Temperament als Maschke, hatte er schon früher die Fesseln gesprengt, und war 1887 nach den Vereinigten Staaten ausgewandert, wo er bald in Edisons Laboratorium eine seinen Neigungen entsprechende Stellung gefunden hatte. Sein Erfolg und sein kräftiger Zuspruch veranlaßten mich, ein Jahr später zu folgen, und nunmehr vereinigten wir unsere Bemühungen, um Maschke nachzuziehen. So entschloß sich denn Maschke im Sommer 1889, unserem Beispiel zu folgen.

Da aber die Aussichten, sofort eine Universitätsstellung zu finden, zu unsicher schienen, so beschloß er, sich zuvor in die Elektrotechnik einzuarbeiten, um seinem Unternehmen eine sichere Basis zu geben. Dementsprechend benutzte er während seines letzten Jahres am Gymnasium seine freien Stunden zu elektrotechnischen Studien am Polytechnikum in Charlottenburg. Im Juli 1890 kündigte er dann seine Stelle am Gymnasium, arbeitete mehrere Monate praktisch als Monteur in der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft und setzte dann während des Wintersemesters 1890/91 seine elektrotechnischen Studien in Darmstadt unter Kittler fort.

So theoretisch und praktisch vorbereitet, landete er am 1. April 1891 in New York. Schon wenige Wochen nachher hatte er eine ihm zusagende Stelle in der Weston Electric Instrument Company in Newark, N. J., gefunden. Ein Jahr später erhielt er einen Ruf als „Assistant Professor" an die neu gegründete „University of Chicago".

Hier endlich, in der Fremde, hatte er gefunden, was ihm die Heimat versagt hatte, ein Arbeitsfeld, das seinen Neigungen und Fähigkeiten entsprach, und in dem er seine Kräfte frei entfalten konnte.

Mit Lust und Liebe, und mit größtem Erfolg, widmete er sich seiner neuen Tätigkeit, die ihm in den ersten Monaten der fremden Sprache halber viel Arbeit machte. Sein angeborenes pädagogisches Talent, unterstützt durch seine langjährige Erfahrung am Gymnasium, seine wissenschaftliche Tüchtigkeit, ein stark ausgeprägter ästhetischer Sinn, der seinen Vorlesungen einen besonderen Reiz verlieh, zusammen mit seiner kraftvollen und zugleich wohlwollenden Persönlichkeit, alles vereinigte sich, um ihn zu einem idealen Universitätslehrer zu machen.[1])

1) Als Ergänzung zu dem hier Gesagten, möchte ich auf die schöne, ausführliche Würdigung Maschkes als Lehrer von Professor H. E. Slaught, einem

Seine Vorlesungen erstreckten sich über die verschiedensten Gebiete der Mathematik, obgleich er seiner mehr anschauungsmäßigen Begabung entsprechend in erster Linie Vertreter der geometrischen Disziplinen war. Synthetische und analytische Geometrie, höhere algebraische Kurven und Flächen, Differentialgeometrie; Differential- und Integralrechnung, Funktionstheorie, elliptische Funktionen, lineare Differentialgleichungen; Theorie der Gleichungen, Invariantentheorie, Gruppentheorie; Mechanik, Potentialtheorie, Elektrizitätstheorie — bilden nur eine teilweise Liste der Gegenstände, über die er während seiner fast sechzehnjährigen Wirksamkeit an der Universität Chicago vorgetragen hat, zuerst als außerordentlicher Professor („Assistant-" und „Associate"-Professor), später als ordentlicher Professor.

Durch den zeitweiligen Übergang zur Elektrotechnik und das Einleben in die neuen Verhältnisse erfuhr Maschkes Produktivität eine Unterbrechung von mehreren Jahren. Doch finden wir ihn 1894 schon wieder bei der Arbeit (**9**), und aus dem Jahr 1895 datiert seine schöne Abhandlung *Über die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayleysche Farbendiagramme* (**11**), in welcher er die Cayleysche Methode auf die Rotationsgruppen der regelmäßigen Körper im drei- und vierdimensionalen Raum anwendet, mit überraschend einfachen und eleganten Resultaten.

In den nächsten Jahren wandte sich Maschke wieder der Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen zu; seine Arbeiten haben jedoch einen wesentlich anderen Charakter als seine früheren Untersuchungen auf demselben Gebiet: von dem Studium spezieller Gruppen schreitet er zur Aufstellung allgemeiner Sätze über endliche Gruppen linearer Substitutionen vor, von denen einige einen nicht unerheblichen Einfluß auf die Weiterentwicklung der Theorie gehabt haben.

Der erste dieser Sätze (**14**) sagt aus, daß — abgesehen von einem einzigen Ausnahmefall — *jede endliche Gruppe linearer Substitutionen durch Einführung neuer Variabeln so transformiert werden kann, daß in allen Substitutionen der Gruppe sämtliche Koeffizienten zyklotomisch sind*, d. h. rational durch Einheitswurzeln ausdrückbar.

Noch größere Wichtigkeit hat wohl der folgende Satz von Maschke (**14**, **16**) erlangt, zu dem er im Verlauf des Beweises seines zyklotomischen Satzes geführt wurde: *Jede endliche lineare Substitutionsgruppe, in welcher einige durchgehends verschwindende Koeffizienten vor-*

seiner früheren Schüler, verweisen. „*Professor Heinrich Maschke, The Teacher*", The University Record of the University of Chicago, April 1908, p. 155.

kommen, ist intransitiv, oder wie sich der wesentliche Teil des Satzes auch in der neuerdings üblich gewordenen Terminologie kürzer ausdrücken läßt: *Jede endliche lineare Substitutionsgruppe ist vollständig reduzibel.*

Einen würdigen Abschluß finden Maschkes Arbeiten über lineare Substitutionsgruppen mit der umfangreichen Abhandlung (**15**): „*Bestimmung aller ternären und quaternären Kollineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind*", in der das im Titel genannte schöne Problem vollständig und in sehr eleganter Weise gelöst wird.

Während des Winters 1899/1900, bei Gelegenheit einer Vorlesung über Differentialgeometrie, entdeckte Maschke eine *symbolische Methode für die Behandlung quadratischer Differentialausdrücke*, und seine wissenschaftliche Tätigkeit während der letzten Jahre seines Lebens war einer eingehenden und systematischen Ausbildung dieser Methode gewidmet (**18**, **21**).

Maschke geht von der Bemerkung aus, daß, wenn $F^1, F^2, \dots F^n$ n Invarianten[1]) der quadratischen Differentialform

$$A = \Sigma a_{i\varkappa} dx_i dx_\varkappa,$$
$$(a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i};\quad i, \varkappa = 1, 2, \dots, n)$$

sind, dann auch der Ausdruck

$$(F^1, F^2, \dots, F^n) = |a_{i\varkappa}|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(F^1, F^2, \dots, F^n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

eine Invariante von A ist. Mit Hilfe dieses Satzes ist es leicht, zunächst Invarianten für diejenigen *speziellen* Differentialformen aufzustellen, welche Quadrate vollständiger Differentiale sind:

$$\Sigma a_{i\varkappa} dx_i dx_\varkappa = (df)^2 = (f_1 dx_1 + \cdots f_n dx_n)^2,$$
$$a_{i\varkappa} = f_i f_\varkappa, \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

und für Systeme solcher Formen:

$$A^1 = (df^1)^2, \quad A^2 = (df^2)^2; \dots;$$

zum Beispiel[2])

$$(f^1, f^2, \dots, f^n)^2, \quad (u, f^2, \dots, f^n)^2, \quad (u, f^2, \dots, f^n)(v, f^2, \dots, f^n),$$

usw., wo u, v willkürliche Funktionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind.

---

1) D. h. sowohl Differentialparameter als eigentliche Invarianten.

2) Maschke gebraucht die kondensiertere Bezeichnung

$$(f)^2, \quad (uf)^2, \quad (uf)(vf).$$

Aber jede solche Invariante ist zugleich eine Invariante für die *allgemeine* Differentialform A, vorausgesetzt, daß sie homogen und vom zweiten Grade in den Größen f_i^1, in den Größen f_i^2, usw. ist. So kann der Ausdruck $(df)^2$ als Symbol für die allgemeine Differentialform A gebraucht werden, ganz ähnlich wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie a_x^n als Symbol für die allgemeine Binärform n-ter Ordnung, und $(df^1)^2$, $(df^2)^2 \ldots$ als äquivalente Symbole für A, wenn man die Formen A^1, A^2, ... zusammenfallen läßt. So haben z. B. die obigen Invarianten, als symbolische Ausdrücke betrachtet, eine reale Bedeutung für die allgemeine Differentialform A; sie sind der Reihe nach gleich $n!$, gleich dem ersten Differentialparameter $\Delta_1 u$, gleich dem Zwischenparameter $\nabla(u, v)$.

Die Bemerkung, daß das totale Differential

$$dF = F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n \quad (= F_x)$$

einer Invariante F eine Kovariante von A ist, führt dann zu symbolischen Ausdrücken für Kovarianten. So stellt z. B. der symbolische Ausdruck

$$(f^1, f^2, \cdots, f^n)\,(u, f^2, \cdots, f^n)_x f_x^1$$

eine quadratische Kovariante dar.

Ein symbolischer Ausdruck, welcher höhere Ableitungen der symbolischen Funktion f enthält, hat nicht immer eine reale Bedeutung, sondern nur, wenn diese Ableitungen in ganz bestimmten Kombinationen vorkommen. Die einfachste derartige Kombination ist $f_i f_{kl}$, welche dem Christoffelschen Drei-Indexsymbol $\left[\begin{smallmatrix} kl \\ i \end{smallmatrix}\right]$ gleich ist. Hiernach hat z. B. der symbolische Ausdruck

$$((u, f^2, \cdots, f^n), f^2, \cdots, f^n)$$

eine reale Bedeutung; er ist gleich $(n-1)!$ mal dem zweiten Differentialparameter $\Delta_2 u$.

Weiter entwickelt Maschke einfache symbolische Ausdrücke für das Christoffelsche Drei-Indexsymbol zweiter Art $\left\{\begin{smallmatrix} kl \\ i \end{smallmatrix}\right\}$, das Vier-Indexsymbol $(ikrs)$, die quadrilineare Kovariante G_4 usw.

Die ungemeine Fruchtbarkeit der Maschkeschen Symbolik ist am besten aus den Anwendungen zu ersehen, die auf die gewöhnliche Differentialgeometrie von A. W. Smith in seiner Dissertation „The symbolic treatment of differential geometry“[1]), und auf verschiedene Pro-

1) Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 7. Einen interessanten Zusammenhang zwischen der Maschkeschen Symbolik und der Vector Analysis entwickelt L. Ingold in seiner demnächst erscheinenden Dissertation „Vector interpretation of symbolic differential parameters“.

bleme der Differentialgeometrie im n-dimensionalen Raum von Maschke selbst in seinen beiden letzten Arbeiten (23) *„Differential parameters of the first order“* und (24) *„The Kronecker-Gaussian curvature of hyperspace“* gemacht worden sind.

Weitere Anwendungen werden ohne Zweifel folgen, und man darf wohl erwarten, daß Maschkes Symbolik in der Theorie der Differentialformen eine ähnliche Rolle spielen wird wie die gewöhnliche Symbolik von Aronhold und Clebsch in der Theorie der algebraischen Formen.

Zu dem kräftigen Aufschwung, welchen die Mathematik in den letzten 20 Jahren in den Vereinigten Staaten genommen hat, hat Maschke, an seinem Teil, nicht unerheblich beigetragen durch seine umfassende Lehrtätigkeit an der Universität Chicago, ebenso wie durch seine wissenschaftlichen Arbeiten und seine Anteilnahme an den Bestrebungen der American Mathematical Society, deren Vizepräsident er im Jahr 1907 gewesen ist.

Sonst ist aus seinem äußeren Lebensgang seit seiner Berufung nach Chicago kaum etwas Bemerkenswertes zu berichten; sein Leben ist seitdem ruhig und glücklich dahingeflossen. Mit einem kräftigen, gesunden Körper ausgerüstet, der kaum je Krankheit gekannt hat, mit reichen Gaben des Geistes nach den verschiedensten Richtungen hin ausgestattet, eine in sich abgeschlossene, harmonische Persönlichkeit von schönstem innerem Gleichgewicht, von herzgewinnender Liebenswürdigkeit, mit sich und der Welt im Frieden, trug er in der Tat alle Vorbedingungen eines dauernden Glückes in sich, das sich nunmehr ungehemmt entfalten konnte, nachdem er eine ihn voll befriedigende Berufstätigkeit gefunden hatte, um so mehr, als er seit 1891 in ungetrübt glücklicher Ehe lebte.

Mit erschütternder Plötzlichkeit ist in dieses sonnige Leben die letzte Katastrophe hereingebrochen. Gegen Ende 1907 zeigten sich die ersten Symptome eines inneren Leidens, denen er jedoch keinerlei ernste Bedeutung beilegte, da er sich vollkommen wohl und gesund fühlte. Da ergab eine in der letzten Woche des Februar 1908 angestellte Untersuchung die Notwendigkeit einer sofortigen radikalen Operation, deren Folgen er nach wenig Tagen am 1. März erlag.

Die ungeheuere Teilnahme, die sein plötzlicher Tod im Kreise seiner Freunde, seiner Kollegen und seiner Schüler hervorgerufen hat, legt beredtes Zeugnis ab für die außerordentliche Liebe, Hochschätzung und Verehrung, die sich Maschke auch in seiner neuen Heimat zu erringen gewußt hat.

Verzeichnis der wissenschaftlichen Abhandlungen von Heinrich Maschke.[1]

1. Über ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus Flächen dritter Ordnung. Inauguraldissertation, Göttingen (1880).
2. Ein akustischer Apparat zu Vorlesungszwecken. Annalen der Physik u. Chemie, Neue Folge, Bd. XIII, S. 204—206 (Februar 1881).
3. Über die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardtschen Moduln. Göttinger Nachrichten 1887, S. 421—424, und Mathematische Annalen, Bd. XXX, S. 496—515 (Juni 1887).
4. La risoluzione della equazione di sesto grado. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (2), Bd. IV, S. 181—182 (Februar 1888).
5. Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Subsitutionen, Göttinger Nachrichten 1888, S. 78—86, und Mathematische Annalen, Bd. XXXIII, S. 317—344 (Juni 1888).
6. Über eine merkwürdige Konfiguration gerader Linien im Raume. Göttinger Nachrichten 1889, S. 384—388, und Mathematische Annalen, Bd. XXXVI, S. 190—215 (Juli 1889).
7. The invariants of a group of 2.168 linear quaternary substitutions. Chicago Mathematical Congress Papers, S. 175—186 (1893).
8. Rezension von: Harkness and Morley, A Treatise on the Theory of Functions. Bulletin of the New York Mathematical Society, Bd. III, p. 155—167 (März 1894).
9. On ternary substitution-groups of finite order which leave a triangle unchanged. American Journal of Mathematics, Bd. XVII, S. 168—184 (Dezember 1894).
10. The asymptotic lines on a circular ring. Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. II, S. 19—21 (August 1895).
11. The representation of finite groups, especially of the rotation-groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayleys' color-diagrams. Göttinger Nachrichten, 1896, S. 1—5, und American Journal of Mathematics, Bd. XVIII. S. 156—188 (November 1895).
12. On systems of six points lying in three ways in involution. Annals of Mathematics, Bd. X, S. 22—34 (Dezember 1895).
13. Die Reduktion linearer homogener Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form. Mathematische Annalen, Bd. L, S. 220—224 (März 1897).
14. Über den arithmetischen Charakter der Koeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. Mathematische Annalen, Bd. L, S. 492 bis 498 (November 1887).
15. Bestimmung aller ternären und quaternären Substitutionsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungen holoedrisch isomorph sind. Mathematische Annalen, Bd. LI, S. 253—298 (November 1897).
16. Beweis des Satzes, daß diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehende Nullen vorkommen, intransitiv sind. Mathematische Annalen, Bd. LII, S. 363—368 (Dezember 1898).
17. Note on the unilateral surface of Möbius. Transactions of the American Mathematical Society, Bd. I, S. 39 (November 1899).

---

1) Die beigefügten Daten geben den Zeitpunkt der Fertigstellung der betreffenden Arbeit an.

18. A new method of determining the differential parameters and invariants of quadratic differential quantics. Transactions of the American Mathematical Society, Bd. I, S. 197—204 (April 1900).
19. On superosculating quadric surfaces. Transactions of the American Mathematical Society, Bd. III, S. 482—484 (September 1902).
20. Some modern methods and principles of geometry. The American Mathematical Monthly, Bd. IX, S. 214—219 (Oktober 1902).
21. A symbolic treatment of the theory of invariants of quadratic differential quantics of n variables. The Decennial Publications of the University of Chicago, Bd. IX, S. 127—138, und Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IV, S. 441—469 (Juni 1903).
22. On present problems of algebra and analysis, Congress of arts and science, Universal Exposition, St. Louis, 1904, Bd. I, S. 518.
23. Differential parameters of the first order. Transactions of the American Mathematical Society, Bd VI, S. 69—80 (September 1905).
24. The Kronecker-Gaussian curvature of hyperspace. Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VI, S. 81—93 (September 1905).
25. A geometrical problem connected with the continuation of a power-series. Annals of Mathematics (2), Bd. VII, S. 61—64 (Oktober 1905).

Adolf Mayer †.

Von H. Liebmann in Leipzig.

In Leipzig, der alten Handels- und Meßstadt, sind manche jetzt noch blühende kaufmännische Patriziergeschlechter seit vielen Generationen ansässig. Wohltätige und Kunstsinn kündigende Stiftungen, die nicht immer den Namen der Spender tragen, zeigen ihren Sinn für Gemeinwohl, einige Straßen sind nach ihnen benannt, Familienbegräbnisse im malerischen alten und im blumengeschmückten, rosenreichen neuen Johannisfriedhof bergen ihre Toten. In der Geschichte Leipzigs haben sie sich verewigt, wir finden sie z. B. genannt in Darstellungen aus der Zeit nach 1806, als es galt, vom Sieger milde Bedingungen und Schutz für Leipzigs Bürger zu erlangen, und wieder nach der Völkerschlacht, als tatkräftige Hilfe so notwendig war.

Einer solchen Familie entstammt Christian Gustav Adolf Mayer, geboren am 15. Februar 1839 in Leipzig, gestorben am 11. April 1908 in Bozen. Er widmete sich, nachdem er das Thomasgymnasium absolviert hatte (Herbst 1857), im Gegensatze zu den Traditionen der Familie, nicht dem kaufmännischen Berufe, sondern studierte Mathematik und Naturwissenschaften zuerst in Heidelberg (zwei Semester), dann in Göttingen (Herbst 1858 bis Herbst 1859) im besonderen bei Stern, dann wieder in Heidelberg. Hier fesselten ihn die Vorlesungen von

Otto Hesse, des Meisters eleganter Darstellungen. Im Sommersemester 1861 war er in Leipzig, dann wieder zwei Semester in Heidelberg, wo er auch promovierte. Das Diplom ist vom 14. Dezember 1861 datiert.

Hochburg für das Studium exakter Wissenschaften war damals Königsberg; dorthin wandte sich auch Adolf Mayer, die lichtvollen und immer neue Ergebnisse bietenden, neue Wege weisenden Vorträge Franz Neumanns zu hören, und in Richelots, des Schülers Jacobis, zuweilen recht schwierigen und nicht gerade durchsichtigen Vorlesungen und Übungen seine Kenntnisse zu erweitern. Ihm verdankte er die Anregung, sich mit der Variationsrechnung zu beschäftigen, ein Gebiet, das er zeitlebens mit bestem Erfolge bearbeitet hat. — Der Kreis junger Gelehrter in Königsberg, dem z. B. auch Heinrich Weber angehörte, hat wohl viele Stunden darauf verwendet, sich durch Gedankenaustausch in seinem Streben zu fördern: so findet sich in Mayers Nachlaß — neben sehr sorgfältigen Ausarbeitungen einiger Vorlesungen von Otto Hesse — ein Heft: Franz Neumann, Kapillarität, nach Webers Nachschrift.



Prof. Dr. Adolph Mayer

In seiner Vaterstadt habilitierte sich dann Adolf Mayer im Dezember 1866 mit der Arbeit: „Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale“ (Nr. 1 des Verzeichnisses). Seine Vorlesungen betrafen neben einigen elementaren Gegenständen (Algebra und Determinanten, Differential- und Integralrechnung) noch Differentialgleichungen (gewöhnliche und partielle), Variationsrechnung und analytische Mechanik. Vor allem war die „Theorie der dynamischen Differentialgleichungen“ (Mechanik II) ein Muster klaren logischen Aufbaues. Das ganze Gebäude wurde auf dem Gaußschen Prinzipe des kleinsten Zwanges errichtet. Wer die Vorlesungen gehört hat, wird sich daran erinnern, wie hier jedes Wort, jeder Gedanke wohlgesetzt an seiner Stelle stand; kein Wort des ruhigen und sicheren Vortrags durfte ver-

loren werden. Da machte dann wohl die Ausarbeitung manche Mühe und schwoll zu großem Umfange an. Entsprechend legte Mayer in den Übungen, denen er viel Zeit und Kraft widmete, großen Wert darauf, daß die Aufgaben wirklich mit Hilfe der aufgestellten oder abgeleiteten Prinzipien (z. B. Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Prinzip des letzten Multiplikators) gelöst wurden, nicht mit Hilfe *ad hoc* erdachter Kunstgriffe, die ja oft auch Nebengriffe waren oder nur auf Umwegen zum Ziele führten. Auf diesen Weg wußte er seine Schüler auch mit freundlicher Geduld zu führen.

Im großen Kriegsjahre hat er als freiwilliger Krankenpfleger sich dem Dienste des Vaterlandes gewidmet.

Die einzelnen Stufen der akademischen Laufbahn erreichte er in Leipzig. Er wurde 1872 außerordentlicher Professor, 1881 ordentlicher Honorarprofessor und Mitglied der Prüfungskommission für die Kandidaten des höheren Schulamts, 1882 Mitdirektor des von Klein gegründeten mathematischen Seminars, 1890 Ordinarius.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und die Leopoldinisch-Carolinische Akademie ernannten ihn zum Mitgliede, auch wurde er Korrespondent der Göttinger und der Turiner Akademie.

Am 1. April 1900 beurlaubte ihn das Kultusministerium auf sein Ansuchen, mit dem Vorbehalt, nach Belieben weitere Vorlesungen zu halten; sehr bald nahm er auch die geliebte Lehrtätigkeit in vollem Umfange wieder auf.

Aus dem Nachrufe von der Mühlls (Mathematische Annalen Bd. 63), der seiner als Mitredakteur gedenkt (1873—1902), sei es erlaubt, folgende Stelle anzuführen: „Seine Zuhörer hat er gefördert, wie er konnte, sie zu weiterem Forschen angeregt und ihnen auch für auswärtige Studien den Weg eröffnet. Seinen Kollegen war er der treueste Freund; für die Vertretung der Mathematik an der Leipziger Universität hat er in der uneigennützigsten Weise gewirkt: und wenn es galt, eine auswärtige Kraft zu gewinnen, so war ihm keine Mühe und kein persönliches Opfer zu groß. Mit der vollendeten Liebenswürdigkeit, die ihm eigen war, hat er die Herberufenen in seinem Hause aufgenommen, sie in die Leipziger Kreise eingeführt und alles aufgeboten, ihnen die neue Heimat lieb zu machen. Er fühlte sich reich belohnt, wenn es gelang, den neuen Kollegen ganz für Leipzig zu gewinnen; er hat auch in schweren Tagen treulich beigestanden."

Sein gastliches Heim in Leipzig und das behagliche Landhaus in Abtnaundorf am alten Park, wo er im Sommersemester wohnte, ist seinen Freunden und Gästen in angenehmster Erinnerung, ebenso das gemütliche „Sachsenhaus" in Oberstdorf im Allgäu, der alte Familien-

besitz, in dem er viele Sommerferien mit den Seinen Erholung suchte.

Adolf Mayer war in früheren Jahren ein eifriger Turner und Schwimmer, machte auch den einstündigen Weg von der Sommerresidenz zum Kolleg mit Vorliebe zu Fuß. Seit einigen Jahren war seine Gesundheit nicht mehr so fest; er klagte über Heiserkeit und suchte vergeblich Erholung an der See, ohne sich doch in seinem Pflichteifer durch die Beschwerden jemals beirren zu lassen. Im Wintersemester 1907/1908 mußte er seine Vorlesung über Variationsrechnung abbrechen; stechende Schmerzen in der Brust, namentlich bei Nacht — es war wahrscheinlich schleichende Lungenentzündung — hatten seine Kraft erschöpft. Und doch hofften wir beim Abschied bestimmt, ihn gestärkt und erfrischt wiederzusehen. Der Aufenthalt in Bozen ließ sich auch zunächst günstig an. Gattin und Tochter, die ihn begleitet hatten, sahen mit Freuden den Fortschritt, und er selbst berichtete brieflich voller Zuversicht. Dann aber trat ein rascher Kräfteverfall ein, und er entschlief sanft und ohne Schmerzen am 11. April dieses Jahres in Bozen.

Während der akademischen Trauerfeier für den Spezialkollegen und Fakultätssenior Wilhelm Scheibner wurde in Leipzig die neue Trauerbotschaft bekannt.

Am Gründonnerstag wurde er bestattet; in der Feier hatten zwei Spezialkollegen im Namen der Fakultät und der Gesellschaft der Wissenschaften Kränze am Sarge niedergelegt und seiner Verdienste gedacht. Der Universitätsprediger gab ein sprechendes Bild des edeln und reinen Menschen, der nie nach Ruhm, Würden und Ehre strebte, der mit aller Freundlichkeit und Herzlichkeit eine große, keusche Zurückhaltung verband, und dessen inneres verborgenes Leben der Ewigkeit zugekehrt war. *Bene vixit qui bene latuit.*

Unter den Trauernden waren außer der verwaisten Familie, den Freunden und der Universität auch viele, die er mit Wohltaten bedacht hatte. Dabei hatte ihn immer der Grundsatz geleitet, daß die linke Hand nicht wissen soll, was die rechte tut. Selbst seine Familie wußte nicht von allen Spenden, die Hilfsbedürftige ihm verdankten.

Adolf Mayers Denkrichtung war durchaus analytisch, er war indirekt Schüler von Jacobi. Seine Arbeiten umfassen das Gebiet der *Variationsrechnung*, vielfach in Verbindung mit der *analytischen Mechanik*, vor allem auch die *Differentialgleichungen*. Er war einer der deutschen Mathematiker, welche die Arbeiten von Lie, dem er auch persönlich nahe stand, als großen Fortschritt begrüßten (vgl. F. Engel, Zur Er-

innerung an Sophus Lie, Berichte der K. S. G. d. W. zu Leipzig, Bd. 51 [1899], S. XI—LXI). Eine eingehende Würdigung der Verdienste von Adolf Mayer wird später, von berufenster Seite abgefaßt, ebenfalls in den Leipziger Berichten und in den Mathematischen Annalen erscheinen. Hier muß, auch des vorgeschriebenen Umfangs halber, eine kurze Charakteristik genügen, die sich auf Hinweise beschränkt. Wer die Leistungen Mayers im Gebiete der Variationsrechnung kennen lernen will, findet in Knesers Artikel „Variationsrechnung“ (Math. Enzyklopädie II, A, 8, S. 571—625) eingehende Belehrung und wird daraus ersehen, daß seine Arbeiten nicht nur den formalen Teil (Äquivalenzfragen; Vertauschung von Nebenbedingungen und Extremforderung, d. h. Reziprozitätsgesetz, Gestalt der zweiten Variation usw.) gefördert haben, daß er vielmehr auch den kritischen Fragen nicht fremd gegenüberstand.

Trotz eines gewissen konservativen Zuges in seiner ganzen Persönlickkeit hat er immer mit größtem Eifer die Resultate anderer Forscher in sich aufgenommen, z. B. die von Scheeffer und Hilbert; dies zeigen auch sorgfältige Exzerpte, die eine Reihe wohl disponierter Hefte in seiner zierlichen Handschrift füllen. Er klagte sehr darüber daß die Ergebnisse und Methoden von Weierstraß solange fast unzugänglich waren, z. B. wurde ihm das Manuskript einer Nachschrift von Weierstraß' Vorlesung nur für vierundzwanzig Stunden zur Verfügung gestellt.

Von den Arbeiten zur *Mechanik* wollen wir nur Nr. 49, 50 und 52 des Verzeichnisses erwähnen. Sie enthalten z. B. Betrachtungen über den Satz von Kelvin, daß bei Stößen der Verlust der lebendigen Kraft ein Minimum ist, nebst weiteren Untersuchungen über den Ansatz der Differentialgleichungen in schwierigen Fällen, im Anschluß an die Untersuchungen von Ostragradskij.

In seinen Untersuchungen über Differentialgleichungen begegnete er sich mit Lie; die Reduktion vollständiger Systeme auf Jacobische Systeme, desgleichen die Integration der Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist in Lehrbücher, besonders in ausländische (z. B. Goursat und Forsyth) aufgenommen. Denjenigen modernen Untersuchungen, welche vor allem darauf zielen, den analytischen Charakter der Lösungen zu diskutieren, sind Mayers Fragestellungen allerdings nicht verwandt. Es handelt sich vielmehr um die Zerlegung eines Problems in Teilprobleme möglichst niedriger Ordnung, womöglich Quadraturen, wobei auf die Durchführung der erforderlichen Eliminationen nicht immer eingegangen wird; übrigens ist die Seite des Gebietes auch später noch, von Stäckel und anderen, weiter ausgebildet worden.

Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten von Adolf Mayer.

I. Einzelne Veröffentlichungen.

1. Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale. (Habilitationsschrift). 90 S. 8°. Leipzig 1866.
2. Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion (Antrittsvorlesung). 37 S. 8°. Leipzig 1877. (Ins Italienische übersetzt in Boncampagnis Bull. bibl. stor. sc. mat. 1878.)
3. Gleichgewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichgewichts (Universitätsprogramm). 21 S. 4°. Leipzig 1899.

II. Veröffentlichungen in Zeitschriften.

Journal für die reine und angewandte Mathematik.

4. Über die Kriterien des Maximums und Minimums einfacher Integrale. Bd. 69 (1868), S. 238—263 (vgl. Nr. 1).

Mathematische Annalen.

5. Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem mechanischen Prinzipe der kleinsten Wirkung entspricht. Bd. 2 (1870), S. 143—159.
6. Über die Jacobi-Hamiltonsche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bd. 3 (1871), S. 435—452.
7. Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Funktion. Bd. 4 (1871), S. 88—99.
8. Unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Bd. 5 (1871), S. 448—470. (Ins Französische übersetzt: Bulletin des sciences mathématiques 11, 1876, p. 87—96, 125—144.)
9. Die Liesche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bd. 6 (1873), S. 162—192 (vgl. Nr. 24).
10. Nachtrag. Direkte Ableitung des Lieschen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy. Bd. 6 (1873), S. 192—196.
11. Direkte Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. Bd. 8 (1875), S. 304—312 (vgl. Nr. 26).
12. Zusatz zu einer Lieschen Abhandlung: Über eine Erweiterung der Lieschen Integrationsmethode. Bd. 8 (1875), S. 313—318.
13. Über die Weilersche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bd. 9 (1876), S. 347—370.
14. Über den Multiplikator eines Jacobischen Systems. Bd. 12 (1877), S. 132—142.
15. (Abdruck von Nr. 27 mit dem Zusatz in der Überschrift: welcher sich aus dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt.) Bd. 13 (1878), S. 20—34.
16. (Abdruck von Nr. 28.) Bd. 13 (1878), S. 53—68.
17. Über die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwertung durch die Methoden von Lie. Bd. 17 (1880), S. 332—354.
18. Zur Pfaffschen Lösung des Pfaffschen Problems. Bd. 17 (1880), S. 523—530.
19. Über die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst. Bd. 22 (1883), S. 365—392.

20. (Abdruck von Nr. 33.) Bd. 26 (1886), S. 74—82.
21. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln. Bd. 37 (1890), S. 399—403.

III. Aus periodischen Akademieschriften.

Göttinger Nachrichten.

22. Zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen (aus einem Schreiben von A. Clebsch). 1872, S. 315—320 (vgl. Nr. 7).
23. Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (aus einem Schreiben von A. Clebsch). 1872, S. 405—420.
24. Die Liesche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. 1872, S. 467—472 (vgl. Nr. 9).
25. Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. 1873, S. 299—310.
26. Über die Lieschen Berührungstransformationen. 1874, S. 317—333 (vgl. Nr. 11).

Berichte der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse.

27. Über den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte. Bd. 29 (1877) S. 86—100 (vgl. Nr. 11).
28. Die Kriterien des Maximums und des Minimums der einfachen Integrale in dem isoperimetrischen Problem. Bd. 29 (1877), S. 114—132 (vgl. Nr. 12).
29. Über das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer einzigen unabhängigen Variabeln. Bd. 30 (1878), S. 16—32.
30. Über die relative Bewegung eines Systems materieller Punkte um den Schwerpunkt. Bd. 31 (1879), S. 34—44.
31. Über die kürzesten und weitesten Abstände eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Oberfläche und über die dritte Variation in den Problemen des gewöhnlichen Maximums und Minimums. Bd. 33 (1881), S. 28—51.
32. Zur Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale bei variablen Grenzwerten. Bd. 36 (1884), S. 99—127.
33. Begründung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung. Bd. 37 (1885), S. 7—14 (vgl. Nr. 20).
34. Die beiden allgemeinsten Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Prinzips der kleinsten Aktion in der Dynamik entsprechen. Bd. 38 (1886), S. 343—355.
35. Über ein Bewegungsproblem. Bd. 39 (1887), S. 123—132.
36. Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums. Bd. 41 (1889), S. 122—144.
37. Über die Maxima und Minima impliziter Funktionen und die Reziprozitätsgesetze in der Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums. Bd. 41 (1889), S. 308—319.
38. Allgemeine integrierbare Formen von Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Kriterien. Bd. 42 (1890), S. 491—524.
39. Über die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Bd. 43 (1891), S. 448—458.
40. Zur Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von n Variabeln. Bd. 44 (1892), S. 54—85.

41. Über die unfreie Bewegung eines materiellen Punktes unter Berücksichtigung der Reibung. Bd. 45 (1893), S. 379—394.

42. Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene. Bd. 45 (1893), S. 697—757.

43. Die Lagrangesche Multiplikatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln. Bd. 47 (1895), S. 129—144.

44. Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerten. Bd. 48 (1906), S. 436—465.

45. Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials. Bd. 48 (1896), S. 519—529.

46. Über die lebendige Kraft der durch plötzliche Stöße in einem System materieller Punkte erzeugten Geschwindigkeitsänderungen. Bd. 50 (1898), S. 246—253.

47. Zur Theorie der Bewegung von Punktsystemen unter dem Einflusse von Potentialkräften. Bd. 51 (1899), S. 1—28.

48. Nachtrag (zu Nr. 46). Bd. 51 (1899), S. 215—218.

49. Über die Aufstellung der Differentialgleichungen für reibungslose Punktsysteme, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind. Bd. 51 (1899), S. 224—244.

50. Zur Regulierung der Stöße in reibungslosen Punktsystemen, die dem Zwange von Bedingungsungleichungen unterliegen. Bd. 51 (1899), S. 245—264.

51. Symmetrische Lösung der Aufgabe: die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen. Bd. 54 (1902), S. 53—62.

52. Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung. Bd. 54 (1902), S. 208—243.

53. Nachtrag (zu Nr. 52). Bd. 54 (1902), S. 327—331.

54. Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. Bd. 55 (1903), S. 131—145.

55. Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. Zweite Mitteilung. Bd. 57 (1905), S. 49—67.

56. Nachträgliche Bemerkung zu meiner zweiten Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. Bd. 57 (1905), S. 313—314.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Theorie der unikursalen Plankurven vierter und dritter Ordnung in synthetischer Behandlung.

Von

Dr. Wilhelm Binder,

vorm. Professor an der Landes-Oberrealschule zu Wiener-Neustadt.

Mit 65 Figuren im Text und auf 2 Tafeln.

[XI u. 397 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Der Inhalt des Buches umfaßt das gesamte Gebiet der unikursalen Plankurven vierter und dritter Ordnung, wobei die letzteren zum großen Teile in ihrer Erzeugungsweise — die ausschließlich auf dem projektiven Standpunkt basiert ist — als Modifikationen und Degenerierte der ersteren aufgefaßt sind. Ein einleitender Teil bespricht neben den wichtigsten Eigenschaften allgemeiner Kurven auch das Notwendigste über Kegelschnitts-Büschel, -Netze und -Scharen, sowie die Beziehungen mehrdeutiger Elementar-Gebilde und die Gesetze der quadratischen Transformation. Besonders wertvoll ist die Beigabe der zahlreichen Figuren, die dem Anfänger das Studium der höheren ebenen Kurven wesentlich erleichtert.

„. . . . Interessant ist dabei die Art und Weise, wie sich die bekannten speziellen Kurven in den systematischen Zusammenhang einordnen. Von methodischem Gesichtspunkte beachtenswert ist das Äquivalent, welches für die in der analytischen Behandlung der in Rede stehenden Kurven wichtige Hessesche und Cayleysche Kurve eintritt. Eine ausführliche Behandlung erfahren insbesondere die zirkularen Kurven.“ (Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.)

Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe.

Von

Dr. H. Durège,

weil. Professor an der Universität Prag.

5. Auflage, neubearbeitet von **Dr. L. Maurer,** Professor an der Universität Tübingen.

Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—

Durèges Buch ist unter dem mächtigen Eindruck von Riemanns grundlegenden Publikationen entstanden. Sein ausschließlicher Zweck war, die neuen Ideen weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Daß es einem Bedürfnis entgegengekommen ist, dafür spricht die weite Verbreitung, die es gefunden hat. Bei der Neubearbeitung des Stoffes ist an der Tendenz des Durègeschen Werkes festgehalten worden, es verfolgt den Zweck, den Leser in die Riemannsche Anschauungsweise einzuführen, und es setzt an Vorkenntnissen nicht mehr voraus, als in den üblichen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung gegeben zu werden pflegt.

In diesen Vorlesungen werden in der Regel die auf reelle Variable und ihre Funktionen bezüglichen Begriffsbestimmungen aus pädagogischen Gründen nicht in ihrer ganzen Schärfe vorgetragen, und wenn dies geschieht, so finden sie auf dieser Stufe des Unterrichts noch kein volles Verständnis. Deswegen sind diese Begriffsbestimmungen, soweit sie für die Begründung der Funktionentheorie erforderlich schienen, in einem einleitenden Kapitel zusammengestellt.

Durège hat in seinem Werk die Integrale algebraischer Funktionen ausführlich behandelt, ohne doch bis zur Riemannschen Thetafunktion vorzudringen. Es schien nicht zweckmäßig, ihm auf diesem Weg zu folgen. Zwar sind die wesentlichsten Sätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen entwickelt und die Konstruktion der Riemannschen Flächen eingehend besprochen, aber auf die Theorie der Integrale algebraischer Funktionen ist nicht eingegangen. Der Verfasser hat sich darauf beschränkt, durch ein ausführlich behandeltes Beispiel einen Einblick in dies weite Gebiet zu eröffnen. Dagegen ist der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein umfangreicher Abschnitt gewidmet. Dafür sprachen mehrere Gründe: abgesehen davon, daß diese Theorie an und für sich ein großes Interesse bietet, ist sie besonders geeignet, die allgemeinen funktionentheoretischen Prinzipien zu erläutern; dazu kommt, daß sie den naturgemäßen Zugang zu der Theorie der automorphen Funktionen eröffnet, die zurzeit im Vordergrund des Interesses steht.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN

MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.



17. BAND. 11. HEFT. NOVEMBER.

AUSGEGEBEN AM 4. DEZEMBER 1908.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1908.

Das nächste Heft wird Ende Dezember ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Mathematische Methoden zur Untersuchung mechanischer Probleme.

Antrittsrede zur Übernahme der ordentlichen Professur für Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, gehalten den 31. Oktober 1908.

Von PAUL STÄCKEL in Karlsruhe.

Nachdem im Laufe des 19. Jahrhunderts zwischen der Mathematik und den verschiedenen Gebieten ihrer Anwendung eine mehr oder weniger scharfe Trennung eingetreten war, hat sich allmählich auf beiden Seiten das Bedürfnis nach einer Annäherung eingestellt. Bei den Mathematikern ist nach einer fruchtbaren Periode der Kritik und zugleich des Aufbaus der Sinn für die Anwendungen wieder erwacht, und die Praktiker sind durch die rasch fortschreitende Entwicklung zu Problemen geführt worden, zu deren Bewältigung die landläufigen mathematischen Hilfsmittel nicht mehr ausreichen. So wünschenswert aber auch eine solche Annäherung sein mag, so groß sind die Hindernisse, die ihr entgegenstehen. Wenn der Praktiker und der Theoretiker sich zu gemeinsamer Arbeit vereinigen wollen, so zeigt es sich häufig, daß sie dieselben Tatsachen anders auffassen, dieselben Begriffe anders benennen, kurz, daß sie in zwei verschiedenen Sprachen reden. Noch bedenklicher ist der Umstand, daß die Fähigkeit, Mathematik anzuwenden, nur der erwirbt, der wenigstens auf einem der Anwendungsgebiete die Dinge selbst in die Hand nimmt und sich eingehend mit ihnen beschäftigt, und daß die Ausbildung der Mathematiker in dieser Beziehung viel zu wünschen übrig läßt. Auf der anderen Seite hört man den Praktiker klagen, daß er sich in der labyrinthischen Schatzkammer der modernen Mathematik nicht zurecht zu finden wisse und sich oft die Werkzeuge, die er gerade nötig habe, selbst zurechtschmieden müsse.

Aus dieser Sachlage heraus erklärt es sich wohl, daß manche Fortschritte der Mathematik, die für die technischen Wissenschaften recht nützlich sein könnten, dort nur schwer und langsam Eingang finden. In Fällen dieser Art die Vermittlung zu übernehmen, ist niemand mehr berufen als ein Vertreter der Mathematik an einer

Technischen Hochschule, und ganz besonders gilt das für unsere Fridericiana, wo der Geist fortlebt, in dem Männer wie Redtenbacher und Grashof gewirkt haben. Daher erschien mir ein *Bericht über die mathematischen Methoden, die bei dem gegenwärtigen Stande der Forschung zur Untersuchung von Aufgaben aus der Mechanik dienen können*, ein passender Gegenstand für die heutige Stunde zu sein, um so passender, als ein beträchtlicher Teil meiner eigenen Arbeit dieser für viele Gebiete der Technik grundlegenden Disziplin gewidmet gewesen ist.

Bei der mathematischen Untersuchung einer mechanischen Aufgabe hat man zwischen *Ansatz* und *Lösung* zu unterscheiden. Obgleich die mathematischen Methoden, die beim Ansatz zur Verwendung kommen, seit geraumer Zeit in ausgebildeter Form vorliegen und wir unsere Aufmerksamkeit vornehmlich auf die Lösungsmethoden richten wollen, so müssen wir uns doch zuerst klarmachen, wie man bei dem Ansatz verfährt; denn nur so werden wir das Wesen der Lösung richtig beurteilen können.

Im Grunde gehört ein jeder Vorgang, bei dem sich sinnlich wahrnehmbare Gegenstände bewegen, allen Gebieten der Physik an, die nur durch eine teils konventionelle, teils physiologische, teils historisch begründete Einteilung voneinander getrennt sind, und wenn wir ihn unter gewissen Umständen lediglich als einen Bewegungsvorgang ansehen, so beginnen wir damit einen Prozeß, den man als *Idealisierung* bezeichnet. Ich kann mich der üblichen Auffassung dieses Prozesses nicht anschließen, wonach wir, um die wirklichen Verhältnisse mathematischer Behandlung zugänglich zu machen, diese durch Abstraktion von den sogenannten Nebenumständen erheblich vereinfachen müssen; vielmehr scheint er mir in dem Heraustreiben gewisser Züge der Erscheinung zu bestehen, gegen welche die übrigen dann ganz verschwinden, und ich möchte deshalb die Idealisierung nicht mit der wissenschaftlichen Abstraktion, sondern mit der künstlerischen Produktion in Parallele stellen.

Was eine Idealisierung für die Erkenntnis eines Vorganges leistet, zeigt sich erst, wenn nachträglich das mathematische Schema mit dem wirklichen Vorgang verglichen wird. Dabei darf man nicht vollständiges Entsprechen fordern, sondern man wird zufrieden sein, wenn das Bild im großen und ganzen ähnlich ist und sich die Abweichungen durch Hinzufügung kleiner Korrektionsglieder mildern lassen.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern und uns zugleich in das Verfahren des Ansatzes einführen.

Betrachten wir zuerst den Regulator einer Dampfmaschine und

zwar der Einfachheit halber den bekannten *Wattschen Zentrifugalregulator.* In der Theorie der Regelung hat man mit dem kühnen Schritt begonnen, den Apparat von der Maschine, mit der er gekoppelt ist, ganz loszulösen, und gefragt, was bei einer kleinen Störung seiner gleichförmigen Drehung eintrete. Um dies zu ermitteln, ersetzte man die Achse und die Stangen des Parallelogramms durch masselose, dennoch aber feste Gerade, die reibungslos miteinander verbunden sind, und vereinigte die Massen der beiden Kugeln je in deren Mittelpunkte. So gelangte man zu dem idealen Problem, bei einem System von zwei Massenpunkten, deren Beweglichkeit durch die Parallelogrammkonstruktion beschränkt ist, die Störungen der gleichförmigen Drehung um die Achse zu untersuchen, einem Problem, dessen Lösung sich vollständig durchführen ließ. Indessen hat die nachträgliche Untersuchung ergeben, daß es nicht erlaubt ist, die Maschine als einen Nebenumstand anzusehen, daß vielmehr die Wechselwirkung zwischen Maschine und Regulator einen wesentlichen Zug der Erscheinung ausmacht, und nun wurde wiederum die Maschine durch einen einfachen, idealen Mechanismus ersetzt. Ebenso erkannte man, daß auch der Einfluß der Reibung nicht vernachlässigt werden darf.

Noch lehrreicher ist vielleicht das zweite Beispiel, das ich der astronomischen Mechanik entnehme, nämlich das fundamentale Problem der *Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt.* In erster Näherung haben wir hier eine *gleichförmige Drehung* des Erdkörpers um die Erdachse, die Nordpol und Südpol verbindet. Wie schon die alten Griechen wußten, ergibt sich die zweite Näherung, wenn wir hinzufügen, daß die Erdachse ihre Richtung im Raume allmählich verlegt, und zwar so, daß ihr Durchstoßpunkt mit der Himmelskugel auf einem Kreise wandert, dessen Mittelpunkt der Pol der Ekliptik ist, und dessen Halbmesser rund $23\frac{1}{2}$ Grad beträgt; ein Umlauf vollzieht sich in 26000 Jahren. Mit dieser Einsicht war die astronomische Beobachtung der Theorie weit vorausgeeilt; denn erst Newton hat die *Präzession der Tag- und Nachtgleichen* mechanisch erklärt, indem er zeigte, daß das erforderliche Drehmoment durch die Anziehung von Sonne und Mond auf den im Äquator wulstförmig aufgetriebenen Erdkörper geliefert wird.

Die Vervollkommnung der Beobachtungsinstrumente und der Beobachtungsmethoden bewirkte, daß die Theorie bald überholt wurde. Bradley entdeckte nämlich, daß der Durchstoßpunkt der Erdachse mit der Himmelskugel um jenen Kreis in kleinen Ausbiegungen hin und her schwingt, wobei sich die Periode auf 19 Jahre beläuft. Jetzt aber machte die Theorie einen gewaltigen Vorstoß. D'Alembert gelang es, bei den *Bewegungen eines starren Körpers* den Ansatz in voller

Allgemeinheit durchzuführen, und als er seine Gleichungen auf ein starres Rotationsellipsoid von den Abmessungen des Erdkörpers anwandte, konnte er nicht nur die Präzession in schärferer Weise bestimmen, als es Newton getan hatte, sondern auch zeigen, das sich in Bradleys *Nutation* die Umdrehung wiederspiegelt, die die Knotenlinie der Mondbahn alle 19 Jahre in der Ebene der Ekliptik ausführt. Ja, noch mehr, bald darauf hat Euler, dem die ganze Stereodynamik so große Fortschritte verdankt, eine Erscheinung vorausgesagt, deren Realität erst im Jahre 1885 mit Sicherheit nachgewiesen worden ist. Nach Euler braucht die Achse, um die sich die Erde bei ihrer Präzessionsbewegung dreht, nicht mit der Verbindungsgeraden von Nordpol und Südpol zusammenzufallen, sie kann sich vielmehr im Erdkörper bewegen, wobei der Durchstoßpunkt der Drehachse mit dem nördlichen Teil der Erdoberfläche um den Nordpol, der auf der Erde festliegt, einen kleinen Kreis beschreibt. Wenn es sich so verhält, so müssen die astronomischen Bestimmungen der geographischen Breiten periodisch größere und kleinere Werte ergeben als die Messungen auf der Erdoberfläche. Wie schwer es gewesen ist, dieser *Breitenschwankungen* habhaft zu werden, ergibt sich daraus, daß jener Kreis um den Nordpol nur einen Halbmesser von etwa vier Metern hat; man ist damit an die Grenze der Genauigkeit gekommen, welche die modernen Meridiankreise gestatten.

Nach der Theorie Eulers sollten die Breitenschwankungen eine Periode von 305 Tagen haben, die Beobachtungen ergaben jedoch etwa 430 Tage. Newcomb hat hieraus geschlossen, daß man mit der Idealisierung zu weit gegangen sei und die Erde nicht als starr, sondern als *elastisch* anzusehen habe; denn bei einer Nachgiebigkeit der Erde gegen die auf sie wirkenden Kräfte muß die Periode zunehmen. In der Tat fällt der Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung weg, wenn der Erde ungefähr die Elastizität des Stahles beigelegt wird.

Um bei den weiteren Betrachtungen an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, wollen wir annehmen, die Idealisierung, mit der immer eine genaue Abgrenzung des Objektes der Untersuchung verbunden ist, habe zu einem System fester Körper geführt, die wir in erster Näherung durch starre Körper ersetzen dürfen, und die durch Gelenke miteinander verbunden sind. Alsdann besteht der zweite Teil des Ansatzes in der Ermittlung der *Bewegungsmöglichkeiten*, die dem System nach Maßgabe seiner Gebundenheit zukommen. Bei zwangsläufigen Mechanismen, die in der Technik viel verwendet werden wie etwa bei dem Kurbelgetriebe einer Dampfmaschine, liegen die Dinge sehr einfach, wenigstens solange man nicht genötigt ist, die Elastizität des Materials zu berücksichtigen,

da jeder Punkt seine vorgeschriebene Bahn durchläuft und nur das Tempo der Bewegung verschieden ausfallen kann. Allein schon bei den Regulatoren haben wir es mit verwickelteren Formen der Beweglichkeit zu tun. Wenn man aber gar in der physiologischen Mechanik den Gang des Menschen studiert, so steigern sich die Schwierigkeiten so sehr, daß dieser Teil des Ansatzes jahrelange Versuche und Rechnungen erfordert hat.

Die ernstesten Sorgen beginnen indessen, sobald man zu dem dritten Teil des Ansatzes übergeht. Um aus den möglichen Bewegungen des Systems seine wirklichen Bewegungen auszusondern, muß man die *Kräfte* kennen, die auf seine Teile wirken. In einer glücklichen Lage ist hier die Mechanik des Himmels; sie ist der großartige Versuch, aus dem einen, allbeherrschenden Kraftgesetz der Gravitation die Fülle der Erscheinungen abzuleiten, die sich in dem Fernrohr darbieten. Um so schlimmer ist es mit der irdischen Mechanik bestellt. Wieviel experimentellen und mathematischen Scharfsinn hat man z. B. aufwenden müssen, um bei der Bewegung eines Geschosses die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit so genau zu ermitteln, als es die Zwecke der militärischen Ballistik verlangen, und welche Arbeit hat es schon gekostet und wird es auch noch kosten, damit wir zu gesicherten Grundlagen für die Erkenntnis der Beanspruchungen der technischen Materialien gelangen. Daß die Bestimmung von Kraftfeldern so große Mühe verursacht, hat häufig seinen Grund darin, daß bei den betrachteten Vorgängen physikalische und chemische Erscheinungen mitwirken, daß also Wärme entwickelt wird, daß chemische Umsetzungen stattfinden usw., ohne daß man jedoch die Möglichkeit hat, diese Erscheinungen einer genauen quantitativen Analyse zu unterwerfen; in solchen Fällen sind die Kräfte der Mechanik die Idealisierung eines uns nicht zugänglichen Komplexes nichtmechanischer Vorgänge.

Wenn dieser mühevollste Teil des Ansatzes erledigt ist, gelangen wir rasch zum Ende, nämlich zu den sogenannten *Differentialgleichungen der Bewegung,* diesen mathematischen Symbolen, die dem Laien so rätselhaft erscheinen, deren begriffliche Bedeutung sich jedoch dem allgemeinen Verständnis näher rücken läßt. Nach Feststellung der Bewegungsmöglichkeiten des Systems gibt uns die Zeichensprache der höheren Mathematik ein Verfahren an die Hand, um die Eigenschaften, die allen möglichen Bewegungen des Systems gemeinsam sind, kurz zu charakterisieren, und ebenso lassen sich auch die Kräfte, unter deren Einfluß die wirklichen Bewegungen stattfinden, durch mathematische Symbole darstellen. Nunmehr besagen die Prinzipien der Mechanik,

daß bei den wirklichen Bewegungen zwischen den Bewegungsmöglichkeiten und den Kräften eine bestimmte Beziehung besteht, und Lagrange hat gelehrt, wie sich diese Beziehung in allgemeinster Weise analytisch formulieren läßt. Somit sind die Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung nichts anderes als ein symbolischer Ausdruck für die geometrisch-mechanischen Eigenschaften, die den wirklichen Bewegungen gemeinsam sind, oder, wie der Mathematiker lieber sagt, unverändert, *invariant*, bleiben, wenn man von einer wirklichen Bewegung des Systems zu irgendeiner anderen wirklichen Bewegung übergeht.

Damit ist der Ansatz vollendet, und wir kommen zur *Lösung*. Um ein Bild für einen bestimmten Bewegungsvorgang zu erhalten, müssen wir aus der Gesamtheit der wirklichen Bewegungen, die uns durch die Prinzipien der Mechanik in der Form von Differentialgleichungen gegeben wird, eine einzelne Bewegung aussondern. Eine Aufgabe der Mechanik lösen, heißt also, Mittel finden, wie man aus der Gattung der wirklichen Bewegungen des Systems ein bestimmtes Individuum entnehmen kann. Um dies zu tun, muß man vor allem die charakteristischen Merkmale des Individuums kennen. Bei einer individuellen Bewegung pflegt man anzugeben, welche Konfiguration das System zu einer bestimmten Zeit, der sogenannten Anfangszeit, besaß, und mit welchen Geschwindigkeiten sich seine Teile zu dieser Zeit bewegten; denn vermöge der Kräfte ist dadurch die Fortsetzung der Bewegung eindeutig festgelegt. Diese *Anfangsbedingungen der Bewegung* zu erhalten, macht manchmal große Mühe; um zum Beispiel die Bahnelemente eines Kometen aus den Beobachtungen abzuleiten, hat der Astronom lange Rechnungen anzustellen, mit denen freilich die Bestimmung der Bewegung bereits im wesentlichen geleistet ist.

Die mathematischen Methoden, die bei der Lösung zur Anwendung kommen, lassen sich einteilen in *analytische, graphische* und *numerische Methoden;* selbstverständlich kommt es vor, daß bei einer größeren Untersuchung alle drei Verfahrungsarten nebeneinander benutzt werden.

Bei den *analytischen* Methoden bezeichnet man die Größen durch Buchstaben und arbeitet mit Formeln, das heißt, mit Gleichungen zwischen Buchstabengrößen. Da nun den Buchstaben verschiedene Zahlwerte beigelegt werden können, so beherrschen wir durch eine Formel oder durch ein System von Formeln eine ganze Gattung von Erscheinungen, und so ist das Endziel bei der analytischen Behandlung einer mechanischen Aufgabe, die betreffende Gattung von Bewegungen durch ein System von Formeln darzustellen, aus denen die individuellen Bewegungen hervorgehen, indem man gewissen darin auftretenden Buchstaben, welche die Anfangsbedingungen symbolisieren, bestimmte Zahlwerte erteilt.

Hier sind wir jedoch in einer eigentümlichen Lage. Wenn eines der schwierigeren Probleme der technischen Mechanik gelöst werden soll, und fast alle Probleme der technischen Mechanik verdienen diesen Namen, so wird der Analytiker sagen, daß er Mittel besitze, um die Differentialgleichungen der Bewegung zu lösen. Er bedient sich dabei sogenannter unendlicher Prozesse, bei denen man der Lösung Schritt für Schritt näher kommt, ebenso wie man sich dem Werte eines unendlichen Dezimalbruchs unbegrenzt nähert, indem man Ziffer für Ziffer hinzunimmt; nur in Ausnahmefällen läßt sich die Lösung durch geschlossene Ausdrücke bewerkstelligen, ebenso wie nur wenige unendliche Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche verwandelt werden können. Dagegen kann der Ingenieur für die Praxis nur Formeln brauchen, die sich bequem handhaben lassen und die numerische Auswertung ohne Zeitverlust gestatten. Hiernach könnte es scheinen, als ob die analytische Methode für die angewandte Mechanik kaum in Betracht käme. Glücklicherweise verhält es sich in Wirklichkeit ganz anders; denn dem Praktiker stehen viele einfache Formeln zu Gebote, die sich gut bewährt haben. Die Aufklärung dieses Paradoxons liegt darin, daß man bei den Anwendungen nur eine beschränkte Genauigkeit erreichen will und kann; von vornherein sind beim Ansatz die Größen, welche die Bewegungsmöglichkeiten des Systems und das Kraftfeld bestimmen, nur näherungsweise bekannt, so daß man es im Grunde gar nicht mit einer einzigen Aufgabe, sondern mit einem Bündel gleichberechtigter Aufgaben zu tun hat. Ferner aber sind bei der Lösung alle individuellen Bewegungen, die in einer gewissen Nachbarschaft zusammenliegen, gleichwertig; man betrachtet also auch ein Bündel von Bewegungen. Mithin genügt es, irgendeine Bewegung zu kennen, die innerhalb der genannten Grenzen verläuft; dabei ist von ganz besonderer Wichtigkeit, daß diese Ersatzbewegung gar nicht eine der Bewegungen des Doppelbündels zu sein braucht, sondern nur die Bedingung erfüllen muß, aus dem Doppelbündel nicht herauszutreten. Um noch einmal das Beispiel des unendlichen Dezimalbruchs zu benutzen, so können etwa bei einer Näherungsrechnung alle echten Brüche gleichberechtigt sein, die in den beiden ersten Ziffern hinter dem Komma übereinstimmen; in diesem Fall darf man alle unendlichen Dezimalbrüche, die mit 0,33 beginnen, durch den gewöhnlichen Bruch $^1/_3$ ersetzen.

Die Herleitung von Näherungsformeln beruht auf dem Zusammenwirken technisch-mechanischer und mathematischer Überlegungen; jene spielen besonders beim Ansatz eine Rolle, diese bei der Lösung, wo es sich darum handelt, verwickelte analytische Beziehungen durch einfache Formeln zu approximieren. Es wird der technischen Mechanik

sehr zustatten kommen, daß diese Kunst in neuerer Zeit erhebliche Fortschritte gemacht hat; reiches Material liefern hier die Forschungen des russischen Mathematikers Tschebyschoff, die noch lange nicht genügend ausgebeutet worden sind.

In engem Zusammenhange mit dieser *Approximationsmathematik* steht die *qualitative Untersuchung von Bewegungvorgängen*. Es ist sehr bemerkenswert, daß die qualitativen Methoden zur Diskussion von Differentialgleichungen, die gegenwärtig das Interesse der Mathematiker in hohem Grade in Anspruch nehmen, aus den Bedürfnissen der analytischen Mechanik herausgewachsen sind. Jene allgemeinen Integrationsmethoden, bei denen man unendliche Prozesse zu Hilfe nimmt, haben nämlich vielfach nur formalen Wert, weil man auf diese Art nicht bis zu den Eigenschaften der Lösungen vordringen kann. Es erhebt sich daher die Frage, ob sich nicht wenigstens bei gewissen Typen von Differentialgleichungen aus diesen selbst etwas über die Natur der Lösungen erschließen lasse, und das ist in der Tat der Fall; zum Beispiel ist es vielfach möglich, aus der Gestalt der Differentialgleichungen zu entnehmen, ob das System periodische Bewegungen gestattet. Wenn man jedoch so weit vorgedrungen ist, so lassen sich zur analytischen Darstellung der Lösungen besondere Prozesse benutzen, die der Eigenart der betrachteten Bewegungen entsprechen; so stehen uns zum Beispiel bei den periodischen Bewegungen die Näherungsmethoden zur Verfügung, die in der Lehre von den trigonometrischen Reihen ausgebildet worden sind. Damit aber wird auch für die quantitative Lösung, die immer das Endziel bleiben muß, Bresche geschlagen. Daß bei diesem Vorgehen in der Mechanik neben der souveränen Beherrschung der modernen Analysis eine gründliche Einsicht in die Natur der Bewegungsvorgänge unerläßlich ist, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

Mit der Aufstellung der Lösungsformeln ist indessen das Geschäft der Lösung noch nicht beendet; denn man muß von ihnen zu den individuellen Bewegungen übergehen, und hierbei sind die graphischen und numerischen Methoden von großem Nutzen. Ganz unentbehrlich aber werden diese Methoden, wenn uns die Analysis bei der Lösung im Stiche gelassen hat.

Dem Mangel der *graphischen Methoden*, daß ihre Genauigkeit gering ist, steht der große Vorzug der Anschaulichkeit gegenüber, der sie dem konstruierenden Techniker besonders lieb gemacht hat. Und so haben sich, nachdem ein Schüler des Karlsruher Polytechnikums, Karl Culmann, bahnbrechend vorangegangen war, diese Methoden in der Statik der festen Körper ein weites und fruchtbares Anwendungsgebiet erobert. Aber auch in der Dynamik beginnt die Graphik eine Rolle zu spielen.

Freilich liegen bis jetzt nur vereinzelte Ansätze vor; es wäre zu wünschen, daß das Vorhandene gesammelt und gesichtet und so eine systematische Durchführung vorbereitet würde.

Eine wesentliche Bereicherung haben die graphischen Methoden dadurch erfahren, daß man, ein altes Vorurteil überwindend, dem Zirkel und Lineal neue Zeicheninstrumente zugesellt hat, und es ist zu erwarten, daß man auf diesem Wege mit Erfolg weiter gehen wird; fehlt doch schon heute in keinem Maschinenlaboratorium das Amslersche Polarplanimeter, und wird es nicht lange dauern, bis jedes elektrotechnische Institut mit einem harmonischen Analysator ausgerüstet ist.

Während die Ingenieure das graphische Verfahren bevorzugen, haben die Astronomen, denen es auf die äußerste Genauigkeit ankommt und die zu jahrelangen Rechnungen Zeit haben, von jeher die *numerischen Methoden* kultiviert. Es läßt sich jedoch voraussehen, daß das rechnende Verfahren auch für die wissenschaftliche Technik immer größere Bedeutung gewinnen wird, nicht nur, weil auch hier die Anforderungen an die Genauigkeit immer größer werden, sondern vor allem, weil die numerischen Methoden in neuerer Zeit solche Fortschritte gemacht haben, daß sie nicht selten den graphischen an Einfachheit überlegen sind.

Wenn die analytischen Methoden versagen, so geben uns die modernen Methoden zur numerischen Auflösung von Differentialgleichungen einen durchaus praktischen Weg zur Auffindung individueller Lösungen; man kann ihre Wirksamkeit so beschreiben, daß sie für Differentialgleichungen dasselbe leisten wie die Simpsonsche Regel für Flächenberechnung. Falls die Konvergenz dieses Verfahrens sehr stark ist und zwei oder drei Glieder ausreichen, so erhält man auf diesem Wege auch Näherungsformeln; auf diese Art läßt sich zum Beispiel die Pendelbewegung behandeln.

Es wäre jedoch ein Mißverständnis, wenn jemand meinen sollte, daß die Graphik sich nunmehr überlebt habe; vielmehr ist je nach den Umständen die eine oder die andere Art des Vorgehens am Platze. So wird man in manchen Fällen zuerst durch die Zeichnung einen angenäherten Wert der gesuchten Größe ermitteln und hinterher durch Rechnung das Ergebnis verfeinern, in anderen Fällen aber umgekehrt zuerst numerisch verfahren und die Korrektionen auf graphischem Wege hinzufügen. Dabei sind die Erleichterungen nicht zu verachten, die uns der logarithmische Rechenschieber, die Rechenmaschinen und die Rechentafeln der Nomographie gewähren.

Die nicht selten vorhandene Abneigung der Ingenieure gegen die numerischen Methoden zu überwinden, ist Sache der Erziehung. Dabei

sollte auch der Mathematiker mitwirken; Übungen in der numerischen Lösung von Aufgaben, die der technischen Praxis entnommen sind oder ihr doch nahestehen, werden sich leicht in die Kurse der höheren Mathematik einschalten lassen und, richtig betrieben, den Unterricht nur anregender gestalten.

Die vorhergehenden Ausführungen haben gezeigt, daß die Werkzeuge zur mathematischen Untersuchung mechanischer Aufgaben im Laufe der letzten 25 Jahren erheblich vervollständigt und verbessert worden sind. Allein es läßt sich nicht leugnen, daß es nur allzuviele Probleme gibt, die auch dem Angriff mit diesen Waffen widerstehen. Als ultima ratio wird man in verzweifelten Fällen ein Verfahren anwenden, das auf der Grenze zwischen Mathematik und Physik steht, und das ich als *experimentelle Methode* bezeichnen will.

Versuche mit *Modellen* haben von jeher dazu gedient, die Ergebnisse der Theorie zu veranschaulichen, sie haben vielfach dazu Veranlassung gegeben, die Theorie weiter zu bilden, und sie allein können uns Aufschluß geben, wenn die mathematischen Methoden versagen. Dies gilt besonders für die Probleme des Schiffbaus, bei dem Schleppversuche mit Modellen an die Stelle des Probierens und Tastens getreten sind. Allerdings ist die Herstellung brauchbarer Modelle nicht so einfach, wie es zuerst scheinen mag. Es genügt durchaus nicht, etwa in der Verkleinerung auf ein Zehntel ein geometrisch ähnliches Gebilde anzufertigen, vielmehr gehört zur *mechanischen Ähnlichkeit*, daß auch die Massen der einzelnen Teile und die Kräfte, die auf sie wirken, in geeigneter Weise reduziert werden, so daß man zum Beispiel die Dampfermodelle aus Paraffin herstellt. Schon Galilei hatte diese Verhältnisse klar erfaßt. In seinen *Discorsi* sagt er, daß Tiere und Pflanzen in ihrer Größe beschränkt seien, da riesenhafte Lebewesen unter ihrer eigenen Schwere zusammenbrechen würden; im Wasser, wo die Schwere durch den Auftrieb aufgehoben wird, seien größere Dimensionen möglich als auf dem Lande, aber ans Land gebracht, würden diese Seeungeheuer zerfallen. Daß die Rückschlüsse aus den Versuchen mit dem Modell auf die Bewegungen des Originals besonderer Vorsicht bedürfen, wird hiernach nicht wundernehmen.

In der neuesten Zeit haben die experimentellen Methoden eine beachtenswerte Ausdehnung erfahren, die auf dem Begriffe der *physikalischen Analogie* beruht. In der mathematischen Physik hatte sich nämlich die auffallende Tatsache herausgestellt, daß scheinbar ganz verschiedenartige Phänome denselben Gesetzen gehorchen. So werden die Erscheinungen der Diffusion, der Wärmeleitung und der Verbreitung der Elektrizität in Leitern durch dieselben Formeln dargestellt; nur hat

man, je nach dem Gebiete der Physik, auf dem man sich befindet, den Buchstaben andere Bedeutungen zu geben, wobei etwa den Massen Wärmekapazitäten, den Wärmemengen Spannungen elektrischer Ladungen entsprechen usw. Sind die Analogien aus tiefer liegenden gemeinsamen Eigenschaften zu erklären? Die moderne Physik verneint diese Frage, weil immer, wenn kleinen Änderungen einer Reihe von Größen *proportionale* Änderungen einer zweiten Reihe von Größen entsprechen, ein und derselbe Typus von Differentialgleichungen auftritt, gleichgültig welchen konkreten Sinn jene Größen haben.

Analogien der soeben beschriebenen Art finden sich auch innerhalb der Mechanik. Hierher gehört der berühmte Satz von Kirchhoff, nach dem die Probleme der Drehung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt und der Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, der in seinem natürlichen Zustande zylindrisch ist, zu denselben Differentialgleichungen führen. Aus jeder der bekannten Lösungen des ersten Problems läßt sich also, indem nur den Buchstaben eine andere Bedeutung beigelegt wird, eine Lösung des zweiten Problems ableiten; so entspringen zum Beispiel aus den regulären Präzessionen des schweren symmetrischen Kreisels gewisse Drillungen eines isotropen Stabes, dessen Querschnitt ein Kreis ist, nämlich solche Drillungen, bei denen der Stab in eine Schraubenlinie übergeführt wird.

Wie steht es aber, wenn die gemeinsamen Differentialgleichungen von zwei analogen Problemen durch die uns zugänglichen Hilfsmittel nicht gelöst werden können? Früher hatte man gesagt, daß zwei Probleme dieser Art die gleichen analytischen Schwierigkeiten böten oder analytisch äquivalent seien, und solange man auf dem Standpunkte ausschließlich mathematischer Betrachtung verharrt, wird man sich mit dieser Aussage begnügen müssen. Ganz anders aber gestaltet sich die Sache, wenn experimentelle Methoden zugelassen werden; denn jetzt kann sich die eine Aufgabe den Versuchen ganz entziehen, während bei der zweiten die experimentellen Schwierigkeiten überwunden werden können, und dann ist man in der Lage, die Daten der Versuche auf die erste Aufgabe zu übertragen.

Einer der Fälle, bei denen dieser Gedanke zum Ziele geführt hat, betrifft die *Spannungsverteilung in einem prismatischen Stabe von endlichem Querschnitt*, der auf reine Torsion beansprucht wird. Die Lösung dieser Aufgabe ist für die technische Mechanik von erheblicher Wichtigkeit, sie erfordert jedoch schon bei geometrisch einfachen Querschnitten verwickelte Rechnungen, und bei komplizierteren Querschnitten ist man auf rohe Annäherungen angewiesen. Wird jedoch der Ansatz der Aufgabe passend eingerichtet, so gelangt man zu

Differentialgleichungen, die auch bei der Frage nach der Gestalt eines Flüssigkeitshäutchens auftreten, das auf einer Randkurve von der Gestalt des Querschnitts aufsitzt und unter gleichförmigem Drucke steht.

Es ist nicht schwer, ein solches Häutchen mittels Seifenlösung zu realisieren, und es kommt jetzt darauf an, seine Gestalt hinreichend genau auszumessen. Zu diesem Zwecke wird vor dem Häutchen ein Schirm angebracht, der parallel zu der Ebene der Randkurve, der Grundebene, steht und mit schwarzen und weißen Quadraten versehen ist. In der Seifenhaut spiegelt sich der Schirm. Diese Spiegelung wird durch ein in der Mitte des Schirms angebrachtes kleines Loch photographiert, und zwar zuerst für den Fall, daß die Haut unbelastet ist und daher in der Grundebene liegt, und darauf für den Fall, daß die Haut mit einem bestimmten Drucke belastet ist; aus der Vergleichung der beiden Photographien läßt sich alsdann die Abweichung des belasteten Häutchens von der Grundebene berechnen.

Um zu zeigen, wie man hieraus Schlüsse auf die Spannungsverteilung in dem prismatischen Stabe zieht, wollen wir uns vorstellen, daß die Grundebene horizontal liege, so daß sich über ihr das Häutchen wie ein flacher Hügel wölbt. Nunmehr schneiden wir das Häutchen durch horizontale Ebenen und projizieren die Schnittkurven auf die Grundebene. Die so erhaltenen Kurven sind die Spannungslinien des Stabes, das heißt, ihre Tangenten geben die Richtung der Schubspannung in dem betreffenden Punkte des Querschnittes. Um für den Punkt auch die Größe der Spannung zu erhalten, brauchen wir nur noch in dem vertikal darüber liegenden Punkte des Hügels das Gefäll zu bestimmen und mit einer Konstanten zu multiplizieren.

Man hat die Brauchbarkeit dieser Methode geprüft, indem man sie auf Fälle anwandte, bei denen die Spannungsverteilung bekannt ist, und es hat sich gezeigt, daß die Abweichungen in engen Grenzen liegen; nur in der Nähe der Randkurve ist die Genauigkeit geringer, wahrscheinlich weil hier die kleinen Abweichungen der wirklichen Randkurve von der idealen Gestalt störend wirken. Es ist deshalb zu hoffen, daß diese Methode der Analogie sich auch in den verwickelteren Fällen bewähren wird, bei denen eine Kontrolle ausgeschlossen ist.

Wenn ich vorher sagte, daß bei einem *passenden Ansatz* die Differentialgleichungen des Flüssigkeitshäutchens herauskamen, so wollte ich damit andeuten, daß bei der Methode der Analogie immer eine mathematische Untersuchung vorausgehen muß. Zu einer mechanischen Aufgabe gehört nämlich nicht ein einziges System von Differentialgleichungen, sondern es gibt deren unzählig viele, je nach der in hohem Maße willkürlichen Wahl der Größen, durch die die Beweglichkeit des

Systems charakterisiert wird. Um zu einer brauchbaren Analogie zu kommen, hat man also sozusagen die richtigen Größen zu nehmen. Dafür lassen sich freilich keine Regeln aufstellen, hier hilft nur ein gewisser Instinkt, der dem Genie angeboren ist, der aber auch dem Minderbegabten als Lohn langer Arbeit zuteil wird.

Die Methode der Analogie, zu deren Durchführung sich experimentelle und mathematische Geschicklichkeit vereinigen müssen, zeigt aufs schönste den Erfolg eines Zusammenwirkens von Mathematikern und Vertretern der wissenschaftlichen Technik. Damit sind wir aber zu dem Ausgangspunkt unserer Betrachtungen zurückgekehrt. Mögen meine Ausführungen die Überzeugung gekräftigt haben, daß der Ingenieur einer gründlichen mathematisch-physikalischen Ausbildung bedarf, wenn er in späteren Jahren den steigenden Anforderungen seines Berufes gewachsen sein soll, und daß im besonderen die theoretische Mechanik als das unentbehrliche Bindeglied zwischen Mathematik und Technik in allen Teilen ihrer reichen Gliederung aufs sorgfältigste zu pflegen ist.

Wissenschaft und Technik.

Vortrag, gehalten bei der Jahresfeier des Deutschen Museums am 1. Oktober 1908 im Wittelsbacher Palais zu München.[1])

Von F. Klein in Göttingen.

Königliche Hoheit!

Hochgeehrte Anwesende!

Das war vor 30 Jahren, daß eine kleine Zahl Professoren der hiesigen Technischen Hochschule sich alle 14 Tage am Samstag abend zusammenfand, um in ausführlicher Bezugnahme durch Vortrag und Diskussion ihre wissenschaftlich-technischen Interessen abzuklären und zu fördern. Sie nannten sich das *Mathematische Kränzchen*, aber nicht die einzelne Wissenschaft in abstracto, sondern die Beziehung zwischen Wissenschaft und Technik bildete den Mittelpunkt des gemeinsamen Interesses. Daß diese Beziehung, insbesondere was Mathematik und Physik angeht, sehr viel weiter entwickelt werden müsse, als bis dahin geschehen, das war das ständige Argument, welches unser verehrtes Mitglied, Professor Linde, uns mit nie ermüdendem Eifer vor die Seele stellte. Bauschinger hatte schon einige Jahre vorher an der Münchener Technischen Hochschule das erste staatliche Laboratorium

1) Abgedruckt aus der Internationalen Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik vom 17. Oktober 1908.

für Festigkeitslehre eröffnet. Jetzt war es Linde gelungen, ein Laboratorium für *theoretische Maschinenlehre* zu begründen, in welchem zunächst Untersuchungen über die thermodynamischen Eigenschaften des überhitzten Wasserdampfes durchgeführt werden sollten.

Die Form ist bald zerfallen, die Mitglieder unseres kleinen Kreises wurden zerstreut, aber der Gedanke, der uns zusammengeführt, hat sich als siegreich erwiesen und in der Gründung des *Deutschen Museums* eine glänzende, nie geahnte Verwirklichung gefunden. Mir aber haben Sie den ehrenvollen Auftrag erteilt, bei der heutigen Festversammlung der Museumsmitglieder die Beziehung zwischen Wissenschaft und Technik in den Mittelpunkt der Betrachtung zu rücken, damit wir uns der Grundlage bewußt werden, auf der wir bauen, und der weiteren Ziele, die damit gegeben sind.

Der größte Feind, geehrte Anwesende, der richtigen Bestrebungen erwächst, ist nicht äußerer Widerstand, sondern Übertreibung. Von ihr müssen wir uns von vornherein freihalten, wenn wir nicht in ein falsches Fahrwasser geraten wollen. Noch andere, noch wichtigere Vorbedingungen für das Gedeihen der Technik gibt es als die Verbindung mit der Wissenschaft. Das sind die allgemeinen intellektuellen und ethischen Qualitäten: der technische Instinkt, der Unternehmungsgeist, die Beharrlichkeit; auch die Organisation der Arbeit spielt eine wichtige Rolle. Und ebenso hat die Wissenschaft ihre stärksten Wurzeln für sich: den unbedingten Trieb zur Erforschung der Wahrheit, woran sich die Unbestechlichkeit des Urteils schließt, die Freude am geordneten Denken, die Gründlichkeit und auch wohl eine gewisse Langsamkeit. Werden die beiden Gebiete in gedeihliche Wechselwirkung treten? Es gelingt nicht immer, und es sind unter Umständen auch üble Folgen der Bezugnahme zu vermerken, bei denen ich heute nicht weiter verweile. Aber wo sich die geeigneten Kräfte zusammenfinden, da entsteht neues, nach beiden Seiten förderliches Leben. Für die Wissenschaft kommt hier nicht nur der wichtige Impuls in Betracht, der sich aus dem Herankommen neuer Hilfskräfte ergibt, sondern ganz wesentlich auch die Befruchtung mit neuen, fremder Erfahrung entstammenden Ideen. Die technischen Betriebe aber werden durch erfolgreichen Kontakt mit der Wissenschaft auf eine höhere Stufe der Leistungsfähigkeit emporgehoben, zum Teil überhaupt erst ermöglicht. Es muß genügen, hier einige wenige Gebiete und führende Persönlichkeiten zu nennen, welche die Art dieser Einwirkung in einer jedermann verständlichen Weise besonders deutlich hervortreten lassen.

Ich nenne zuerst, wie billig, die *chemische Technik*, die ihren Bund mit der chemischen Wissenschaft unter Liebigs genialer Führung

schloß, um ihn in der Folge immer enger zu gestalten und sich dadurch bis zu einer Höhe der Leistung zu erheben, welche jede ausländische Konkurrenz weithin zurückgedrängt hat. Nichts ist erfreulicher für den Vertreter der Wissenschaft, als eine der großen Arbeitsstätten zu durchwandern, welche die chemische Industrie sich geschaffen. Denn den Anforderungen der immer fortschreitenden Praxis wird hier in der Weise begegnet, daß Hunderte gelehrter Chemiker nach den verschiedensten Richtungen hin mit rein theoretischen Untersuchungen beschäftigt werden.

Ich erwähne ferner, ebenfalls an Münchener Erinnerungen anknüpfend, den *Bau der optischen Instrumente*. Fraunhofer ist der Typus eines der seltenen Männer, bei denen exakteste physikalische Beobachtung und sorgsamste Durchführung der technischen Prozesse von Hause aus Hand in Hand gehen. Und in unseren Tagen hat Abbe, indem er seine theoretischen, insbesondere auch mathematischen Fähigkeiten mit der praktischen Leistung eines hervorragenden Mechanikers (Zeiß) verband, jene wunderbaren Jenenser Werkstätten geschaffen, welche die ausführende Optik auf eine ganz neue Basis stellten. Es gibt keine Frage der modernen Physik oder Chemie, insbesondere auch der Kristallkunde, die hier nicht unmittelbar aufgenommen und mit praktischen Problemen in Verbindung gesetzt würde.

Endlich die *Elektrotechnik* mit ihrem stattlichen Sprossen, der *drahtlosen Telegraphie!* Kein Zweifel, daß dieses Gebiet technischen Schaffens, welches sich immer mehr anschickt, unsere ganzen Existenzbedingungen umzugestalten, ausschließlich auf dem Boden fortgeschrittener physikalischer Einsicht entstanden ist. Von Ohm über Gauß und Weber bis hin zu Hertz (um nur einheimische Namen zu nennen) geht die Reihe der Forscher, an welche sich die großen Praktiker, allen voran unser Siemens, seinerzeit unmittelbar angeschlossen haben. Und nun hat sich die erfreulichste Wechselwirkung entwickelt, die höchstens durch die ungeheure Ausdehnung, welche das Gebiet gewonnen hat, in etwas gehemmt wird.

Diese Beispiele sind entscheidend. Sie lassen zugleich in erfreulicher Weise erkennen, wie sehr unser Deutsches Land an der wissenschaftlichen Entwicklung der Technik teilgenommen hat. Ich bin nicht der erste, der behauptet, daß eben hierin einer der Hauptgründe dafür zu erblicken ist, daß es der deutschen Industrie gelungen ist und fortschreitend gelingt, neben ihrer älteren Schwester, der englischen, Platz zu greifen.

Aber wir dürfen nicht unbedacht verallgemeinern. Es gibt wichtigste Gebiete der Technik, welche mit wissenschaftlichen Studien im

engeren Sinne bisher nur wenig zu tun haben; ich nenne etwa die Textilindustrie oder den Bau von Automobilen und Fahrrädern. Es wäre interessant, unter dem Gesichtspunkte der Verbindung mit der Wissenschaft die verschiedenen Gebiete der Technik zu durchwandern und zu überlegen, warum die Dinge bald so, bald anders gestaltet sind, ob Notwendigkeiten vorliegen, die durch die Art der einzelnen Gebiete bedingt sind, oder Phasen der historischen Entwicklung, welche der Fortschritt bald überholen wird.

Statt weiter auszugreifen, möchte ich in diesem Betracht hier nur ein paar Worte über das jüngste Kind der heutigen Schaffensperiode sagen, den Liebling des Tages, die *Motorluftschiffahrt* und den *mechanischen Flug*. Es würde wenig angebracht sein, wenn ich als Theoretiker versuchen wollte, hier den wissenschaftlichen Gesichtspunkt einseitig in den Vordergrund zu stellen. Neben der großen technischen Konzeption sind es der unbeugsame Wille des Grafen Zeppelin, sein Wagemut, sein unerschütterliches Vertrauen auf den endlichen Sieg seiner guten Sache, die den Erfolg verbürgen und das Herz des deutschen Volkes gewonnen haben. Und Ähnliches kann von den anderen Pionieren der neuen Technik gesagt werden. Aber wer näher zusieht, bemerkt, wie in der ganzen Entwicklung der aktiven Luftschiffahrt allerdings je länger je mehr sorgfältigste physikalische und mechanische Überlegungen zur Geltung kommen. Lilienthal, der mit seinem Gleitflieger als erster den Schwebeflug der Vögel erfolgreich nachahmte, hat bereits mit eingehenden Versuchen über den Luftwiderstand gewölbter Flächen eingesetzt. Entsprechendes ließe sich von Herrn v. Parseval berichten. Und Graf Zeppelin selbst hat sich je länger je mehr mit einem ganzen Stabe von Fachgelehrten umgeben. Alles spricht dafür, daß das Werk, welches jetzt in der Periode heroischer Entwicklung steht, auf dem Boden wissenschaftlicher Einzelarbeit weitere Förderung finden wird.

Ganz ähnlich dürften die Verhältnisse in vielen anderen Gebieten liegen, deren Aufzählung zu weit führen würde. Die Vertreter des Staats und die Leiter großer technischer Betriebe mögen ihre Aufmerksamkeit darauf gerichtet haben, um zu gegebener Zeit in richtiger Weise einzugreifen. Denn die wissenschaftliche Arbeit, wie sie hier verlangt wird, kann der Mithilfe leistungsfähiger Organisationen nicht entraten. Sie ist andererseits für das Gemeinwesen von der allergrößten Wichtigkeit. Man erwäge, daß in Zeiten ernster Bedrängnis, die unserer Nation nicht erspart bleiben werden, ein auch nur geringer Grad technischer Überlegenheit oder Unterlegenheit von entscheidender Bedeutung werden kann.

Wir haben soweit von dem Zusammengehen der wissenschaftlichen *Forschung* und der Technik gesprochen. Aber es gibt noch eine andere Art, wie die Wissenschaft die Technik unterstützt, die vielleicht noch weiter reicht, und die ich die *unbewußte* nennen möchte. Sie ruht auf der *allgemeinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung,* welche die ausübenden Persönlichkeiten — vom Erfinder herab bis zum Arbeiter, der die Einzelheiten herstellt — sich in der für sie in Betracht kommenden Form erworben haben mögen. Wir kennen keine Methode, um ein Genie zu schaffen, und auch die allgemeine Tüchtigkeit der Mitwirkenden ist ein Gut, das uns im wesentlichen von außen gegeben sein muß. Aber für die Verbreitung geeigneter mathematisch-naturwissenschaftlicher Kenntnisse und Fertigkeiten vermögen wir durch zweckmäßige *Entwicklung unserer Unterrichtsanstalten* außerordentlich viel zu tun. Hierüber wäre vieles zu sagen, wenn Zeit und Ort es gestatteten; ich würde glauben, dabei des Interesses meiner heutigen Zuhörerschaft von vornherein sicher zu sein. So aber will ich mich darauf beschränken, zu tun, was mir heute besonders am Herzen liegt, nämlich die werten Gäste, welche aus allen Teilen Deutschlands hierhergekommen sind, auf die vorbildlichen Einrichtungen aufmerksam zu machen, die uns *Bayern* in dieser Richtung vor Augen führt.

Da haben wir zunächst, hier in München, ein wunderbar ausgebildetes System von *Fortbildungsschulen und niederen Fachschulen* als Ergebnis des Zusammenwirkens organisatorischer Kraft und weitreichender Opferfreudigkeit der Gemeindevertretung. Daß die heranwachsende Jugend, die nach Abschluß der Volksschule sich anschickt, in einen gewerblichen Beruf überzutreten, eingehender Fürsorge und Förderung bedarf, daß Kenntnis und Können dabei auf dem Boden der realen Verhältnisse entwickelt werden müssen, daß hierfür naturwissenschaftliches Sehen und Verstehen eine besonders wichtige Sache ist, das alles finden Sie hier in glänzender Weise bedacht —, die Ausstellung „München 1908“ läßt uns darin interessante Einblicke tun. Kein Problem des Unterrichtswesens ist, auch für die Technik, im Augenblicke wichtiger als dieses: was wir für die breiten Schichten der heranwachsenden Jugend in der Zeit tun sollen, die zwischen Volksschule und Militärdienst liegt. Die Allgemeinheit hat hier bisher zu wenig eingegriffen und den einzelnen zu sehr der Gefahr ausgesetzt, auf Abwege zu geraten. Die Überzeugung, daß mit großen Mitteln wohlbedachte Abhilfe geschaffen werden muß, verbreitet sich auch in Norddeutschland immer mehr und allgemeinstes Interesse wendet sich dabei den mustergültigen Einrichtungen zu, die uns München vor Augen führt.

Des ferneren darf ich von der Berücksichtigung unserer Interessen an den hiesigen *höheren Schulen* (oder, wie es in Bayern heißt, den Mittelschulen) einiges sagen. Die befreiende Losung, von der die moderne Entwicklung dieser Schulen beherrscht wird, kam 1900 aus Norddeutschland: daß es verschiedene Typen nebeneinanderstehender Schulen geben soll, welche den verschiedenen Arten der Begabung der Schüler und der späteren Berufsanforderungen gleichmäßig gerecht werden und unter allgemeinen Gesichtspunkten als *gleichwertig* anzusehen sind. Wir müssen leider sagen, daß Mathematik und Naturwissenschaft einige Zeit brauchten, um die große in diesem Programm für sie enthaltene Wirkungsmöglichkeit zu erfassen. Es war erst 1904, daß die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte hierfür eine eigene Unterrichtskommission einsetzte, welche Weihnachten 1907 einen zusammenfassenden Gesamtbericht veröffentlichte. Nun haben wir uns im Norden über das Entgegenkommen der maßgebenden Instanzen nicht etwa zu beklagen, aber wir sehen uns überall durch den Umstand gehemmt, daß die bestehenden Schulen bei uns, auch die realistischen, im wesentlichen Sprachschulen sind (unterschieden nur dadurch, ob der Nachdruck mehr auf die klassischen oder auf die modernen Sprachen gelegt wird). Erst die bayrische Unterrichtsverwaltung hat den uns ebenso erfreuenden als überraschenden Schritt getan, bei der Einführung ihrer neuen Oberrealschulen im vorigen Jahre ausdrücklich zu erklären, daß der Charakter dieser Anstalten in erster Linie ein mathematisch-naturwissenschaftlicher sein soll. Und das Zeitmaß für unsere Fächer und ihre methodische Ausgestaltung hat sie dabei ganz so bemessen, daß unsere wohlerwogenen Wünsche ganz befriedigt werden. Die Naturwissenschaft wird mit sieben Stunden durch alle Klassen durchgeführt, womit die Möglichkeit gegeben ist, neben Physik und Chemie auch den biologischen Disziplinen den erforderlichen Raum zu gewähren. Überall stehen praktische Übungen der Schüler im Vordergrund. Und dem mathematischen Unterricht hat man ganz das Gepräge gegeben, welches von der modernen Reformbewegung verlangt wird: daß durch frühzeitige Einführung des Funktionsbegriffs und seiner graphischen Darstellung der Schüler befähigt werde, die Bedeutung der Mathematik innerhalb des heutigen Kulturlebens in ihrer großen Einfachheit richtig zu verstehen.

Gestatten Sie endlich dem früheren Professor der hiesigen *Technischen Hochschule* zum Ruhme dieser hervorragenden Anstalt einige wenige Worte zu sagen, welche seitens der heute hier versammelten Zuhörerschaft gewiß auf volles Verständnis rechnen dürfen. Die Mehrzahl der Anwesenden weiß noch aus eigener Erinnerung, daß wir vor

10 bis 15 Jahren an den technischen Hochschulen Deutschlands lebhafte Auseinandersetzungen zwischen den mehr auf die Praxis gerichteten Vertretern des Ingenieurwesens und den mehr abstrakt interessierten Professoren der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen hatten. Nun ist ja theoretisch dieser Kampf längst im positiven Sinne geschlichtet, indem sich die Überzeugung von der Notwendigkeit engsten Zusammenwirkens der beiden Richtungen in neuer Form — auf Grund etwa der folgenden Leitsätze durchgesetzt hat:

1. Der Unterricht in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern an den technischen Hochschulen hat sich dem allgemeinen Unterrichtszweck der Anstalt einzufügen.

2. Andererseits bedarf die technische Unterweisung durchaus einer sorgfältigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlegung; ein allgemeiner technischer Unterricht auf Grund allein genialer Intuition ist unmöglich.

3. Darüber hinaus ist eine Minderzahl besonders veranlagter Ingenieure nach den verschiedenen in Betracht kommenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Richtungen so weit zu fördern, daß sie gegebenenfalls, wo neue Verbindungen zwischen Wissenschaft und Technik in Zukunft erforderlich werden, mit eigenen Untersuchungen einsetzen kann.

Aber es fehlt doch noch manches, daß diese theoretischen Formulierungen (die sich ja aus der in meinem heutigen Vortrag dargelegten Auffassungsweise sozusagen von selbst ergeben) überall in der Praxis zur vollen Geltung gekommen wären.

Um so erfreulicher ist es zu sehen, wie an der Münchener Hochschule beide nebeneinander in Betracht kommenden Richtungen unter ausführlicher Bezugnahme Hand in Hand gehen. Und als äußeres Zeichen dafür hat hier — und bisher hier allein — die Abteilung für allgemeine Wissenschaften im Kreise der übrigen diejenige gleichberechtigte Stellung, die sie im eigenen Interesse wie im Interesse der Gesamtanstalt fordern muß, indem sie gleich den anderen das Recht hat, die höchste Würde, welche die Anstalt verleiht, den Doktor der technischen Wissenschaften, zu erteilen. Zugleich ist hier von alters her eine andere für uns besonders wichtige Frage in befriedigender Weise geordnet, indem die Technische Hochschule ihren ganz bestimmten Anteil an der wissenschaftlichen Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften hat. Wenn sich diese Ordnung nicht ohne weiteres auf unsere norddeutschen Verhältnisse übertragen läßt, so erfordert sie trotzdem sorgfältigste Beachtung.

Und nun die Krönung der hiesigen für das Zusammengehen von Wissenschaft und Technik so wichtigen Bestrebungen! Das ist diejenige

Schöpfung, der unsere heutige Feier gilt, das *Deutsche Museum* selbst. Dürfen wir dasselbe doch als eine Unterrichtsanstalt ansehen, als eine Unterrichtsanstalt größten Stils, welche dem Bildungsbedürfnisse nicht irgendwie abgegrenzter Kreise, sondern der Gesamtheit entgegenkommt und damit dem großen Grundsatz gerecht wird, daß es mit der zunftmäßigen Einengung gelehrter Studien heute nicht mehr getan ist, sondern daß darüber hinaus jedermann ein Anrecht auf die seinen Interessen und seiner Vorbereitung entsprechende Kenntnisnahme der erzielten Fortschritte hat. Es ist wunderbar, wie dieser Grundgedanke überall, wo seine Ausführung auch nur durch Vermittlung des gedruckten Führers bekannt wird, bei Männern und bei Frauen der verschiedensten Stände, sofortiges Verständnis und begeisterte Zustimmung findet. Man beneidet insbesondere um das neugeschaffene Bildungsmittel die heranwachsende Jugend. Wie ist es denn uns Älteren noch gegangen, wenn wir als Knaben irgendwelche Kenntnis von der Tätigkeit in Fabriken gewinnen wollten? Wir drangen vielleicht ohne Erlaubnis in das Gebäude ein, um meist bald durch irgendein Machtwort veranlaßt zu werden, den Ausgang wiederzugewinnen; jedenfalls aber von irgendeiner Erklärung der in Betracht kommenden Prozesse oder gar einer Darlegung ihres Zusammenhangs mit allgemeinen wissenschaftlichen Prinzipien keine Spur. Durch die Einrichtung des Deutschen Museums hat die lernbegierige Jugend ein ganz anderes Sprungbrett für eigene spätere Leistungen gewonnen. Harte Arbeit soll ihr darum nicht erspart bleiben, denn ohne sie erstarkt weder der Charakter noch die intellektuelle Fähigkeit. Aber sie braucht nicht mehr im Dunkeln zu tappen; ihre Anstrengung kann sofort auf klar erkennbare Ziele gerichtet werden.

Hochverehrte Anwesende! Ich werde mich unter den heute gegebenen Umständen nicht noch ausführlicher über die interessanten hiermit berührten Organisationsfragen und ihre Wichtigkeit für die moderne Kultur verbreiten dürfen. Ich meine aber in ihrer aller Sinne zu handeln, wenn ich Sie nun zum Schlusse bitte, jenen Männern, die zum Zustandekommen der hiesigen so bemerkenswerten Einrichtungen beigetragen haben, den Gründern des Deutschen Museums insbesondere, allen voran dem hohen Protektor des Deutschen Museums, Seiner Königlichen Hoheit dem Prinzen Ludwig, durch Erheben von Ihren Plätzen Ihren tiefempfundenen Dank auszudrücken. Wir vereinigen uns in dem Rufe: Seine Königliche Hoheit Prinz Ludwig lebe hoch! hoch! hoch!

Einige vektoranalytische Bezeichnungs- und Benennungsfragen.

Von F. Jung in Wien.

Im folgenden soll die Rede sein von Dingen, die zum Teil schon wiederholt zur Sprache gebracht worden sind. Es handelt sich um eine *Einigung* betreffs gewisser Zeichen und Benennungen. Sie zu erreichen halte ich allerdings nicht gerade für sehr aussichtsvoll, denn die Erfahrung scheint zu lehren, daß jeder bei Seinem bleibt und daß demnach durch neue Vorschläge das erwünschte Ziel nicht nur nicht erreicht, sondern vielmehr zu all dem Verschiedenartigen nur noch ein Neues hinzugefügt wird. Dies ist nun durchaus nicht mein Wunsch, und deshalb habe ich mich auf den Standpunkt gestellt, daß *in solchen Fällen tunlichst aus bereits Vorhandenem eine geeignete Auswahl zu treffen* ist.

Es hat sicher viel für sich, die Bezeichnungs- und Benennungsweise der Schöpfer neuer Begriffe möglichst beizubehalten. Mitunter aber wird es sich wohl als nützlich erweisen, teilweise davon abzugehen, wenn ein allzu starres Festhalten der ursprünglichen Festlegungen etwa zu Schwerfälligkeiten oder Mangel an Einheitlichkeit führt. Später hinzutretende Erweiterungen der Begriffe können dies herbeiführen. Es kommt aber auch der umgekehrte Fall vor. Einzelne Begriffe leiden unter einer Fülle von Namen oder Bezeichnungen. Man hat ohne Not für dieselbe Größe oder dieselbe Operation die verschiedensten Ausdrücke und Zeichen gebraucht, oder es wurden ebenso unnötigerweise bereits vorhandenen Namen und Zeichen neue Bedeutungen unterlegt. Hier wird auf die Beseitigung schädlichen Überflusses hinzuarbeiten sein.

Beide Fälle trifft man auf verschiedenen Gebieten der Mathematik und Physik. Eines davon, in welchem noch große Uneinigkeit in der Form herrscht, ist die Vektoranalysis[1]). Es spiegelt sich dies beispielsweise sehr deutlich in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ ab. Fast an jeder Stelle, wo hier das Rechnen mit Vektoren Verwendung findet, bekommt man eine andere Bezeichnungweise zu

1) Das Wenige, was mir über die auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom gemachten Vorschläge bisher bekannt wurde, ist nicht geeignet, meinen hier dargelegten Standpunkt zu erschüttern.

sehen. Was die Ursache der mangelnden Einheitlichkeit auf diesem Gebiete sein mag, soll hier nicht untersucht werden. Vielleicht liegt es an der Entwicklung des Gegenstandes, die von verschiedenen Seiten her erfolgte. Jedenfalls ist der gegenwärtige Zustand nicht eben erfreulich und gewiß nicht geeignet, Neulinge für die Sache einzunehmen.

Daß in der Bezeichnung der *Vektoren* Verschiedenheit vorhanden ist, halte ich für keinen Übelstand. Die Hauptsache ist da nur, daß man überhaupt weiß, daß der betreffende Buchstabe einen Vektor darstellt. Ob dies dadurch angedeutet wird, daß man den Buchstaben über- oder unterstreicht, eine fette oder eine deutsche Letter nimmt, das ist wohl ziemlich belanglos. Ohnehin wird man ja auch Größen höherer Stufe benützen müssen und wollen, z. B. Tensoren usw. und dann wird sich doch nur schwer für jede Größenart eine besondere Bezeichnungsweise festhalten lassen. Verschiedenartigkeit in der Bezeichnung der Vektoren macht sich meines Erachtens auch nicht unangenehmer fühlbar als etwa die Verwendung verschiedener Buchstaben (natürlich nicht am selben Orte) für ein und dieselbe Größe überhaupt.

Anders dagegen verhalten sich die Umstände, wie man wohl zustimmen wird, bei *Operationszeichen*. Vor allem kommen hier die verschiedenen Produktarten in Betracht, deren Verwendung ja mit zu den großen Vorteilen des Vektorrechnens gehört. Ich spreche hier nur von Produkten zweier Vektoren. Zunächst ist da festzustellen, daß gegenwärtig bereits fünf oder sechs verschiedene Produktarten im Gebrauche sind. Schon diese Tatsache macht es nötig, neue Zeichen gegenüber Hamilton und Graßmann in Gebrauch zu nehmen. Dabei wird man jedoch trachten müssen, nicht ganz systemlos vorzugehen, sondern der Wahl gewisse Gesichtspunkte zugrunde zu legen. *Als nicht unwesentliche Forderung an die Bezeichnungsweise erscheint mir ihre Einheitlichkeit.* Solange man sich mit nur zwei Produktarten, der inneren und äußeren etwa begnügt, ist sie allerdings unnötig, denn dann treten eben jene in eine Art Gegensatz, welcher auch eine gegensätzliche Bezeichnung rechtfertigen kann. Bei gleichzeitiger Anwendung von mehr Produktarten aber dürfte Gleichartigkeit der Bezeichnungsmittel doch besser am Platze sein. Nun steht man da im wesentlichen vor zwei verschiedenen Möglichkeiten, die beide bereits angewendet wurden, zum Teil freilich gleichzeitig. Um die Art des Produktes anzuzeigen, kann nämlich als Operationszeichen die Form der Klammer dienen, in welche man dann die Faktoren einschließt, oder es wird ein eigenes Produktzeichen *zwischen* die Faktoren gesetzt. während die Form der Klammer, falls eine solche nötig wird, gleichgültig ist. Klammern werden zu dem genannten Zwecke benützt von

Graßmann[1]), H. A. Lorentz[2]), Voigt[3]), besondere Produktzeichen (bzw. die bloße Nebeneinandersetzung der Faktoren) von den übrigen, besonders Gibbs[4]) (der allerdings in einem Falle auch die Klammer benützt). Sehr kurz ist die Schreibung von Heun[5]), nur läßt sie sich bei Festhaltung des oben aufgestellten Grundsatzes der Einheitlichkeit wohl nicht gut erweitern für die verschiedenen Produktarten.

Man kann sich natürlich auf den Standpunkt stellen, daß die Forderung der Einheitlichkeit fallen gelassen wird, etwa dem bereits Vorhandenen zuliebe. Dann wird es aber, scheint mir, um so schwerer werden, je zu einer Übereinkunft zu kommen. Was sollte denn anderes zur Richtschnur genommen werden? Andererseits *ermöglicht die Einhaltung dieser Bedingung den verschiedenen Zeichensystemen das Geeignete zu entnehmen,* so daß längst Vertrautes wenigstens zum Teil beibehalten werden kann.

Daß die Unterscheidung einer größeren Anzahl von Produktarten durch die Form der Klammer allein auf große Schwierigkeiten stößt, ist klar. Zudem braucht man ja Klammern auch noch zu anderen Zwecken, so daß sich wohl überhaupt kaum genügend viele praktisch brauchbare Klammerzeichen angeben ließen. Daher empfiehlt es sich, den anderen Weg einzuschlagen und Umschau zu halten nach *geeigneten Multiplikationszeichen, welche zwischen die Faktoren gesetzt werden können.* Da liegen nun die Verhältnisse zufällig so günstig, daß man nahezu das Auslangen findet mit Zeichen, welche schon im Gebrauch stehen, allerdings nicht in *einem* Bezeichnungssystem. Auch muß man sich entschließen, die Bedeutung eines Zeichens zu ändern, oder besser, ihm seine ursprüngliche Bedeutung zurückzugeben. Gelegentlich einer vektoranalytischen Arbeit[6]) habe ich erstmals die Produktschreibung angewendet, welche ich im folgenden zum Gebrauche empfehlen möchte. Dabei muß auch auf die Benennung der verschiedenen Produktarten eingegangen werden, denn auch in dieser Hinsicht sind Verschiedenheiten vorhanden, durch welche mitunter das Verständnis erschwert werden kann. Ich denke da vor allem an das äußere Produkt und das Vektorprodukt. Vielfach werden beide Benennungen als gleichbedeutend gebraucht, während andererseits hiegegen Einsprache erhoben

1) Die Ausdehnungslehre 1862.

2) Enzykl. der math. Wissenschaften, V. Band. Leipzig, 1904.

3) „Etwas über Tensoranalysis", Göttinger Nachrichten 1904.

4) Vector Analysis, herausgegeben von Wilson, New York 1902.

5) Formeln und Lehrsätze der Allgemeinen Mechanik, Leipzig 1902.

6) „Ableitungs-Bildung im räumlichen Größenfelde", Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 56.

wird. Es ist nicht in Abrede zu stellen, daß *beide* Produktarten unter Umständen mit Nutzen zu verwenden sind. Daher geht es nicht an, das Graßmannsche äußere Produkt einfach ganz beiseite zu schieben und seinen Namen auf das Vektorprodukt, nach Graßmann die „Ergänzung“ des äußeren Produktes, zu übertragen. Vielmehr sind beide Produktarten beizubehalten und je nach Bedarf zu verwenden. Der Name „Vektorprodukt“ jedoch erscheint mir nicht glücklich gewählt. Er deutet an, daß bei dieser Produktbildung zwischen zwei Vektoren das Ergebnis wieder ein Vektor ist. Nun kann man aber einen Vektor z. B. mit einem dyadischen Produkt „vektoriell“ multiplizieren und erhält *nicht* einen Vektor dadurch. Die Benennung ist also in diesem Falle geradezu irreführend. Deshalb habe ich a. a. O. für das Vektorprodukt den Namen *seitliches* Produkt eingeführt in Anlehnung an das innere und äußere Produkt.

Gehen wir nun die einzelnen Produktarten durch. Das innere Produkt zweier Vektoren wird vielfach bezeichnet durch einen Punkt zwischen den beiden Faktoren (Gibbs) oder auch durch bloße Nebeneinanderstellung derselben (Heawiside, Heun). Die Einfachheit dieser Schreibung ist bestechend, und doch scheint es besser von ihr abzugehen. Wir dürfen ja nicht vergessen, daß auch das algebraische Produkt zweier Vektoren zur Verwendung gelangen soll und passend bezeichnet werden muß. Den Multiplikationspunkt, bzw. die Nebeneinandersetzung der Faktoren für dieses vorzubehalten ist gewiß das natürlichste, und das ist eben jener Fall, wo man, wie oben gesagt, einer Bezeichnung ihre ursprüngliche Bedeutung zurückzugeben hat. Dann bietet sich als Multiplikationszeichen für das innere Produkt am ungezwungensten der Graßmannsche Vertikalstrich zwischen den Faktoren. Natürlich kann aber die Deutung des Zeichens $|\bar{a}$ als „Ergänzung des Vektors $\bar{a}$“ hier nicht festgehalten werden, da das äußere Produkt von $\bar{b}$ und $\bar{a}$ nicht mehr in der Graßmannschen Form $[\bar{b}|\bar{a}]$ zu schreiben wäre. Dies scheint mir jedoch nicht so schwerwiegend, da die Zurückführbarkeit des inneren Produkts auf das äußere bei Benutzung mehrerer Produktarten nebeneinander wohl nicht schon in der Schreibung hervorgehoben zu werden braucht. Wir haben also für das *innere* Produkt der Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$

$$\bar{a}\,|\,\bar{b} = ab\cos(\bar{a}\,\bar{b}),$$

wo a, b die Werte bedeuten. Für das *seitliche* (vektorielle) Produkt gibt es bereits ein Zeichen, das der früher aufgestellten Bedingung entspricht, das von Gibbs hiefür verwendete liegende Kreuz zwischen den Faktoren. Demnach

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c},$$

wo

$$c = ab \sin(\bar{a}\bar{b})$$

und die Vektoren $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, in dieser Reihenfolge genommen, ein Rechtssystem bilden. Beim äußeren Produkt (im Sinne Graßmanns) dagegen wird die Einführung eines neuen Multiplikationszeichens notwendig, um unserer Forderung Genüge zu leisten. Wenigstens ist mir keines bekannt, das zu diesem Zweck schon angewendet worden wäre. Daher habe ich a. a. O. ein Zeichen gewählt, welches wenigstens in anderer Verbindung schon gedient hat, und das *äußere* Produkt in der Form

$$\bar{a} \wedge \bar{b}$$

geschrieben. Meines Wissens hat Budde zuerst das Zeichen $\overset{\wedge}{+}$ benutzt um die Addition von Vektoren anzudeuten; von da her entlehnte ich das vorgeschlagene.

Zur Kennzeichnung des *dyadischen* Produktes dient in geeignetster Weise nach Jaumann[1]) der Beistrich zwischen den Faktoren

$$\bar{a}, \bar{b}$$

und für das *algebraische* Produkt, wie schon bemerkt, die bloße Nebeneinanderstellung oder der Punkt

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b},$$

entsprechend dem Gebrauche beim Rechnen mit Skalaren. Außerdem kann diese letzte Bezeichnungsweise, wenn keine Unklarheit dadurch entsteht, auch herangezogen werden in Fällen, wo die Art des Produkts unbestimmt bleiben soll. Dies ist nämlich mitunter von Vorteil, wenn es sich um Beziehungen handelt, die unabhängig sind von der besonderen Produktart[2]).

Für das algebraische Produkt wird auch der Name Tensorprodukt gebraucht (Voigt), doch möchte ich dies nicht befürworten aus ähnlichen Gründen, wie sie oben gegen die Bezeichnung Vektorprodukt angegeben wurden. Es entspricht das dem Standpunkte, daß *die Produktarten nicht benannt werden sollen nach Größen, welche sie darstellen können,* weil dieselbe Produktart, wie früher bemerkt, unter Umständen verschiedene Größen liefern kann, und weil andererseits die betreffenden Größen ihrerseits unabhängig von den Produktarten festgelegt werden können. Wenn man dies festhält, so stößt man wiederum auf eine

1) Die Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1905.

2) Man vergleiche z. B. mehrere Formeln in meinen Abhandlungen „Ableitungs-Bildung“ a. a. O. und „Die Polarableitung in rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten“, Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien 1908.

Größe, die eine Neubenennung verlangt, nämlich die Summe von dyadischen Produkten je zweier Vektoren. Gibbs nennt sie „dyadic", andere haben sie „allgemeine Dyade" genannt. Beide Namen hängen an der Darstellung der Größe mittels dyadischer Produkte, während sie an und für sich hiervon ganz unabhängig ist. Das Wesentliche an der Größe ist, daß sie einem gegebenen Vektorfelde ein affines zuordnet. Wegen dieser kennzeichnenden Eigenschaft habe ich für sie a. a. O. den Namen *Affinor* gebraucht. Er mag sprachlich vielleicht nicht ganz einwandfrei gebildet sein, doch dürften in dieser Hinsicht gegen ihn wohl auch keine schwereren Bedenken vorliegen als etwa gegen den bereits (natürlich in anderem Sinne) gebräuchlichen Namen Rotor. Als besonderer Fall des Affinors erscheint der *Tensor*, wie diese Größe einfach zu nennen wäre statt der Voigtschen Bezeichnung „Tensortripel". Der Tensor vermittelt eine orthogonale Affinität, könnte also als orthogonaler Affinor gekennzeichnet werden. Affinor und Tensor sind Größen, welche gleichberechtigt neben Skalar und Vektor treten, nicht nur als Erzeugnisse dieser aufzufassen sind. Es ist nicht notwendig, sich den Affinor unter einem einzigen bestimmten geometrischen Bilde vorzustellen, ebensowenig als dies beim Vektor der Fall ist. Letzteren braucht man bekanntlich geometrisch nach Study[1]) nicht gerade als (gerichtete) Strecke zu denken, sondern kann ihn ebensogut etwa als Keil vorstellen. In ähnlicher Weise werden sich beim Affinor und Tensor verschiedene geometrische Darstellungen angeben lassen, worauf hier nicht einzugehen ist. Demnach ist zu sagen: Eine Summe von beliebigen algebraischen Produkten je zweier Vektoren ist im allgemeinen ein Ausdruck für einen Tensor, eine solche von dyadischen Produkten ein Ausdruck für einen Affinor, nicht aber ist sie der Tensor oder Affinor selbst.

Für die im vorhergehenden gemachten Benennungs- und Bezeichnungsvorschläge waren bloß Zweckmäßigkeitsgründe maßgebend. Nun komme ich zu einem Namen, bei dessen einheitlicher Festlegung auch die Stimme des Geschmacks mitzureden hat. Es handelt sich um die Bezeichnung des *Wirbels* eines Vektorfeldes. Größere Verbreitung genießen bekanntlich zwei Schreibarten, nämlich

$$\text{rot}\,\bar{x} \quad \text{und} \quad \text{curl}\,\bar{x},$$

wo $\bar{x}$ den Vektor bedeutet. Zwischen diesen beiden soll eine Wahl stattfinden. Da glaube ich denn doch, daß es, mindestens in deutschen Büchern, *ganz unpassend* ist, sich der englischen Bezeichnung curl zu

1) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

bedienen. Es ist wohl genug an den aus dem Griechischen und Lateinischen entnommenen Ausdrücken. Als wenn übrigens curl eine gar so treffende Bezeichnung wäre! Maxwell selbst hat den Wirbel anfangs „rotation" genannt, man bleibe also bei der Schreibung rot$\bar{x}$, da einmal schon der Helmholtzsche Name „Wirbel", etwa in abgekürzter Form, zur Bezeichnung dieser Größe nicht herangezogen wurde, obgleich er in erster Linie dazu berechtigt gewesen wäre. Neben Wirbel ist also *Rotor* zu gebrauchen, wie es ja teilweise bereits geschieht. Durch diesen Namen, statt Rotation, ist auch der allzu starke Hinweis auf letztere (im eigentlichen Sinne genommen) vermieden, was vielleicht erwünscht ist.

Wie man sich überzeugt haben wird, war bei den vorgebrachten Bezeichnungs- und Benennungsvorschlägen das Streben leitend, Vorhandenes zu benutzen, wo es angeht. Daß die Zeichen verschiedenen Systemen entnommen sind, das ist nach meinem Dafürhalten nicht ein Nachteil, sondern geradezu ein Vorzug im Hinblick auf die erstrebte Einigung. Bei der Auswahl der Zeichen erscheint kein System willkürlich bevorzugt vor dem anderen, einzige Richtschnur ist die Brauchbarkeit gemäß der früher aufgestellten Forderung gewesen, welch letztere sich aus rein sachlichen Erwägungen ergab. Der Mangel eines Merkmals, nach welchem die Eignung eines Zeichens beurteilt werden sollte, hat gewiß bisher zum Mißlingen einer Einigung sehr wesentlich beigetragen, weil niemand einen sachlichen Grund sah, von der ihm gerade geläufigen Bezeichnungsweise abzugehen und die eines anderen anzunehmen. Durch die Aufstellung eines leitenden Grundsatzes für die Zeichenauswahl halte ich die Anbahnung einer Einigung für gefördert.

Zur Unterstützung meines Vorschlages betreffs der Multiplikationszeichen möchte ich noch eins vorbringen. Von allen Multiplikationszeichen, die in der Vektoranalysis gebraucht wurden, gibt es meines Wissens nur zwei, deren Sinn stets ungeändert festgehalten wurde. Es ist die Graßmannsche Bezeichnung $\bar{a}\,|\,\bar{b}$ für das innere Produkt und die Gibbssche $\bar{a} \times \bar{b}$ für das seitliche. Alle anderen Multiplikationszeichen mußten sich verschiedene Bedeutungswechsel gefallen lassen. So wird das Graßmannsche Zeichen $[\bar{a}\bar{b}]$ des äußeren Produktes von manchen für das seitliche Produkt gebraucht[1]); $\bar{a}\bar{b}$ dient vielfach als Bezeichnung für das innere und für das dyadische Produkt. Schon aus Zweckmäßigkeitsgründen also empfiehlt sich die Beibehaltung der Zeichen $\bar{a}\,|\,\bar{b}$ und $\bar{a} \times \bar{b}$, da sie keiner Mißdeutung ausgesetzt sind; und

1) Z. B. von Lorentz, Enzyk. d. math. Wiss. V.

dies um so mehr, als sie der früher aufgestellten Bedingung Genüge leisten. Hier Neueinführungen machen zu wollen wäre nicht nur überflüssig, sondern geradezu schädlich, weil man dadurch einen Zeichenüberfluß herbeiführt und so einer Einigung nur entgegenarbeitet.[1])

Wien, September 1908.

Die historische Entwicklung des Kraftbegriffes.

Von H. E. Timerding in Straßburg.

Meine Herren!

Wenn ich es unternehme, über die historische Entwicklung des Kraftbegriffes vor Ihnen zu sprechen, so kann ich es nur mit einem Gefühl der Befangenheit und Verlegenheit tun. Denn die Erwartungen, die man an eine Behandlung dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes zu knüpfen berechtigt ist, kann ich nicht erfüllen. Das verbietet schon die knapp bemessene Zeit. So zahlreich und so schwer zu entwirren sind die Fäden dieses Gedankengewebes, so bunt sind die Farben in ihm gemischt, daß ich es nur als ein fertiges Ganzes ausbreiten, aber kein Bild davon geben kann, wie es im einzelnen beschaffen ist. Historische Fragen lassen sich nur beantworten durch eingehende Detailarbeit, welche die geschichtlichen Urkunden erschöpfend und gründlich behandelt; in großen Zügen lassen sich die Fragen nur aufwerfen und die Richtungen angeben, nach denen die Forschung sich zu bewegen hat. So kann und will ich auch nicht mehr geben als eine kurze Auskunft auf die prinzipielle Frage: Was darf man und was muß man von einer Geschichte des Kraftbegriffes verlangen? Von welcher Art und von welcher Bedeutung wird eine solche Geschichte sein?

Es muß ihr zunächst eine allgemeine Maxime vorangestellt werden, die sehr selbstverständlich klingt und doch so schwer zu befolgen ist: Die geschichtliche Darstellung hat nicht von einer vorgefaßten Meinung über den Charakter und die Bedeutung des Kraftbegriffes auszugehen, vielmehr muß ihr jede Ansicht, die für die Entwicklung der Ideen von Wichtigkeit gewesen ist, gleich wert und gleich lieb sein.

---

1) Bezüglich des Zeichens $\times$ trifft das Gesagte *leider* schon nicht mehr zu. In dem soeben erschienenen Buche von Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, bedeutet es nämlich das innere Produkt! Der Zweck solcher Änderungen ist unverständlich.

Mit diesem ersten Grundsatz der Unparteilichkeit hängt ein zweiter eng zusammen. Die Betrachtung darf sich nicht auf eine bestimmte Seite der Frage allein beschränken, sie darf weder die mathematische noch die physikalische noch die philosophische Seite allein berücksichtigen, sondern sie muß allen zugleich gerecht werden, denn so allein kann sie den Kraftbegriff in seinem vollen Gehalte erfassen. Darin liegt weiter, daß auch alle Persönlichkeiten, die zu der Entwicklung der Frage wesentlich beigetragen haben, berücksichtigt werden müssen, gleichgültig zu welcher Zunft sie gehören, ob sie nun Mathematiker, Physiker oder Philosophen heißen.

Endlich ist das, was zu erforschen ist, nicht erschöpft in den Ansichten und Entdeckungen, die in wissenschaftlichen Werken offiziell niedergelegt sind, sondern es ist in jedem Falle die wirkliche persönliche Überzeugung des einzelnen zu suchen, auch wenn er sie in seinen Veröffentlichungen verhüllt und nur in vertraulichen Äußerungen und für keinen anderen bestimmten Notizen offenbart hat. Denn erst aus dieser innersten Überzeugung heraus findet die wissenschaftliche Arbeit des Mannes ihre Deutung und ihr wahres Verständnis.

Das würde die Antwort sein auf die Frage, *wie* eine Geschichte des Kraftbegriffes zu behandeln ist. Nicht so einfach ist die Antwort auf die andere Frage, *was* in einer solchen Geschichte behandelt werden muß. Zunächst wird man einfach sagen: alles, was in der Naturwissenschaft mit dem Wort Kraft bezeichnet wird. Aber nur ein kleiner Teil der in Betracht kommenden Schriften ist in deutscher Sprache verfaßt, und wenn auch in den modernen Kultursprachen die Übertragung des Wortes Kraft unzweideutig ist, so gilt das keineswegs für die älteren lateinischen Schriften. Dort finden wir vielmehr eine verwirrende Fülle der Bezeichnungen: ponderositas, vis, virtus, potentia, pressio, sollicitatio, impetus, nisus, conatus und andere mehr. Dazu kommen noch spitzfindige Unterscheidungen durch Beiwörter wie vis viva, mortua, insita, impressa, motrix, acceleratrix usw. Die richtige Deutung dieser Wörter ist allein eine mühevolle Arbeit.

Schälen wir nun wirklich aus ihnen den zugrunde liegenden Begriff reinlich heraus, so erkennen wir doch, daß auch dieser Begriff in einer proteusartigen Vielgestaltigkeit spielt. Wollen wir ihn zu fassen suchen und bestimmt definieren, so können wir es nicht, ohne damit eine bestimmte Ansicht zum Ausdruck zu bringen und damit andere Ansichten auszuscheiden, denen doch wenigstens historische Bedeutung zukommt.

Wir müssen deshalb damit beginnen, die verschiedenen Spielarten des Kraftbegriffes zu suchen, um statt einer exakten *Definition* der

Kraft wenigstens eine *Klassifikation* der in diesen Begriff hineingelegten Ideen zu haben. Wir sehen da zwei Richtungen, in die sich alle diese Ideen spalten und die wir als die *metaphysische* und die *physische* Richtung unterscheiden können. Die erstere von ihnen hat das Wesentliche, daß sie über die Grenzen des sinnlich Wahrnehmbaren hinausgeht, die letztere dagegen stellt die Forderung auf, nicht weiter zu gehen, als das Zeugnis der Sinne reicht. Wir modernen Menschen drängen entschieden der physischen Auffassung zu, aber ich muß es gleich sagen: die Geschichte des Kraftbegriffes hat es vielmehr mit der metaphysischen Auffassung zu tun, und die richtige Heraushebung des metaphysischen Einschlags, insbesondere dessen, was von der scholastischen *Potentia* in ihm steckt, ist eine ihrer schwierigsten und wichtigsten Aufgaben.

Nach der metaphysischen Seite hin lassen sich zunächst zwei Standpunkte trennen, die ich als den *positiven* und den *skeptischen* bezeichnen will. Die Vertreter des ersteren machen eine bestimmte Aussage über das Wesen der Kraft, die Vertreter des letzteren, das sind alle Autoren der klassischen Mechanik: Lagrange, Laplace, Monge, Poinsot, Poisson usw., stellen die Kraft hin als ein unbekanntes Etwas, von dem wir nur die Wirkungen, nicht aber sein Wesen kennen.[1]) Der positive Standpunkt gliedert sich weiter, je nachdem die Kraft als etwas Wirkliches aufgefaßt wird oder nicht. Ist sie etwas Wirkliches, so kann sie entweder für sich bestehen als etwas Substanzielles, eine Art Seitenstück zur Materie, das ist Leibniz' Ansicht[2]), oder sie ist selbst die Bedingung der materiellen Existenz, das ist Kants Meinung. Ist die Kraft nicht selbst etwas Wirkliches, so gibt es etwas Wirkliches, aus dem sie abzuleiten ist. Dieses Wirkliche ist entweder die Materie, wie Descartes und Malebranche[3]) annehmen, oder ein immaterielles Prinzip, wie es Newton glaubt.

---

1) Typisch für diesen Standpunkt sind die Worte von Laplace: La nature de cette modification singulière, en vertu de laquelle un corps est transporté d'un lieu dans un autre, est et sera toujours inconnue. Elle a été désignée sous le nom de force; on ne peut déterminer que ses effets et la loi de son action. (Système du monde, livre III, chap. 1.)

2) Vielleicht die erste Andeutung einer substanziellen Auffassung der Kraft findet sich bei Torricelli (Lezioni accademiche al ser^o Principe Ferdinando II, erschienen 1717, p. 28): La forza dell' urto . . riesce maggiore solamente secondo che maggior sarà stata la . . . resistenza (del corpo) ad esser mosso, cioè secondo ch'egli avrà dato maggior campo alla potenza motrice di poter imprimere in esso maggior *cumulo di virtù.*

3) So sagt Malebranche (Recherche de la vérité, Ausg. v. 1722 Bd. IV, S. 464) im Sinne Descartes': la matière subtile ou éthérée est nécessairement

Wenn wir von Metaphysik sprechen, so müssen wir auch ihre Gegner nennen. Wenn es unserem Empfinden fast selbstverständlich klingt, daß man die Naturwissenschaft nicht auf ein metaphysisches Prinzip, das über die Grenzen der Erfahrung hinausgeht, stützen darf, so hat in der historischen Entwicklung sich diese Überzeugung erst mühevoll durchringen müssen. Sie ist aufs engste verknüpft mit der großen Tat Berkeleys und Humes, die den metaphysischen Charakter des Kausalbegriffes und damit auch des Newtonschen Kraftbegriffes als der Ursache der Bewegung nachgewiesen haben.[1])

An dem physischen Kraftbegriff kann man, wie ich glaube, drei Formen unterscheiden: den *physiologischen*, den *physikalischen* und den *mathematischen* Kraftbegriff. Von diesen dreien ist der erste am schwächsten und der letzte am glänzendsten und konsequentesten ausgebildet. Den rein physikalischen Kraftbegriff findet man z. B. in Groves Wechselwirkung der Naturkräfte entwickelt[2]), er durchzieht auch alle Arbeiten Faradays, um sich bei ihm schließlich in dem Bilde der Kraftlinien wieder mathematisch abzuklären.

Die physiologische Auffassung führt die Kraft in letzter Instanz zurück auf den physiologischen Reiz, insbesondere das Gefühl der Muskelanspannung. Diesen Standpunkt hat 1770 Lambert eingenommen[3]), leider hat er nur die Klarheit des Gedankens durch das

composée de petits tourbillons et ils sont les causes naturelles de tous changements qui arrivent à la matière, ce que je confirme par l'explication des effets les plus généraux de la Physique, tels que sont la dureté des corps, leur fluidité, leur pesanteur, leur légèreté, la lumière, réfraction et réflexion de ses rayons.

1) Der Ausdruck Kraft, meint Berkeley (Principles of human knowledge, Sect. 25, 48, 62 seq., 103 seq.) soll von der unbelebten Natur nicht gebraucht werden. Kraft ist nur, wo Handlung ist; also in Wesen, die mit Willen und Vernunft begabt sind. *In der Natur gibt es nur gesetzmäßige Verknüpfung von Phänomenen.* Die Kraft kann nicht als Ursache der Bewegung definiert werden, ohne daß sie ihre reale Bedeutung verliert. Denn das Wort Ursache bedeutet nur ein Zeichen, daß eine bestimmte Folge zu erwarten ist. Ähnlich urteilt Hume (An inquiry concerning human understanding): Die Kenntnis der bewegenden Kräfte bedeutet nichts anderes als die Kenntnis gewisser aufeinanderfolgender Erscheinungen. Zwischen der Kraft und ihrer Äußerung, der Bewegung, können wir nicht scheiden. Denn Bewegungsänderung ist das einzige, was an der Kraft wirklich ist. Die Anschauung, welche den Begriff der Kraft erzeugt, liegt in der Seele des Betrachtenden, nicht in den Dingen selbst.

2) Diese Vorträge sind zuerst 1842 gehalten. Grove sagt: Das Zurückschnellen eines Bogens oder eines in die Länge gezogenen Kautschukstückes, ebenso wie das Fallen eines Apfels soll in dem, was es gemeinsames enthält, durch *ein* Wort bezeichnet werden, und hierfür sagen wir *Kraft*.

3) Wenn wir . . . eine Last heben oder fortdrücken, so *empfinden* wir, daß wir etwas anwenden müssen, und das, was wir empfinden, daß wir es anwenden

frühzeitige Hineinziehen der geometrischen Deduktion getrübt. Die physikalische Auffassung sieht in der Kraft einen einfachen Ausdruck für den einheitlichen Charakter gewisser elementarer Naturerscheinungen. Die mathematische Auffassung endlich definiert die Kraft als ein mathematisches Hilfsmittel zur exakten Beschreibung der Naturvorgänge.

Nach allen diesen Auffassungen muß es aber verschiedene Arten von Kräften geben, je nach der Art der Vorgänge, um die es sich handelt. Die verschiedenen Arten der Kräfte können einander verwandt sein, sich nach bestimmten Regeln und Gesetzen gegenseitig auslösen und bedingen, sie sind aber von vornherein nicht identisch. Erst wenn alle Naturvorgänge auf Bewegungen zurückgeführt werden, wie es die alten Atomistiker, Leukipp und Demokrit, zuerst getan haben, oder unter dem Bilde von Bewegungen gedacht werden, wie es in der aristotelischen Physik geschieht, gewinnt die Kraft einen wirklich oder scheinbar einheitlichen Charakter.

Trotzdem ist bei jeder Auffassung die Mechanik voranzustellen als *der* Wissenszweig, an dem sich der Kraftbegriff gebildet und aus dem heraus er erst auf andere physikalische Vorgänge, mit oder ohne mechanistische Ausdeutung, übertragen worden ist. Richten wir darum nunmehr unser Augenmerk allein auf die Mechanik, um die Wurzeln *des* Kraftbegriffes zu finden, der wenigstens für uns Mathematiker der interessanteste ist, des mathematischen, so ist das erste, was sich uns darbietet, eine Zwiespältigkeit dieses Begriffes, die einer Zweiteilung der ganzen Mechanik, in Statik und Dynamik, entspricht.

Vielleicht das Beste, was hier die historische Betrachtung leistet, ist, daß sie diese Spaltung verstehen und begreifen lehrt. Sie zeigt, daß die Zweiteilung, mag sie nun innerlich berechtigt sein oder nicht, auf jeden Fall, so wie sie vorliegt, ein Produkt der historischen Entwicklung ist. Die Wahrheit, die erst nach ganz neuen Forschungen Duhems[1]) durchzuleuchten beginnt, ist demgegenüber, was man früher glaubte, befremdlich genug. Die Statik ist eine auf den Schriften des Archimedes aufgebaute Schöpfung des späteren Mittelalters, die Dynamik dagegen ist eine moderne Schöpfung und aufs engste verknüpft mit dem Sturz der durch das ganze Mittelalter festgehaltenen aristotelischen Physik.

Cont.

mußten, nennen wir die *Kraft*. Wir empfinden eben dieses, wenn wir z. E. einen Stein werfen wollen, und wir empfinden es desto mehr, je schwerer derselbe ist, und je geschwinder er soll geworfen werden. (I. H. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, II, S. 374.)

1) Les origines de la Statique. Paris 1905.

Émile Borel,
Professor an der Sorbonne zu Paris:

Die Elemente der Mathematik.

Deutsch von **Paul Stäckel,**
Professor in Karlsruhe i. B.

In 2 Bänden:

I. Band: Arithmetik und Algebra.

Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 8.60.

II. Band: Geometrie und Trigonometrie. In Vorbereitung.

Die Vorschläge zu einer Reform des Unterrichts in den Elementen der Mathematik, die neuerdings seitens der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte gemacht worden sind, hatten in Frankreich bereits seit 1900 in den offiziellen Lehrplänen Verwirklichung gefunden. Auf dieser modernen Grundlage hat É. Borel seine vortrefflichen Lehrbücher aufgebaut, die in Frankreich weite Verbreitung gefunden haben. Es erschien daher angebracht, diese Elemente der Mathematik in einer den deutschen Verhältnissen angepaßten Bearbeitung dem deutschen Publikum zugänglich zu machen.

Vorlesungen über chemische Atomistik

Von Dr. **F. Willy Hinrichsen,**
Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg,
Ständiger Mitarbeiter am Kgl. Materialprüfungsamte zu Groß-Lichterfelde.

Mit 7 Abbildungen im Text und auf 1 Tafel.

[VI u. 198 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 7.—

Inhalt. Erkenntnistheoretische Grundlagen der Naturwissenschaft. Geschichte der Atomistik vor Dalton. Ausbau der Atomtheorie durch Dalton, Gay-Lussac und Avogadro. Berzelius. Entwicklung der organischen Chemie. Das periodische System der chemischen Elemente. Entwicklung der Stereochemie. Weitere Entwicklung der organischen Chemie. Theorie der Lösungen. Lehre vom osmotischen Drucke. Ionentheorie. Anwendungen der Elektronentheorie. Radioaktivität. Bedeutung der Atomistik für die Erkenntnistheorie.

In einer Vorbemerkung zu dem Kapitel „Molekularphysik“ der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften rechtfertigt der Herausgeber, Professor Sommerfeld, die Aufnahme eines Abschnittes über chemische Atomistik u. a. mit folgenden Worten: „Es gibt in der gesamten Physik der Materie schwerlich ein anderes Kapitel, welches sich an Tragweite und zahlenmäßiger Präzision mit der chemischen Atomistik vergleichen ließe.“ In der Tat hat sich die atomistische Hypothese bis in die neueste Zeit hinein als eine der fruchtbarsten und anpassungsfähigsten Theorien der Chemie erwiesen. Wenn auch auf der anderen Seite schwere erkenntnistheoretische Bedenken gegen die Atomhypothese vorgebracht werden können, so erscheint doch eine zusammenfassende Darstellung dieses Gebietes nicht überflüssig, solange man sich nur bewußt bleibt, daß die atomistische Anschauung nichts weiter als ein Bild ist und sein will. Sobald freilich, wie es im Materialismus der Fall ist, versucht wird, eine Weltanschauung auf dieser Auffassung aufzubauen, muß dagegen Verwahrung eingelegt werden.

Von diesen Gesichtspunkten aus ist in dem vorliegenden Buche eine kurze Darstellung der Entwicklung der chemischen Atomistik gegeben. Die Vorlesungen, welche vor einem größeren Hörerkreise, nicht nur vor Chemikern gehalten wurden, bilden eine Erweiterung des erwähnten Kapitels der mathematischen Enzyklopädie. Der Hauptwert ist auf die Besprechung der Ausbildung der Atomistik seit Dalton, vornehmlich auf die Entwicklung der Valenzlehre, des periodischen Systems der chemischen Elemente, der Stereochemie und der modernen Elektronik gelegt, während in den bisher erschienenen Werken über „chemische Atomistik“ vornehmlich die Zeit bis zu Dalton behandelt wurde.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.



17. BAND. 12. HEFT. DEZEMBER.

31. DEZEMBER 1908.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.
[Ausgegeben am 26. Januar 1909.]

Das nächste Heft wird Anfang Februar ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bucher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich. von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. rund 700 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

Seite

2. Abteilung.

Die historische Erforschung der beiden Disziplinen ist so auf völlig verschiedene Mittel angewiesen. Die Schriften des Mittelalters sind zum größten Teil verloren gegangen, nur einiges ist erhalten geblieben, anderes kann durch kritische Sichtung und Vergleichung späterer Werke, trotzdem in diesen nie eine Quelle angegeben ist, erraten werden. Aus diesen wenigen Anhaltspunkten muß man sich ein Bild der mittelalterlichen Statik machen. Ich will versuchen, dieses Bild mit ein paar kurzen Bemerkungen anzudeuten. Die vermeintlichen mechanischen Entdeckungen, die man in Lionardo da Vincis Manuskripten fand, erweisen sich mit großer Wahrscheinlichkeit als Auszüge aus älteren Büchern. Guido Ubaldo dei Marchesi del Monte, der Freund und Beschützer Galileis, den Lagrange in der bekannten historischen Einleitung zu seiner analytischen Mechanik als den Begründer der Statik nennt, war ein begeisterter, aber wenig origineller Dilettant, der seine Vorgänger nicht überschritten hat; nicht viel besser steht es um die Leistungen Benedettis in der Statik, auch Stevin ist vielleicht mehr ein gelehrter und geschickter Kompilator als ein Forscher von großer selbständiger Bedeutung gewesen; ja sogar bei Varignon glauben wir noch Quellen fließen zu sehen, deren Herkunft uns verschlossen ist. So zerrinnt die langgehegte Meinung, daß die Statik das erste Produkt der nach der Finsternis des Mittelalters wiedergeborenen Naturwissenschaft gewesen sei, in ein unbegründetes Vorurteil.

Ganz anders aber steht es mit der Dynamik. Sie ist wirklich ein Produkt der Neuzeit, und hier sind wir nicht für die Einzelheiten auf bloßes Tasten und Vermuten angewiesen, sondern hier liegt die Entwicklung klar am Tage, und hier haben wir das seltene Beispiel, diese Entwicklung sich an *einer* großen Persönlichkeit vollziehen zu sehen. Ich meine Galilei, über den uns die neue große Ausgabe seiner Werke die lange ersehnte genaue Auskunft gibt. Nicht daß seine Ideen ohne alle Vorgänger gewesen sind, zu ihm hin führt eine Entwicklungsreihe, die schon bei Nicolaus von Cusa anhebt, und in der die Namen Cardano, Telesio, Giordano Bruno enthalten sind: auch Männer wie Tartaglia, Benedetti, Gilbert haben auf ihn eingewirkt. Aber den entscheidenden Schritt hat doch zweifellos *er* getan, und nichts ist schöner zu sehen, als wie er im aristotelischen Geiste beginnend nach und nach sich losreißt von den Banden der Schulung und an die Stelle der leeren Begriffsspielerei die methodische, zielbewußte Erforschung der Natur setzt. Es hat die Geschichte kein glänzenderes Beispiel von der befreienden Gewalt eines klar in sich ruhenden Geistes.

Aus Galileis Entdeckung der Fallgesetze ist der neue, kinetische Kraftbegriff emporgewachsen, während gleichzeitig die Erforschung des

Druckes flüssiger und gasförmiger Körper durch Torricelli, Pascal, Guericke und Boyle eine wesentliche Erweiterung des alten statischen Kraftbegriffes mit sich brachte. Der letztere wurde überall unbefangen neben dem neuen Kraftbegriffe akzeptiert. Dies will uns zunächst befremdlich erscheinen. Wir können es aber dadurch erklären, daß es sich beidemal zunächst um das Gewicht des Körpers handelte, und wie man durch das Hebelprinzip das Maß der *statischen* Kräfte auf den *ruhenden* schweren Körper zurückführte, ja direkt mit dem Namen Gewicht bezeichnete, so gründete man auf den *bewegten* schweren Körper den *kinetischen* Kraftbegriff. Huygens bestimmt die Zentrifugalkräfte direkt dadurch, daß er die Kreisbewegung mit der Fallbewegung vergleicht. Die Brücke zwischen den beiden Bestimmungen, der statischen und der kinetischen, hat man in der von Galilei ausgebildeten und durch Hobbes auch auf Newton übertragenen Lehre zu sehen, daß in der Ruhe schon der Ansatz zu der Bewegung steckt wie in dem Punkt der Ansatz zu der Linie. Ohne die *Indivisibelnlehre*, die Cavalieri aus diesem Ansatze heraus zu einem System entwickelt hat, ist der Kraftbegriff des 17. Jahrhunderts nicht zu verstehen. An ihr bildete sich der fundamentale Begriff des Nisus oder Conatus, des Triebes, und auch in der klassischen Mechanik herrscht noch die Auffassung, daß es für die Beurteilung der Kräfte gleichgültig sei, ob der Körper sich bewegt oder nur zu bewegen *strebt*. Lagrange z. B., so abhold er aller Metaphysik war, trug doch kein Bedenken, einen derart dunklen metaphysischen Begriff wie die Tendenz oder den Trieb zur Bewegung zu akzeptieren.[1]) Es ist, wenn wir es so nennen dürfen, der Glaube an die Kraft, der sich stärker erweist als alle kritischen Erwägungen. So ist es auch Newton nicht eingefallen, an der realen Bedeutung der Kraft zu zweifeln, und aus den Erklärungen, die er seinen Bewegungsgesetzen beifügt, geht klar hervor, daß er die Doppelheit des Kraftbegriffes unbedenklich annimmt. Er lehnt nicht die metaphysische Bedeutung des Kraftbegriffes ab, sondern nur die Diskussion darüber.

Vielfach ist die originale Leistung Newtons in den Grundlagen der Mechanik, wie er sie am Eingang seines großen Werkes niedergelegt hat, zu hoch eingeschätzt worden. Er selbst gibt seine Sätze nicht als eigene Entdeckungen, sondern will sie nur übersichtlich zusammenstellen. Da er aber Zitate prinzipiell vermeidet und sein Buch mehr bekannt wurde als alle seine Vorgänger, ist ihm manches unver-

1) So sagt er am Anfang der Mécanique analytique: Dans l'état de l'équilibre la force n'a pas d'exercice actuel, elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement, mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle produirait, si elle n'était pas arrêtée.

dient zugeschrieben worden. Z. B. ist der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, in der kinetischen Form, in der Newton ihn gibt, schon in Wallis' Mechanik (1669) zu finden[1]. Die drei Bewegungsgesetze sind den drei Naturgesetzen Descartes' nachgebildet, dessen „Prinzipien der Philosophie" Newton in engerer Umgrenzung seine „Mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie" gegenüberstellt. Das dritte Gesetz, das Reaktionsprinzip, ist aus Descartes' Prinzip der Rückwirkung beim Stoß, auf den Descartes alle Naturvorgänge zurückführt, entstanden. Das erste Gesetz, das Trägheitsprinzip, hatte Galilei als empirisches Gesetz eingeführt und Cavalieri 1632 in seiner definitiven Form ausgesprochen. Von dort ist es über Descartes, Hobbes und Wallis auf Newton übergegangen.[2] Auch das zweite Gesetz, die Beziehung zwischen Kraft und Bewegungsänderung ist schon durch die Huygenssche Festlegung der Zentrifugalkräfte gegeben, und Wallis sagt in seiner Mechanik fast mit Newtons Worten: Kraft nenne ich die Fähigkeit, Bewegung hervorzurufen (Vim appello potentiam efficiendi motum).[3]

Ein besonderes Problem bildet die Entwicklung des Massenbegriffes. Man findet ihn erst spät ausgebildet, am ersten vielleicht 1600 in Gilberts Buch über den Magnetismus. Demnach würde er eigentlich nicht der Mechanik entstammen. Ob ihn Newton daher hat, wage ich nicht zu entscheiden. Nicht unwahrscheinlich ist, daß er ihn Kepler entlehnt hat. Aber bei Kepler hat das Wort *Moles* noch die alte Bedeutung Volumen, ebenso wie bei Galilei. Kepler führt in diesem Sinne die Massen der Planeten ein, deren Ausdehnung die neu entdeckten Fernrohre zeigten, und stellte die Hypothese auf, daß diese Massen den mittleren Abständen der Planeten von der Sonne proportional seien (vgl. Kepleri Opera ed. Frisch, V, p. 284). Eine Möglichkeit, die wirklichen Massen der Planeten zu bestimmen, gab eben das Newtonsche Gravitationsgesetz, und es mußte sich zeigen, daß die Massen keineswegs einfach im Verhältnis zu der Ausdehnung der Pla-

1) Si mobile ob duas causas motrices duos concipiat directos impetus, puta secundum duas rectas positione datas angulum facientes, celeritatibus . . eisdem rectis — ut parallelogrammi lateribus longitudine datis — proportionalibus, feretur mobile per parallelogrammi diagonium eâ celeritate, quae sit ad datas ut diagonium illud ad respectiva latera. (Die Mechanik steht in Wallis' Opera Mathematica, 1695, Vol. I, p. 571.)

2) Vgl. Wohlwill, Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes, Ztschr. f. Völkerpsychologie u. Sprachwissenschaft, Bd. XIV u. XV.

3) Vgl. dazu die für die prinzipielle Auffassung während der folgenden zweihundert Jahre grundlegenden Worte von Hobbes: Power and cause are the same thing (Elements of philosophy, Sect. I concerning body, part II, chap. 10, 1).

neten stehen, sondern die Dichtigkeit des Saturn z. B. nur etwa 1/8 von der der Erde beträgt. Der Begriff der *Dichtigkeit* erhielt so zum erstenmal eine bestimmte Bedeutung, während er vorher durch den Begriff der spezifischen Schwere, die einfach *gravitas* hieß, ersetzt war. Newton hat ihn höchstwahrscheinlich bei Henry More gefunden[1]), der einen entscheidenden Einfluß auf ihn ausgeübt zu haben scheint. Bei More tritt der Begriff der Dichtigkeit in eigentümlich mystischer Färbung auf als *spissitudo essentialis*, eine Art geistiger Erfüllung des Raumes.

Es ist bekannt, wie nach anfänglichem Widerstreben die Newtonsche Kräftelehre die Welt eroberte, bis in der Physik der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts die Erklärung aller Naturerscheinungen durch Zentralkräfte, die Boscovich zuerst in ein System gebracht hatte[2]), gewissermaßen sich vollendete, um dann an eine Schranke zu stoßen, an der neue Arten der Naturbetrachtung auftreten. Diese entstammen nicht mehr der Mechanik, sondern anderen Zweigen der Physik. Die verwandelten Anschauungen über das Wesen der Wärme, die Robert Mayer zuerst verkündete, führen zu der Begründung der modernen Energetik durch Rankine[3]), die neuen Entdeckungen über Elektrizität und Magnetismus führen unter Maxwells Händen zu der Weiterbildung der Potentialtheorie, die diese höchste Blüte der Newtonschen Kräftelehre ihren anfänglichen Grundlagen definitiv entreißt und sie der genial intuitiven Auffassung Faradays anpaßt.

Faraday bildete den Gedanken aus, die Materie durch die Kraft zu erklären. „Ich nehme," sagt er 1846, „in irgendeinem Teil des Raumes, mag er nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch leer oder mit Materie angefüllt sein, nichts wahr als Kräfte und die Linien, in denen sie ausgeübt werden."[4]) In der rein dynamischen Naturerklärung Faradays, die bei ihm gleichzeitig die Gewalt einer mathematischen Gewißheit wie die Kraft einer religiösen Überzeugung hatte, vollendete sich die dynamische Theorie der Materie, der Kant angehangen hatte[5]), und

1) Enchiridion metaphysicum, 1671. Vgl. über More: Zimmermann, Wiener Sitzungsberichte, Phil. Kl., Bd. 98, 1881, S. 403.

2) Philosophiae naturalis Theoria reducta ad unicam legem virium, Viennae 1759.

3) Rankine definiert den Energiebegriff (Edinb. Trans. XX, p. 475) wie folgt: The total mechanical energy of a body might be defined as the mechanical value of all the effect it would produce, in heat emitted and in resistances overcome, if it were cooled to the utmost and allowed to contract ... or to expand indefinitely, und unterscheidet dann two directly convertible forms of physical energy, one of which is actual and the other potential.

4) Experimental Researches, Vol. III, p. 450 (1846).

5) Kants Werke, hggb. v. Rosenkranz II, p. 218: Die Substanz im Raume,

deren erste Formulierung Eulers Verdienst ist.[1]) Es gehörte für Euler ein gewisser Mut dazu, unter der unbedingten Herrschaft der Newtonschen Fernkräfte den Ursprung aller Kräfte in einer Nahewirkung zu sehen und aus der Undurchdringlichkeit der Materie herzuleiten. Nur ist es von ihm und auch von Kant übersehen worden, daß, wenn sich die Materie nur durch die Kräfte offenbart, sie selbst entbehrlich wird und nur die Kräfte übrigbleiben.

Der dynamischen Ansicht Faradays ist die Energetik wesensverwandt, aber beide unterscheiden sich in der Art des zugrunde gelegten Begriffes. Zu dem Charakter des Kraftbegriffes gehört die Richtung, wenn man will die Tendenz, der Energie dagegen kommt dieses Merkmal nicht zu, sie repräsentiert ein Quantum, allerdings von besonderer Art, wozu die Zerfällbarkeit in zwei Faktoren gehören soll.

In der modernen Energetik leben die alten Anschauungen Leibniz' wieder auf. Es ist merkwürdig, bei Leibniz und Robert Mayer fast wörtlich dieselben Sätze wiederzufinden. Ja, ich möchte sagen, Leibniz steht dem Bilde der Energetik, das Hertz in der Einleitung zu seiner Mechanik entwirft, näher als die späteren Energetiker. Er scheint die Notwendigkeit eines Minimalprinzipes, nach dem der Umsatz der Energie sich regelt, klar erkannt zu haben. Er faßt den leitenden Gedanken allgemein so, daß er alle Naturvorgänge in aristotelischer Art nach finalen Prinzipien erklärt wissen will, während Newton sie auf kausale Prinzipien zurückführt. Er folgt damit den alten Atomistikern und unter den neueren Bacon, der die Kausalerklärung die einzig wissenschaftliche nennt. Was Leibniz und Newton von der modernen Auffassung trennt, ist die entschieden metaphysische Färbung ihrer Lehren, die bei Leibniz eingestanden, bei Newton verhüllt ist. Bei Leibniz ist die Kraft mit der Materie zu einer untrennbaren Einheit verbunden, sie bildet mit ihr erst das wirkliche Wesen, das Leibniz *Monade* nennt. Bei Newton ist die Kraft der Materie nur auf-

den Körper, kennen wir nur durch Kräfte, entweder andere dahin zu treiben (Attraktion) oder vom Eindringen in ihn abzuhalten (Zurückstoßung und Undurchdringlichkeit). Andere Eigenschaften kennen wir nicht, die den Begriff von der Substanz, die im Raume erscheint, und die wir Materie nennen, ausmachen. Der ausführlichen Begründung dieser Anschauungen sind die „Metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaft" gewidmet.

1) Euler hat die ihm eigentümliche Auffassung entwickelt in der Abhandlung Sur l'origine des forces, Mém. de l'Acad. de Berlin 1750, und populär ausgeführt in den Lettres à une Princesse d'Allemagne (1760), Lettre LXVIII—LXXIX. Vgl. dort p. 301: C'est ... l'impénétrabilité des corps qui renferme la véritable origine des forces qui changent continuellement leur état en ce monde, et c'est là le vrai dénouement du grand mystère qui a tant tourmenté les philosophes.

gezwungen und verläßt sie, sowie der Zwang aufhört, die Kraft ist die Wirkungsweise des Geistigen in der Welt auf das Körperliche: konstant ist das Gesetz, aber nicht die Größe der Wirkung.[1]) Für Leibniz dagegen hat die Kraft ein Quantum wie die Materie, und dieses Quantum bleibt unverändert dasselbe: eandem vim in corporibus conservari, sagt er. Die von Newton einwandlos hingenommene Zwiespältigkeit der Kraft löst sich bei Leibniz auf in die Scheidung von potentieller und kinetischer Energie: des *activum thema* und der *vis viva*.

Es ist bekannt, daß sich an den Leibnizschen Begriff der lebendigen Kraft ein heftiger Streit um das wahre Maß der Kräfte, ob nach Leibniz Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit oder nach Descartes Masse mal der einfachen Geschwindigkeit, angeknüpft hat. Dieser Streit hat eine bleibende Bedeutung als ein warnendes Beispiel dafür, wie sehr auch in einer Zeit der mächtig emporblühenden Geistesfreiheit die Menschen geneigt sind, auf eine Schulmeinung blind einzuschwören. Im übrigen ist er spurlos verhallt, die Namen der Hauptstreiter sind vergessen. Was wissen wir noch von einem Bilfinger und einem Hermann? Nur die Bernoullis ragen hoch aus der Menge heraus, und als eine Art Kuriosum ist die Jugendschrift Kants stehen geblieben, in der er, ohne allzu großes Verständnis, zwischen den beiden Ansichten vermitteln will. Man sieht den Streit gewöhnlich als beendet an durch d'Alemberts Dynamik, in der dieser die ganze Fehde als einen Wortstreit hinstellt. Wie ich glaube, nicht ganz mit Recht. Denn die Frage lautete ursprünglich nicht: was ist unter dem Wort Kraft zu verstehen? sondern: welche Größe erhält sich in der Natur?[2])

1) Für Newtons Ansichten sind besonders bezeichnend die folgenden Stellen: Brief an Bentley, Werke hggb. v. Horsley, vol. IV, p. 438: It is inconceivable that inanimate brute matter should, without the mediation of something else, which is not material, operate upon and affect other matter without mutual contact . . . Gravity must be caused by an agent acting constantly according to certain laws . ., und am Ende der Principia: adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente et in iisdem latente, cujus vi et actionibus particulae corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt et contiguae factae cohaerent, et corpora electrica agunt ad distantias majores tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina, et lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur et corpora calefacit, et sensatio omnio excitatur, et membra animalia ad voluntatem movent . . ., kurz vorher: suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est, sed subtilissima et optima et ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis praecipue venire. Die materielle Natur des „Spiritus" scheint hiernach evident, er ist keineswegs mit dem immateriellen Prinzip identisch, das die universelle Gravitation erklären soll.

2) Leibniz sagt ausdrücklich (Math. Werke VI, p. 199): Erunt qui sibi permissum dicent *vim* definire per quantitatem motus—neque hanc ego libertatem cuiquam nego.

Darauf aber hatte Descartes eine falsche Antwort gegeben, und Leibniz hatte diese berichtigt. Allerdings war Leibniz, da er alle Naturvorgänge auf den elastischen Stoß zurückführte, nicht zu einem brauchbaren mechanischen Prinzipe gelangt. Dieses formulierten in exakter Weise 1748 gleichzeitig Euler und Dan. Bernoulli.[1]) Damit verlor es aber, als ein beiläufiges Integral der *mechanischen* Gleichungen, seine zentrale Stellung und ist erst gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts durch Robert Mayer, Joule und Helmholtz wieder zu einer allgemeinen *physikalischen* Bedeutung gekommen.

Leibniz' und Newtons Lehren, so verschieden sie sind, haben das gemeinsam, daß sie die Kraft als ein für die Erfahrung unbegreifliches Prinzip einführen. Das ist ihr Mangel als physikalische Theorie, und von diesem Mangel ist das Descartessche Weltbild frei. Wie Leibniz' Lehre in der *energetischen* Anschauung, so ist Descartes' und Malebranches Lehre in der rein *kinetischen* Auffassung von W. Thomson (Lord Kelvin) wieder aufgelebt, nur daß, was Descartes mit völlig unzulänglichen Hilfsmitteln anstrebt, in Lord Kelvins Wirbeltheorie auf reich ausgebildeten mathematischen und physikalischen Kenntnissen ruht. W. Thomson hat es mit aller Energie ausgesprochen, daß die einzige befriedigende Erklärung der Naturvorgänge die ist, die sie im letzten Grunde auf Bewegungsvorgänge in einer kontinuierlichen, inkompressiblen idealen Flüssigkeit zurückführt[2]). Das aber ist schon bei Descartes der leitende Gedanke gewesen.

Von dieser Anschauung in der Form vollständig, aber in dem Kerngedanken nicht so sehr verschieden ist die Auffassung, die, in de Saint-Venants Vorlesungen[3]) im Keime angedeutet, in Hertz' Mechanik zu voller Entwicklung gekommen ist. Die Hertzsche Mechanik bildet die letzte Etappe in einer Entwicklungsreihe, die sich als die mathematische Auflösung des Kraftbegriffes kennzeichnen läßt. Diese knüpft an die Mechanik der festen Verbindungen an, die Varignon der Newtonschen Mechanik der freien Massenpunkte zur Seite gestellt hat. Während Varignon sich noch auf die *Statik* beschränkte, hat d'Alembert in seiner Dynamik die *Bewegungs*vorgänge in solchen materiellen Systemen mit festen Verbindungen untersucht und mit

1) Mémoires de l'Acad. de Berlin.

2) Er sagt: a configuration of motion in a continuous all-pervading liquid, und fährt dann fort: I do not . . . see how we can ever permanently rest anywhere short of this last view (Popular lectures, vol. 1, p. 229). Vgl. Edinb. R. Society Trans. vol. 25, p. 217 und den Bericht von Love, Math. Ann. Bd. 30, p. 326.

3) Principes mécaniques fondés sur la cinématique (autographiert).

einem unsagbar glücklichen Griff das Prinzip gefunden, das nach ihm benannt ist und alle derartigen Bewegungsvorgänge beherrscht.

Die analytische Durcharbeitung dieses allgemeinen Prinzipes ist Lagranges großes Verdienst. Er brachte es zunächst in eine Form, bei der in *einer* symbolischen Gleichung die Aussage des Prinzipes erschöpft ist, und holte dann aus dieser symbolischen Gleichung die wirklichen Bewegungsgleichungen heraus. Sehen wir diese Gleichungen auf ihre analytische Form hin an, so erscheint das, was wir Kräfte nennen, zurückgeführt auf gewisse Parameter, die in diesen Gleichungen enthalten sind und dieselbe Dimension zeigen wie die Derivierte der lebendigen Kraft nach einer Strecke.

Diese Bewegungsgleichungen haben nun anderseits die Form der Lösung eines Variationsproblems, und in der richtigen Erkenntnis und Formulierung dieses Variationsproblems besteht der Hauptsache nach die mathematische Arbeit, die sich an jene allgemeinen Bewegungsgleichungen geknüpft hat. Einen bedeutenden Anteil an dieser Arbeit hat Lagrange selbst. Den wichtigsten weiteren Schritt hat nach einem kleinen, aber sehr bemerkenswerten Aufsatz von Rodrigues[1]) vielleicht Hamilton[2]) getan, an ihn haben Männer wie Jacobi, Helmholtz u. a. m. angeknüpft[3]).

Hertz griff nun einen besonderen Fall der Bewegungsgleichungen heraus, auf dessen prinzipielle Bedeutung schon J. J. Thomson[4]) hingewiesen hatte, den Fall nämlich, wo die den wirkenden äußeren Kräften entsprechenden Parameter in den Bewegungsgleichungen verschwinden. Indem er dann der bereits 1868 von Beltrami bemerkten Analogie des Problems mit der Riemannschen Theorie allgemeiner Räume nachging, gelang es ihm die Begriffsbestimmungen so zu treffen, daß sich für diesen Fall der Inhalt der Bewegungsgleichungen erschöpfen läßt durch ein Prinzip, das wie eine einfache Wiederholung des alten Beharrungsgesetzes aussieht.

In diesem Hertzschen Prinzipe münden die Minimalprinzipien der Mechanik aus. Es steht dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges seiner Form und seinem prinzipiellen Gehalt nach am nächsten. Aber es ist von den übrigen Prinzipien darin wesentlich verschieden, daß es sozusagen nicht unmittelbar gebrauchsfertig ist. Es erfordert vielmehr erst die Ermittlung der „verborgenen Massen“, durch deren Einführung

---

1) Correspondance sur l'école polyt. t. III (1815).

2) Philos. Transactions 1834, 1835.

3) Vgl. den Bericht über die Prinzipien der Mechanik von Voss, Encyklop. der mathem. Wissenschaften, Bd IV 1, A.

4) Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie (engl. 1888, dtsch. 1890).

es anwendbar wird und die Elimination der Kräfte gestattet. Nur unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß solche verborgene Massen sich in allen Fällen finden lassen, hat es überhaupt allgemeine Bedeutung. Was aber ist geleistet, wenn diese Voraussetzung zugegeben wird? Es ist dasselbe in anderer Form geleistet, was durch Lord Kelvins ideale Flüssigkeit gegeben wird: ein mathematisches Bild der Naturvorgänge. Hertz' materielle Punkte sind — und darin wiederholt er eine alte Theorie von Derodon[1]) — aus mathematischen Punkten zusammengesetzt. Wir haben mathematische Punkte mit mathematisch ausdrückbaren Lagenbeziehungen. Zwischen den Koordinaten der Punkte bestehen entweder bestimmte Gleichungen, oder sie sind als bestimmte Funktionen einer geringeren Anzahl von Parametern gegeben. In dem Bilde dieser mathematischen Zusammenhänge erscheinen alle wirklichen Zusammenhänge in der Welt; alle Kausalzusammenhänge werden dann zurückgeführt auf eine einfache Regel, nach der eine einmal vorhandene Bewegung sich fortsetzt. In der Hertzschen Theorie sind so die drei Kantischen Analogien der Erfahrung,[2]) die alles Naturgeschehen beherrschen: Substanz, Kausalität und Wechselwirkung, auf einen rein mathematischen Ausdruck gebracht.

So vollendet die theoretische Abklärung in der Hertzschen Mechanik ist, so entlegen ist sie doch der unmittelbaren Anschauung und der praktischen Verwendbarkeit. Es ist deshalb in einer Geschichte des Kraftbegriffes neben dieser *idealen* Kraftlehre in der gleichen Weise auch der anderen auf das *Reale* gehenden Entwicklungsreihe zu gedenken, die zu der Ausbildung der technischen Mechanik geführt hat. Diese Entwicklungsreihe hat an den Namen Coulombs anzuknüpfen, der durch die energische Betonung der experimentellen Bestimmung — vielleicht im bewußten Gegensatz zu der damals überwuchernden deduktiven Behandlung — reformierend gewirkt hat. Er suchte die praktischen Probleme auf, begründete den *Begriff* der mechanischen Arbeit, wenn das *Wort* auch erst von Coriolis herrührt, er maß die Arbeitsfähigkeit des Menschen, suchte an den einfachen Maschinen gerade die bisher (trotz ihrer entscheidenden Bedeutung bei jeder wirklichen Verwendung) vernachlässigten Faktoren, die Widerstände, auf und behandelte das technisch wichtige Problem der Stützmauern und Gewölbe. An ihn reiht sich Carnot, der sich ernstlich um eine von allen metaphysischen Eindeutungen freie und den technischen Erfordernissen Rechnung tragende Mechanik bemüht hat. Durch Coriolis, Poncelet und Navier wer-

---

1) Disputatio de atomis, Genevae 1662.

2) Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre, II. Tl., I. Abt. II. Buch, II. Hauptst., III. Abschn.

den diese Ansätze zu einer wissenschaftlichen technischen Mechanik ausgebildet[1]). Poinsot, der auf Monge fußt, zeigt an einfachen Aufgaben die Eleganz einer geometrischen Entwicklung, die Moebius in seinem Lehrbuch der Statik, allerdings mit einer gewissen Entfernung von dem praktischen Problem, zu einem System erhebt.

Die Entwicklung der technischen Mechanik geht, was sich an der aus ihr herausgewachsenen graphischen Statik mit voller Deutlichkeit zeigt, mit der Entwicklung der sog. neueren Geometrie Hand in Hand, ebenso wie die theoretische Mechanik in engster Beziehung zu den analytischen Zweigen der Mathematik, insbesondere der Variationsrechnung, gestanden hat.

Die Geschichte der Minimalprinzipien bildet in der Geschichte der Mechanik ein besonderes Kapitel, das mit Maupertuis' berühmten und berüchtigten Prinzip der kleinsten Aktion beginnt. Die Geschichte dieses Prinzipes will ich nicht hier wiederholen. Sie hat in ihren Anfängen durch das Zerwürfnis, das der Maupertuissche Streit mit Samuel König zwischen Friedrich dem Großen und Voltaire hervorrief, ein weitgehendes Interesse gewonnen, sie mündete dann aus diesem bewegten Kampfe menschlicher Leidenschaften ein in das ruhige Fahrwasser sachlich wissenschaftlicher Arbeit, und die Frage, die bis in unsere Tage die Mathematiker beschäftigte, hat durch Hölders Arbeit[2]) eine gewisse definitive Aufklärung gefunden. Man kann, so zeigte sich, nicht schlechthin von einem Ausdruck reden, der bei allen mechanischen Vorgängen zu einem Minimum wird, dasselbe gilt von ganz verschiedenen Ausdrücken, das Entscheidende sind die Variations*bedingungen*. Damit ist aber der teleologische Schein endgültig zerstört, der das Prinzip umwoben hat.

Aber was für die *finale* Betrachtung gilt, das gilt mit demselben Recht auch für die *kausale* Erklärung. Ich verstehe nicht mehr an der Bewegung eines Körpers, wenn ich sie durch *Differentialgleichungen* behandle, als wenn ich sie als Lösung eines *Variationsproblems* bestimme. Es ist heutzutage ein Gemeinplatz geworden, daß die Physik nichts zu suchen hat als eine einfache Beschreibung der Naturvorgänge und sich hüten muß, in diese Beschreibung mehr hineinzudeuten, als in ihr liegt. So darf sie das Prinzip der Energieerhaltung nicht deuten auf eine geheimnisvolle Substanz, die bei allen Wandlungen in ihrem

1) Die in Betracht kommenden Werke sind zunächst: Carnot, Essai sur les machines en général, 1786, Coriolis, Du calcul de l'effet des machines, 1829, Poncelet, Cours de mécanique appliquées aux machines, 1826, Navier, Leçons de mécanique, 1841.

2) Göttinger Nachrichten 1896. Vgl. auch z. B. Voss, Math. Ann. Bd. 25, p. 264.

quantitativen Maß ungeändert bleibt, sondern die Energie ist ihr nichts als ein auf bestimmte Weise gebildeter zahlmäßiger Ausdruck. Dieser Ausdruck wird nur einer Art kaufmännischer Bilanz unterworfen, bei der die Einnahmen sich genau mit den Ausgaben decken.

Was die Physik heute will, ist nicht eine aufklärerische Tendenz wie im 18. Jahrhundert, es ist nur eine Emanzipation von jedem metaphysischen Glaubensbekenntnis. Wir unterschätzen nicht die Gewalt der persönlichen Überzeugung, wir wissen wohl, wie wichtig und wertvoll das nicht Gewußte und nur Geglaubte sein kann. Aber wir wollen unsere Wissenschaft loslösen von dem Streit der Meinungen, wir wollen reinlich scheiden zwischen Wissen und Glauben, und dazu kann uns nichts besser helfen als der befreiende und klärende Einfluß der unbefangenen historischen Betrachtung.

Randnoten
zu Felix Müllers bibliographischen Artikeln über Euler.

Von G. Eneström in Stockholm.

Angeregt durch die „Berichtigungen" der Herren Ahrens und Stäckel im Oktoberheft der „Jahresberichte" (S. 339—340) erlaube ich mir einige Bemerkungen mitzuteilen, die ich bei der Lektüre der drei bibliographischen Artikel des Herrn Felix Müller über Euler (Jahrg. **16,** S. 185—195; **17,** S. 36—39, 313—318) notiert habe.

S. 186[1]). Die Angabe (Z. 35—37): „Dieses Verzeichnis wurde mit einigen Ergänzungen wieder abgedruckt in den oben angeführten Commentationes arithmeticae I, 1849, und ebenso in den Opera posthuma I, 1862" soll gestrichen werden. Die Einleitung des 1. Bandes der Commentationes arithmeticae enthält allerdings *Ergänzungen* zum fraglichen Verzeichnis sowie eine Liste der zahlentheoretischen Arbeiten Eulers, aber wie Herr Müller dazu kam, die Opera posthuma hier zu erwähnen, ist mir nicht klar.

S. 187. Die französische Übersetzung von Eulers Algebra erschien zuerst 1774 (nicht 1770).

S. 188. Die Angabe (Z. 8), daß Euler 1728 eine Preisschrift „Sur la mâture des vaisseaux" verfaßte, ist nicht nur ungenau, sondern überdies höchst irreleitend. Es gibt nämlich eine anonyme Preisschrift „De la mâture des vaisseaux", der ein Accessit zuerkannt wurde, aber diese Schrift

1) Z. 6, 11 steht unrichtig „praenepotes" statt „pronepotes".

((2) + 63 + (1) S. + 3 Taf.) ist von Ch. E. L. Camus verfaßt (siehe Éloge de M. Camus; Hist. de l'acad. d. sc. [de Paris] 1768, S. 145—146), was auch durch die Worte „par Mr. C." auf den Tafeln angedeutet wird. Eulers Preisschrift, die ebenfalls anonym ist, hat den Titel „Meditationes super problemate nautico, de implantatione malorum" ((2) + 48 S. + 2 Taf.) und ist lateinisch geschrieben. Daß sie erst 1728 verfaßt wurde, bezweifle ich, denn die „Approbation" in betreff der Drucklegung ist schon vom 10. April 1728 datiert, und der Preis war für 1727 ausgeschrieben (siehe unten).

S. 189. Die „Novae tabulae lunares" können kaum ein „Lehrbuch" genannt werden; sie sind ein Auszug aus der „Theoria motuum lunae", die ebenfalls 1772 (nicht 1774, wie Herr Müller angibt) erschien.

S. 191. Meines Wissens trägt nur der 1746 erschienene Sammelband den Titel „Opuscula varii argumenti". Die zwei Bände aus den Jahren 1750 (der lange Titel beginnt mit den Worten: „Conjectura physica") und 1751 („Opusculorum tomus III") werden allerdings allgemein unter diesem Titel zitiert.

S. 192. Als Erscheinungsjahr des 6. Bandes der Petersburger „Commentarii" gibt Herr Müller 1739 an, und in der Tat gibt es Exemplare mit diesem Druckjahr, aber alle Exemplare, die mir selbst zugänglich gewesen sind, haben auf dem Titelblatt unten: „Petropoli, ‖ Typis academiae. CIƆ IƆ CC XXXVIII, also 1738, und fast überall, wo der Band zitiert wird, ist als Druckjahr 1738 angegeben (siehe z. B. die Rezension in den Nova acta eruditorum 1746, S. 597). Nun finden sich am Ende des Bandes astronomische Beobachtungen „per integrum annum MDCCXXXVIII", und man könnte versucht sein, daraus zu schließen, daß der Band sicherlich nicht vor Anfang 1739 erschien. Indessen ist diese Schlußfolgerung unberechtigt, denn die letzte astronomische Beobachtung auf der letzten Seite des Bandes bezieht sich auf 30. Dezember n. St., also 19. Dezember nach der russischen Zeitrechnung, so daß der Band sehr wohl vor dem 1. Januar 1739 erschienen sein kann; Euler schrieb am 20. Dezember (a. St.?) 1738 an Johann Bernoulli: „jam finitus est tomus sextus". Jedenfalls ist das Vorkommen von Exemplaren mit verschiedenen Druckjahren ziemlich auffällig, ich kenne keinen anderen ähnlichen Fall.

S. 195.[1]) Daß der 1768 erschienene Band der „Abhandlungen der Churf. Baierischen Akademie" eine Abhandlung von Leonhard Euler enthält, hat meines Wissens kein früherer Verfasser erwähnt, und ich

1) Warum schreibt Herr Müller S. 195 Z. 1 und 3 von unten „Bernoullli"? Die zitierten Titel haben „Bernoulli".

muß diese Angabe bis auf weiteres als verdächtig betrachten; daß der Band Artikel von Johann Albrecht Euler enthält, ist allgemein bekannt.

S. 37. Daß Eulers Preisschrift über Schiffsmaste nicht den Titel: „Sur la mâture des vaisseaux“ hatte, habe ich schon oben bemerkt; sie wurde übrigens nicht erst 1752, sondern schon 1728 veröffentlicht. Daß der Preis wirklich für 1727 (nicht 1728, wie Herr Müller gegen Fuß behauptet) ausgeschrieben war, geht wohl deutlich aus der Angabe „proposé pour l'année 1727“ hervor, die sich auf dem Titelblatt der gekrönten Abhandlung von P. Bouguer findet; diese Abhandlung hat übrigens das Druckjahr MDCCXXVII.

S. 38. Die Angabe (Z. 16): „Für 1752 (wiederholt von 1748)“ ist unverständlich. Es gibt zwei Eulersche Preisschriften über den fraglichen Gegenstand, nämlich: a) Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter (Paris 1749, 123 S. + 2 Tabellen + 1 Taf.); b) Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne (Paris 1769, (2) + 84 S.; es gibt ein zweites Titelblatt dieser Abhandlung mit: „Recherches sur les *irrégularités* . . .)“. Das Wort „Auch“ Z. 19 bezieht sich also auf eine ganz andere Schrift als die Z. 16—18 erwähnte.

S. 317. Die Zeilen 17—18, 41—47 sollten gestrichen oder wenigstens modifiziert werden, weil sie kaum eine wirkliche Ergänzung enthalten. Denn

1. die deutsche Übersetzung der Nr. 194 bei Hagen (= Nr. 114 bei Fuß) umfaßt nicht 2, sondern 32 Seiten (S. 24—55); 25 statt 55 im Aufsatze des Herrn Valentin ist ein Schreibfehler;

2. der Brief von Euler in den „Lettres concernant le jugement de l'académie“ ist mit Nr. 433 bei Hagen (= Nr. 450 bei Fuß) identisch (siehe hierüber J. H. Graf, Der Mathematiker Johann Samuel König, Bern 1889, S. 33—34);

3. der „Tractatus philosophicus de musica“, von dem ein Exemplar **1740** nach Lissabon versandt wurde (Comm. Ac. Petrop. 9 a. 1737, 1744, Hist. S. XVI), war ganz gewiß das bekannte „Tentamen novae theoriae musicae“ (Nr. 424 bei Hagen, Nr. 529 bei Fuß).

Von den Differentialgleichungen der projektiven Invarianten.

Von E. Study in Bonn.

Es soll hier ein einfacher Lehrsatz begründet werden, den der Verfasser im Jahre 1889 gelegentlich behauptet hat, dessen Richtigkeit aber neuerdings in Zweifel gezogen worden ist.

Zur Verständigung schicken wir das Folgende voraus.

Damit eine ganze rationale Funktion $\mathfrak{F}$ der Koeffizienten von ϱ sogenannten Grundformen eines Gebietes n^{ter} Stufe *Invariante* (besser wohl projektive Invariante) genannt werden soll, muß sie zwei Forderungen erfüllen: Sie muß erstens homogen sein in bezug auf die Koeffizienten jeder einzelnen Grundform; zweitens aber muß sie ungeändert bleiben bei Ausführung einer beliebigen linearen Transformation von der Determinante Eins auf die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, und der dadurch hervorgerufenen (nach F. Franklins Ausdruck *induzierten*) Transformationen der Veränderlichen höherer Stufen ($x_i y_k - x_k y_i$ usw.) und schließlich der Grundformen selbst. Sie wird dann bei Ausführung irgend einer linearen Transformation — die nicht notwendig die Determinante Eins hat — mit einem Faktor reproduziert, der eine Potenz der Transformationsdeterminante ist. Der Exponent dieser Potenz hängt in leicht kenntlicher Weise ab von den Ordnungszahlen der einzelnen Grundformen in bezug auf die Veränderlichen der verschiedenen Stufen, und von den Gradzahlen der Funktion $\mathfrak{F}$ in bezug auf die Koeffizientensysteme der einzelnen Grundformen — Zahlen, die mithin nicht *ganz* nach Belieben angenommen werden können.

Alle diese Forderungen lassen sich durch lineare partielle Differentialgleichungen ausdrücken. Zunächst die Homogeneitätseigenschaften der Funktion $\mathfrak{F}$ durch Eulersche Gleichungen der bekannten Form. Dies gibt ϱ lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die unter den hier genannten Voraussetzungen sämtlich die Funktion $\mathfrak{F}$ explizite enthalten.

Die zweite Forderung, der eine Invariante zu genügen hat, führt zu einem System von $n^2 - 1$ Gleichungen, in denen die Funktion $\mathfrak{F}$ nicht explizite vorkommt. Das Verfahren, das diese Gleichungen liefert, wird wohl am besten mit Hilfe der von S. Lie ausgebildeten Terminologie beschrieben, ist aber Lie nicht eigentümlich; es ist vielmehr, wenn auch unter etwas abweichenden Voraussetzungen, eben in der Algebra

der linearen Transformationen schon viel früher, jedenfalls schon von Aronhold (1863), angewendet worden. Es besteht in folgendem: Man bilde irgend n^2-1 linear-unabhängige *infinitesimale* lineare Transformationen von der Determinante Eins,[1]) entsprechend den Symbolen $A_1 f \cdots A_{n^2-1} f$. Hierauf suche man die zugehörigen *induzierten* Transformationen der Koeffizienten der betrachteten Grundformen, die wiederum gewisse infinitesimale lineare Transformationen von der Determinante Eins sind und eine Gruppe erzeugen. Ihre Symbole seien $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{F} \cdots \mathfrak{B}_{n^2-1} \mathfrak{F}$. Die Gleichungen

$$\mathfrak{B}_1 \mathfrak{F} = 0 \cdots \mathfrak{B}_{n^2-1} \mathfrak{F} = 0$$

sind dann die gesuchten.

Der Inbegriff aller gefundenen $n^2 - 1 + \varrho$ Gleichungen kennzeichnet die zu den vorgeschriebenen Gradzahlen gehörigen Invarianten vollständig (womit nicht gesagt ist, daß es in allen Fällen wirklich solche Invarianten gibt). Lineare Relationen mit *konstanten* Koeffizienten können zwischen diesen Gleichungen nicht stattfinden: Hierfür werden wir hier kurz sagen, die Gleichungen seien „linear-unabhängig".

Insbesondere bestimmen die letzten n^2-1 Gleichungen, oder irgend n^2-1 linear-unabhängige lineare Kombinationen von ihnen, ein lineares System, das alle Gleichungen der Form $\sum b_j \mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ ($b_j =$ const.) umfaßt. Die in diesem System enthaltenen Gleichungen nennen wir *Differentialgleichungen der Invarianten* (der gegebenen Grundformen).[2])

Die Gleichungen $\mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ reichen zur Kennzeichnung der invarianten Funktionen $\mathfrak{F}$ vollständig aus, wenn diese, wie man es ja annehmen kann, schon homogen sind. Die Gleichungen $\mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ oder vielmehr die Differentialausdrücke $\mathfrak{B}_j \mathfrak{F}$ haben aber außerdem noch gewisse Eigenschaften, die von den vorgeschriebenen Ordnungs- und Gradzahlen ganz unabhängig sind. Es bestehen nämlich Gleichungen der Form

$$(\mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_k) = \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_k \mathfrak{F} - \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_i \mathfrak{F} = \sum_1^{n^2-1} c_{iks} \mathfrak{B}_s \mathfrak{F},$$

1) Nach Lies Ausdrucksweise: Man bilde die infinitesimalen Transformationen der speziellen linearen homogenen Gruppe in n Veränderlichen.

2) Wohl so ziemlich in der ganzen Literatur erscheint unter demselben Namen ein System von n^2 Gleichungen. Der Unterschied rührt daher, daß die älteren Autoren — auch noch Gordan — in diesem Zusammenhang mit linearen Transformationen von beliebiger Determinante operiert haben, statt mit solchen von der Determinante Eins. Es ist aber die von uns weggelassene Gleichung — die eine andere Form hat ($\mathfrak{B}^* \mathfrak{F} = \omega \mathfrak{F}$) — für uns überflüssig. Sie ist eine lineare Kombination der im Texte genannten ϱ Eulerschen Gleichungen.

worin c_{iks} $(i, k = 1 \cdots n^2 - 1,\ i \neq k)$ dieselben sogenannten *Zusammensetzungskonstanten* sind, die auch in den Formeln

$$(A_i A_k) = A_i A_k f - A_k A_i f = \sum_1^{n^2-1} c_{iks} A_s f$$

auftreten. Bei simultaner linearer Transformation der Ausdrücke $A_j f$, $\mathfrak{B}_j \mathfrak{F}$ erscheinen andere Konstanten c_{iks}, aber natürlich in beiden Formelgruppen dieselben.

Wir kommen nun zu unserem Thema, indem wir bemerken, daß unter den Gleichungen $\mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ mehrere, vielleicht die meisten, eine Folge der übrigen Gleichungen des Systems sein werden. Ziehen doch die Gleichungen $\mathfrak{B}_i \mathfrak{F} = 0$, $\mathfrak{B}_k \mathfrak{F} = 0$ die Gleichung $\sum c_{iks} \mathfrak{B}_s \mathfrak{F} = 0$ nach sich. Man wird so zu folgender Aufgabe geführt:

Man soll unter den Differentialgleichungen der Invarianten eine möglichst kleine Zahl r solcher Gleichungen finden, die alle übrigen Gleichungen des genannten Systems nach sich ziehen.

Diese Aufgabe läßt sich bis zu einem gewissen Grade *allgemein* behandeln, das heißt, ohne daß es nötig wäre, auf die Beschaffenheit der vorgeschriebenen Grundformen und auf die Gradzahlen der zu suchenden Funktionen $\mathfrak{F}$ einzugehen: Es läßt sich eine gewisse möglichst kleine Zahl r von Differentialausdrücken Af finden, derart, daß die zugehörigen Gleichungen $\mathfrak{B}\mathfrak{F} = 0$ unter *allen* Umständen zur Kennzeichnung der Invarianten $\mathfrak{F}$ hinreichend sind. Dazu braucht man nämlich nur die folgende viel einfachere Aufgabe zu lösen:

Man soll unter den infinitesimalen linearen Transformationen von der Determinante Eins eine möglichst kleine Zahl r derart auswählen, daß aus ihnen durch wiederholte Anwendung des Klammerprozesses $n^2 - 1$ linear-unabhängige infinitesimale Transformationen abgeleitet werden können.

In der Tat bilden ja die Gleichungen $\mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ ein *vollständiges System* linearer partieller Differentialgleichungen oder auch, in einigen sehr speziellen Fällen, ein, wie man sagen darf, *übervollständiges System*, ein System mit einigen überzähligen Gleichungen, nach deren Unterdrückung ein vollständiges System übrig bleibt. Haben nun r infinitesimale Transformationen der Form $\Sigma c_j A_j f$ die in der zweiten Aufgabe geforderte Eigenschaft, so sieht man aus dem Entsprechen der Klammeroperationen, daß die zugehörigen Gleichungen der Form $\Sigma c_j \mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ die Forderung der ersten Aufgabe erfüllen. Wenn aber aus jenen infinitesimalen Transformationen durch den Klammerprozeß weniger als $n^2 - 1$ linear-unabhängige infinitesimale Transformationen entstehen, so werden die zugehörigen Gleichungen $\Sigma c_j \mathfrak{B}_j \mathfrak{F} = 0$ in einem vollständigen System enthalten sein, das möglicher Weise eine geringere Zahl

von Gleichungen umfaßt als das obige, und sie werden dann die Gesamtheit der Gleichungen $\mathfrak{B}_j\mathfrak{F} = 0$ nicht unter allen Umständen zu ersetzen geeignet sein.

Die zweite der genannten Aufgaben ist nicht wesentlich verschieden von der folgenden:

Man soll im Gebiete der n^{ten} Stufe eine möglichst kleine Zahl r von infinitesimalen Kollineationen derart angeben, daß sie in keiner (eigentlichen) Untergruppe der $(n^2 - 1)$-gliedrigen Gruppe aller Kollineationen dieses Gebietes enthalten sind.

Hieraus sieht man, daß nicht nur, wie selbstverständlich, im Falle $n = 2$ die Zahl r den Wert 2 hat, sondern auch in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$. Im Falle $n = 3$ z. B. läßt nach einem bekannten Satze von S. Lie jede kontinuierliche Untergruppe der Gruppe aller Kollineationen (mindestens) einen Punkt oder eine Gerade oder einen irreduzibelen Kegelschnitt in Ruhe. Man braucht also nur zwei infinitesimale Kollineationen derart auszuwählen, daß sie keine der genannten dreierlei Figuren gleichzeitig in Ruhe lassen. Die Bemerkung, auf die wir eingangs hingedeutet hatten, besagt nun, daß die Vermutung zutreffend ist, die man sich hiernach bilden wird:

Die zuvor mit r berechnete Zahl hat (bei jedem Werte von n) den kleinsten überhaupt in Betracht kommenden Wert 2.

Die Lieschen Symbole $A_j f$ der „infinitesimalen linearen Transformationen von der Determinante Eins" sind, wie man unmittelbar sieht, sämtlich enthalten in der Form $\Sigma c_{ik} x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$, worin die n^2 konstanten Koeffizienten an die Bedingung $\Sigma c_{ii} = 0$ gebunden sind. Jedem solchen Symbol kann man eine bilineare Form mit kontragredienten Veränderlichen eindeutig-umkehrbar zuordnen — nämlich die Form $\Sigma c_{ik} x_i u_k$ —, die dann, wegen der Bedingung $\Sigma c_{ii} = 0$ unter den (umfassenderen) Begriff der *Normalform* fällt. Diese bilineare Normalform kann dann das entsprechende Liesche Symbol vertreten: Erklärt man, unter Benutzung der in der Theorie der bilinearen Formen üblichen Rechnungsregeln, einen „Klammerprozeß" für zwei bilineare Formen A, B durch die Formel $(\mathsf{AB}) = \mathsf{AB} - \mathsf{BA}$, so ist (AB) immer eine (möglicherweise identisch verschwindende) Normalform, insbesondere also auch dann, wenn A und B schon solche waren. Ferner sind die Gleichungen

$$(A_i A_k) = A_i A_k f - A_k A_i f = \Sigma c_{iks} A_s f,$$
$$(\mathsf{A}_i \mathsf{A}_k) = \mathsf{A}_i \mathsf{A}_k - \mathsf{A}_k \mathsf{A}_i = \Sigma c_{iks} \mathsf{A}_s$$

jede eine Folge der anderen, wenn die Symbole $A_j f$ und die bilinearen Formen A_j einander zugeordnet sind. Daher kann obiger Lehrsatz schließlich auch so ausgedrückt werden:

Unter den bilinearen Normalformen eines Gebietes n^{ter} Stufe kann man (auf mannigfache Art) deren zwei so auswählen, daß aus ihnen durch wiederholte Anwendung des Klammerprozesses das vollständige System aller $n^2 - 1$ linear-unabhängigen bilinearen Normalformen jenes Gebietes hervorgeht.

Alles, was wir bis hierher vorgetragen haben, ist eine unmittelbare Folge bekannter Lehrsätze von S. Lie, und es ist überdies, zusammen mit weiteren Folgerungen, auf die wir hier nicht einzugehen brauchen[1]), in einer älteren Schrift des Verfassers auseinandergesetzt worden (Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889, II § 15—18; siehe insbesondere S. 167 und Anmerkung 32, S. 207). Was noch fehlt, ist lediglich der Beweis der letzten — dort nur beiläufig aufgestellten — Behauptung (in den Fällen $n > 4$). Diese offenbar nicht sehr beträchtliche Lücke wollen wir nunmehr ausfüllen.

Wir verstehen unter $c_1 \cdots c_n$ ein System von konstanten (Verhältnis-)Größen, deren Summe gleich Null ist, und die außerdem so beschaffen sind, daß keine zwei der zyklisch geordneten Differenzen $c_1 - c_2$, $c_2 - c_3 \cdots c_{n-1} - c_n$, $c_n - c_1$ einander gleich sind; ein zweites System von n Konstanten, deren keine gleich Null ist, werde $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ genannt. Wir betrachten dann die beiden Normalformen

$$\mathsf{A} = c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2 + \cdots + c_n x_n u_n,$$

$$\mathsf{A}_0 = \gamma_1 x_1 u_2 + \gamma_2 x_2 u_3 + \cdots + \gamma_n x_n u_1.$$

---

1) Es handelt sich unter anderem um eine Durchführung der hier nur angedeuteten Rechnungen, wodurch natürlich die Berufung auf Lies allgemeine Theorie unnötig wird. Diese Rechnungen fallen ganz übersichtlich aus bei Gebrauch der heute so ziemlich in Acht und Bann getanen *symbolischen Methode.* Wie solche Rechnungen ausgesehen haben würden, wenn wir gleich anderen ein Verdienst darin gesucht hätten, diese so sehr bequemen Abkürzungen zu vermeiden, das mag eine Formel zeigen — noch lange nicht die schlimmste — die wir einem modernen Schriftsteller entlehnen:

$$\{\nabla_{xy}\nabla_{yz}\}_f = \sum \frac{\partial}{\partial a_{ikl\cdots}} \left| \begin{matrix} \alpha_{i_1 k_1 l_1 \cdots}, & \beta_{i_1 k_1 l_1 \cdots} \\ \dfrac{\partial \alpha_{ikl\cdots}}{\partial a_{i_1 k_1 l_1 \cdots}}, & \dfrac{\partial \beta_{ikl\cdots}}{\partial a_{i_1 k_1 l_1 \cdots}} \end{matrix} \right|.$$

Wenn ein Autor sich in solchem Irrgarten von hier ganz überflüssigen Indizes nur mit einiger Mühe zurechtfindet, so kann das nicht wundernehmen.

Übrigens braucht wohl kaum gesagt zu werden, daß der Verfasser an jenem vor nunmehr zwanzig Jahren geschriebenen Buche auch vieles auszusetzen findet. Wir erwähnen hier, als besonders störend, den gelegentlichen Gebrauch des Wortes *Kollineation* in einem Sinne, der auch die zuweilen so genannten ausgearteten Kollineationen umfaßt.

Aus ihnen entsteht durch den Klammerprozeß die Reihe der Normalformen

$$\mathsf{A}_1 = (\mathsf{A}\mathsf{A}_0) = \mathsf{A}\mathsf{A}_0 - \mathsf{A}_0\mathsf{A}, \quad \mathsf{A}_2 = (\mathsf{A}\mathsf{A}_1) = \mathsf{A}\mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_1\mathsf{A}, \cdots$$

$$\mathsf{A}_{n-1} = (\mathsf{A}\mathsf{A}_{n-2}) = \mathsf{A}\mathsf{A}_{n-2} - \mathsf{A}_{n-2}\mathsf{A}, \quad \text{wo}$$

$$\mathsf{A}_k = (c_1 - c_2)^k \gamma_1 x_1 u_2 + \cdots + (c_n - c_1)^k \gamma_n x_n u_1 .$$

Nunmehr lassen sich die bilinearen Normalformen $x_1 u_2, x_2 u_3, \ldots x_n u_1$ linear ausdrücken durch $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_{n-1}$. Durch erneute Anwendung des Klammerprozesses entstehen dann alle Normalformen

$$x_i u_k, \; x_i u_i - x_k u_k \, (i \neq k; \; i, k = 1 \cdots n),$$

unter denen die $n(n-1)$ Formen $x_i u_k$ zusammengenommen etwa mit irgend $n-1$ unter den Formen

$$x_1 u_1 - x_2 u_2, \; x_2 u_2 - x_3 u_3, \cdots x_n u_n - x_1 u_1$$

linear-unabhängig sind.

Die den Lieschen Symbolen

$$Af = c_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + c_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$A_0 f = \gamma_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \gamma_{n-1} x_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

zugeordneten Gleichungen $\mathfrak{B}\mathfrak{J} = 0$, $\mathfrak{B}_0\mathfrak{J} = 0$ *werden also zur Kennzeichnung der Invarianten der vorgeschriebenen Grundformen bei gegebenen Gradzahlen dieser Invarianten hinreichen.* Die Erweiterung der ganzen Betrachtung über den Bereich der ganzen rationalen Invarianten hinaus ist selbstverständlich; ebenso auch, daß für die sogenannten Kovarianten (Kontravarianten, Zwischenformen), *die nichts anderes sind als spezielle Invarianten,* das Vorgetragene ebenfalls gilt.

Bei dem geführten Beweise wurde eine evidente Tatsache benutzt, die so ausgedrückt werden kann, daß n in einen einzigen Zyklus geordnete sogenannte projektive Schiebungen mit Symbolen der speziellen Form $x_i u_k$ oder $x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(i \neq k)$ nicht in einer Untergruppe der $(n^2 - 1)$-gliedrigen Gruppe aller Kollineationen liegen. Man sieht sofort, daß n Schiebungen der bezeichneten besonderen Art, wenn sie nicht auf die bezeichnete Weise zyklisch geordnet sind, stets in einer Untergruppe der Gruppe aller Kollineationen enthalten sind, und daß weniger als n infinitesimale projektive Schiebungen die gleiche Eigenschaft unter allen Umständen haben.

Setzen wir allgemein $A_{ik} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(i \neq k)$, so erhalten wir daher in den Gleichungen $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{J} = 0$, $\mathfrak{B}_{23}\mathfrak{J} = 0, \cdots \mathfrak{B}_{n,1}\mathfrak{J} = 0$ ein System

partieller Differentialgleichungen, das, zusammen mit den Homogeneitäts bedingungen, zur Charakterisierung der Invarianten ebenfalls ausreichend ist. Mit Hilfe dieser n zyklisch geordneten Gleichungen wird man die etwanige Invarianteneigenschaft einer vorgelegten Funktion $\mathfrak{F}$ mit geringerem Rechnungsaufwand feststellen können als mit Hilfe der zuvor angeführten zwei Gleichungen. (Ternäre Formen, S. 167; vgl. auch S. 174.)

Wir haben die vorausgehenden Erörterungen so ausführlich gestaltet, weil wir uns dem Eindruck nicht entziehen können, daß das Verhältnis der Algebra der linearen Transformationen zur Lieschen Gruppentheorie nicht immer deutlich genug erkannt worden ist.

Wir besprechen hier noch eine kürzlich erschienene Arbeit des Herrn Fr. Meyer, der — wenigstens nach seiner Ansicht — dieselbe Aufgabe behandelt hat, von der wir hier geredet haben, und der zu Ergebnissen gelangt zu sein glaubt, die mit dem Vorgetragenen unvereinbar sind.[1]) Diese Untersuchung dürfte in mehrfacher Hinsicht lehrreich sein.

Der genannte Autor stellt „die schwierigere (?) Frage nach den höheren (!) Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen der Invarianten". Sodann läßt er sich also vernehmen:

„Diese grundlegende Frage (!!) ist fast gleichzeitig von F. Deruyts, E. Study und L. Kronecker in Angriff genommen worden . . . Im folgenden wird das Problem . . . vollständig gelöst."

Den Auseinandersetzungen, die Herr Meyer über das Verhältnis seiner eigenen Leistung zu denen seiner Vorgänger gibt, entnehmen wir zweierlei: Erstens, daß er glaubt, in einem System von $n+1$ „Differentialgleichungen der Invarianten" eine *möglichst weitgehende* Reduktion der Anzahl solcher Gleichungen erreicht zu haben. Sodann, daß er seinen Lesern jeden Hinweis auf die — bewiesenen oder nicht bewiesenen — *Resultate* des Verfassers vorenthält. Der von einem falschen Zitat begleitete Satz „Study reduziert in den Fällen $n = 2$ und 3 die Anzahl der Gleichungen mittels des Poissonschen Klammerprozesses" umfaßt alles, was Herrn Meyer im Hinblick auf sein eigenes Ziel von des Verfassers Untersuchung als mitteilungswert erschienen ist.[2])

---

1) *Über die Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen der Invarianten.* Leipz. Ber. 1908, S. 190—210, und vorher schon für $n = 3$ Gött. Nachr. S. 219 u. ff.

2) Da immerhin die Möglichkeit vorlag, daß die zunächst in Betracht kommenden Stellen Herrn Meyer am Ende wirklich entgangen waren, so hat ihn der Verfasser brieflich darauf aufmerksam gemacht. In seiner Antwort hat dann Herr Meyer selbst jeden Zweifel über diesen Punkt beseitigt.

Wir befinden uns mit der Autorität des Herrn Meyer in Diskrepanz schon in bezug auf die Umgrenzung des Invariantenbegriffs. Invarianten sind ihm solche analytische Funktionen der Koeffizienten einer *oder mehrerer* Grundformen, die nach Ausführung irgend einer linearen Transformation und der dadurch induzierten Transformationen einen Faktor annehmen, der eine Potenz der Transformationsdeterminante ist. Sind zum Beispiel

$$a_1 x_2 - a_2 x_1, \; b_1 x_2 - b_2 x_1, \; c_1 x_2 - c_2 x_1$$

drei binäre lineare Formen, so ist nach dieser Definition der Ausdruck

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 c_2 - a_2 c_1)$$

eine Invariante, ebenso der Quotient $(a_1 b_2 - a_2 b_1):(a_1 c_2 - a_2 c_1)$ eine (absolute) Invariante. Der Ausdruck

$$(a_1 x_2 - a_2 x_1) + (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

würde folgerecht als Kovariante zu bezeichnen sein. (Vgl. Clebsch, Binäre Formen S. 4.)

Es ist das Aronholds Invariantenbegriff, den wohl die Mehrzahl der späteren Autoren unverändert übernommen hat (nicht so Gordan und der Verfasser). Wir halten es für unzweckmäßig, daß gerade dieser Begriff in den Mittelpunkt der Theorie gestellt wird (vgl. Clebsch, Binäre Formen S. 5), wollen aber mit Herrn Meyer nicht darüber rechten; worauf es hier ankommt, ist lediglich, daß die „Invarianten" der einen oder anderen Art *nicht* (allgemein) durch dieselben Differentialgleichungen gekennzeichnet werden können.

Wir nehmen jetzt, um Herrn Meyer weiter folgen zu können, seinen Invariantenbegriff, wie er ist. Dann ergeben sich (wenn $\varrho > 1$, nicht $n^2 - 1 + \varrho$, sondern) n^2 Differentialgleichungen, als „Differentialgleichungen der Invarianten", die unser Autor mit $\nabla_{ik} = 0$ bezeichnet. Das lineare System dieser Gleichungen hätte nun sofort in ein vollständiges oder übervollständiges System von $n^2 - 1$ Gleichungen $\mathfrak{B}_j \mathfrak{J} = 0$ und eine weitere Gleichung $\mathfrak{B}^* \mathfrak{J} = \omega \mathfrak{J}$[1]) gegliedert werden können. Damit würde zum Vorteil der Sache von vornherein der Umstand zum Ausdruck gekommen sein, daß die n^2-gliedrige Gruppe aller linearen Transformationen eine $(n^2 - 1)$-gliedrige und eine (ausgezeichnete) eingliedrige kontinuierliche invariante Untergruppe hat. Die Ausnutzung eines Satzes über gleich-

1) Siehe Seite 409, Anmerkung 2). In der Bezeichnungsweise des Herrn Meyer ist das die Gleichung $\nabla_{11} + \cdots + \nabla_{nn} = 0$, entsprechend der „Summe der Prozesse ∇_{rr}" (!). Die übrigen Gleichungen sind etwa diese: $\nabla_{i\varkappa} = 0$ $(i \neq \varkappa)$, $\nabla_{ii} - \nabla_{\varkappa\varkappa} = 0$ $(\varkappa = i + 1)$. Vgl. Aronhold, Crelles J., Bd. 62 (1863), S. 301.

zusammengesetzte Gruppen (des Satzes über das mehrfache Auftreten derselben Zusammensetzungskonstanten c_{iks}) würde sodann eine Menge umständlicher Rechnungen entbehrlich gemacht haben. Indessen scheinen solche Überlegungen unserem Autor nicht recht geläufig zu sein, wiewohl er durch die Widmung seiner Arbeit sich als Bewunderer von Lie zu erkennen gibt. Auch das Rechnen mit bilinearen Formen mußte er teilweise von neuem entdecken, in Gestalt seiner „Erweiterung des Klammerprozesses", einer „symbolischen Multiplikation *linearpartieller Schiebungsprozesse*" (!!). — Diese methodischen Mängel finden sich zusammen mit Unklarheiten, wie sie namentlich in folgendem Satze hervortreten:

„Die n^2 Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ sind linearunabhängig und bilden nach Clebsch ein vollständiges System, d. h. durch Differentiation und Elimination lassen sich [aus ihnen] keine neuen Gleichungen gewinnen".

Was für ein Gedanke Herrn Meyer „vorgeschwebt" haben wird, kann man ja bei einiger Divinationsgabe erraten. Indessen sind in dem Sinne, auf den es in der Theorie der vollständigen Systeme ankommt, die Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ nicht immer linear-unabhängig. Sodann können sie, wenn $\omega \neq 0$ ist, überhaupt kein vollständiges System bilden *nach Clebschs Definition* dieses Begriffs. Diese Definition, auf die ausdrücklich hingewiesen wird, ist ferner *nicht* enthalten in dem mit *d. h.* eingeleiteten Satze unseres Zitates; und schließlich ist der Inhalt dieses Satzes, selbstverständlicher Weise, gar nicht richtig. Unzutreffend ist natürlich auch, was gleich darauf über die Bedeutung gesagt wird, die die angeführten Behauptungen *nach S. Lie* haben sollen. —

Unser Autor ist also, entgegen seiner eigenen Meinung, aber gleich fast allen seinen Vorgängern, insbesondere auch gleich dem von ihm zitierten Forsyth, dem durch Lies Theorie der kontinuierlichen Gruppen vorgezeichneten Wege *nicht* gefolgt. Er hat sich aber außerdem die Ansicht gebildet, daß es nicht auf das lineare System der Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ und auf dessen sogenannte Kombinanteneigenschaften ankomme, sondern lediglich auf die ihm als besonders „einfach" erscheinenden n^2 *einzelnen* Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$. Alle seine Formulierungen werden von diesem Gedanken beherrscht. Er polemisiert sogar aus diesem Gesichtspunkt (auf eine dem Verfasser nicht verständliche Art) ein wenig gegen Aronhold, dessen — mit Recht hochgeschätzte — Arbeit in anderer Hinsicht gewiß nichts weniger als einwandsfrei ist.[1])

[1]) In den verschiedenen als Materialsammlungen wertvollen Berichten über Invariantentheorie, die Herr Fr. Meyer erstattet hat, vermissen wir solche Kritik. Der ganze Stoff harrt noch der kritischen Durcharbeitung.

Erst Herr Forsyth (?) soll den Fortschritt bewirkt haben, der unserem Autor so bemerkenswert erscheint.

Dieses Vorurteil ist die Quelle des Widerspruchs, den Herr Meyer zwischen seinem Resultate und den Angaben des Verfassers gefunden zu haben glaubt.

Daß man nicht, jedenfalls nicht allgemein, mit weniger als $n+1$ der Gleichungen $\nabla_{ik}=0$ auskommen kann, wenn es denn durchaus einige unter diesen Gleichungen selbst sein müssen, ist richtig. Es ist das ein selbstverständliches Corollar zu dem längst bekannten übrigens ebenfalls selbstverständlichen Satze über die zu den Symbolen $x_1 u_2$, $x_2 u_3 \ldots x_n u_1$ gehörigen infinitesimalen projektiven Schiebungen (S. 413). Richtig ist es aber auch, daß man bei anderer Kombination weitere Reduktionen — und zwar auch hier bis zu *zwei* Gleichungen — erreichen kann. —

Wir vermögen aus den angegebenen Gründen in der besprochenen Arbeit einen Fortschritt nicht zu erkennen. Vielmehr hat ihr Urheber in der allgemeinen Theorie der Invarianten längst Klargestelltes wieder verwirrt, mit Kanonen hat er nach Spatzen geschossen, und in der Behandlung seines besonderen Themas ist er dogmatisch zu Werke gegangen und auf halbem Wege stehen geblieben wie übrigens vor ihm schon Kronecker. Die zum Teil durch Ignorieren geübte und daher allerdings nur dem Eingeweihten ganz verständliche Kritik, die wir oben reproduziert haben, entbehrt der Berechtigung. Dies würde auch Herrn Meyer nicht haben entgehen können, wenn er es nicht verabsäumt hätte, sich den Grund des bemerkten vermeintlichen Widerspruchs vor Veröffentlichung seiner Arbeit deutlich zu machen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Vorlesungen über Zahlentheorie.

Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper.

Von **Dr. J. Sommer,**

Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig.

Mit 4 Figuren im Text. [VI u. 361 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 11.—

Seitdem Gauß die Arithmetik durch Aufnahme der komplexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ erweitert hat, ist eine großartige Theorie der allgemeinen algebraischen Zahlen entstanden, deren Entwicklung vor allem an die Namen Kummer, Dirichlet, Dedekind, Kronecker und einiger rühmlichst bekannten neueren Mathematiker sich knüpft. Mehrfach hat diese Theorie ihr Aussehen stark verändert, und wir besitzen von den berufensten Seiten: Dedekind, Hilbert und Kronecker-Hensel wie neuerdings von Bachmann zusammenfassende Werke, die den Stoff von verschiedenen Gesichtspunkten aus auffassen. Jedes dieser Werke bedeutet nicht nur in bezug auf den Inhalt, sondern auch in Anbetracht der formalen Abrundung der ganzen Darstellung einen sehr wesentlichen Fortschritt für die allgemeine Zahlentheorie. Da diese aber alle den allgemeinen Fall der Theorie umfassen und für Anfänger schwer zu lesen sind, so dürfte wohl eine Darstellung nützlich sein, die auf möglichst elementare Weise in die Probleme und Tatsachen der Zahlkörpertheorie einführt. Dieser Zweck wird von selbst durch eine spezielle Behandlung der einfachsten, quadratischen und kubischen Zahlkörper erreicht. Zum Studium des vorliegenden Buches sind nur wenige Vorkenntnisse aus der Algebra notwendig. Der Verfasser hat gesucht, überall mit den einfachsten Methoden zum Ziele zu gelangen, und hat sich überhaupt derjenigen Behandlung der Theorie angeschlossen, die ihm als die einfachste erscheint, und die man in den Arbeiten von Hurwitz, Hilbert und Minkowski niedergelegt findet.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage.

Von

Dr. W. Felgentraeger,

Technischem Hilfsarbeiter bei der Kais. Normal-Eichungs-Kommission in Berlin.

Mit 125 Textfiguren. [VI u. 310 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 8.—

Verfasser sucht im vorliegenden Werk unter eingehender Würdigung der Literatur, vornehmlich aber gestützt auf eigene Erfahrungen und Untersuchungen, sowohl den Mechaniker über die Konstruktion, als auch den Metronomen, Physiker und Chemiker über Auswahl, Behandlung und Gebrauch der Wage eingehend zu unterrichten.

Es werden in der „Theorie“, die das erste Kapitel bildet, auch die von den Lehrbüchern meist übergangenen, aber doch wichtigen Fehler wie Abweichung der Schneiden vom Parallelismus, Eigenschwingungen der Endbelastungen usw. behandelt. Es folgen Kapitel, in denen die Konstruktionsbedingungen der einzelnen Teile dargelegt und unter Beifügung zahlreicher Figuren und Zahlenangaben auf wirklich ausgeführte Instrumente kritisch angewandt werden. Das die gesamten Instrumente behandelnde Kapitel schließt zusammenfassend den der Konstruktion gewidmeten Teil ab.

Im folgenden Kapitel ist die Justierung und Bestimmung der Konstanten erörtert; den Schluß bilden die Wägungsmethoden, wohl der für den wissenschaftlichen Beobachter wichtigste Teil. Durch Register ist erreicht, daß man das Buch auch als Nachschlagewerk verwenden kann.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

Gemäß einem auf der Jahresversammlung zu Dresden gefaßten Beschlusse (s. Jahresbericht **16**, S. 571) wird der gegenwärtige Band des Jahresberichts probeweise zwei verschiedene Paginierungen erhalten, so daß der Band und auch jedes Heft aus zwei Abteilungen bestehen wird. Die 1. Abteilung wird umfassen: I. Angelegenheiten der Vereinigung; II. Berichte, Vorträge und Abhandlungen; III. Nekrologe; IV. Sprechsaal für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Die 2. Abteilung wird in der bisher üblichen Weise umfassen: I. Mitteilungen und Nachrichten; II. Literarisches. Durch diese Zweiteilung und die besondere Paginierung jeder Abteilung wird eine bessere Übersicht des fertigen Bandes erreicht werden.

Gleichzeitig sei darauf aufmerksam gemacht, daß der Ergänzungsbände II. Band fertig vorliegt. Er enthält: A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil. Mit 26 Figuren im Text. (X, 331 S.) Bei direktem Bezuge von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, erhalten die Mitglieder der Vereinigung den satzungsgemäßen Vorzugspreis.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Oktober—Dezember 1907.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Herr Dr. Wolfgang Vogt, Assistent an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Kurvenstraße 21.

Herr Michel Petrovitch, Professor der Mathematik an der Universität, Belgrad (Serbien), Kossantch-Venac 26.

Herr Dr. phil. Robert König, Göttingen, Bertheaustr. 2.

Herr Dr. Arthur Korn, Professor an der Universität, München, Hohenzollernstr. 1.

Herr Dr. Heinrich Beck, Oberlehrer, Hannover, Engelsbosteler Damm 41/42.

Herr Dr. W. Broszat, Kandidat d. höh. Lehramts, Stettin, Birkenallee 22b.

Herr Edwin Schulze, Kandidat d. höh. Lehramts, Braunschweig, Fasanenstraße 15.

Herr Dr. A. Morgenstern, wissenschaftl. Hilfslehrer am Luisengymnasium, Berlin, Stephanstr. 51.

IV. Internationaler Mathematiker-Kongreß. [Unter dem Hohen Patronate Sr. M. des Königs von Italien.]

Rom, Januar 1908.

Hochgeehrter Herr,

Das Organisationskomitee des *vom 6. bis 11. April 1908 in Rom* stattfindenden *IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses* beehrt sich Ihnen mit der erneuten Einladung zur Beteiligung das vorläufige Programm dieser Versammlung zur Kenntnis zu bringen.

Sonntag, 5. April, abends $9\frac{1}{2}$ Uhr: Begrüßung der Kongreßteilnehmer in der „Aula Magna“ der Universität durch den Rektor.

Montag, 6. April, vormittags 10 Uhr: Eröffnung des Kongresses auf dem Kapitol, im Saale der Horatier und Kuriatier.

Montag, 6. April, nachmittags 3 Uhr: Allgemeine Sitzung. Wahl des Vorstandes. Bericht über das Ergebnis der Preisausschreibung auf die „Medaglia Guccia“. *Erster und zweiter Vortrag.*

Dienstag, 7. April, vormittags 9 Uhr: Bildung der Sektionen; Sektionssitzungen.

Dienstag, 7. April, nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr: Allgemeine Sitzung. *Dritter und vierter Vortrag.*

Mittwoch, 8. April, vormittags 9 Uhr: Sektionssitzungen.

Mittwoch, 8. April, nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr: Allgemeine Sitzung. *Fünfter und sechster Vortrag.*

Donnerstag, 9. April, vormittags 9 Uhr: Sektionssitzungen.

Donnerstag, 9. April, nachmittags 3 Uhr: Besuch des Palatins auf Einladung des Unterrichtsministers.

Freitag, 10. April, vormittags 9 Uhr: Sektionssitzungen.

Freitag, 10. April, nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr: Allgemeine Sitzung. *Siebenter und achter Vortrag.*

Samstag, 11. April, vormittags 9 Uhr: Sektionssitzungen.

Samstag, 11. April, nachmittags 3 Uhr: Allgemeine Sitzung. *Neunter und zehnter Vortrag.* Schluß des Kongresses und Bestimmung von Ort und Zeit des V. Internationalen Mathematiker-Kongresses.

Sonntag, 12. April: Ausflug in die Villa Adriana und Luncheon in Tivoli.

An einem noch zu bestimmenden Abende wird auf Veranstaltung der Stadtvertretung von Rom ein Empfang in den Kapitolinischen Museen stattfinden.

Sektionen. Der Kongreß wird aus vier Sektionen bestehen, die wieder, falls die Zahl der angemeldeten Vorträge es erforderlich machen sollte, in Unterabteilungen zerlegt werden können.

I. Sektion: *Arithmetik, Algebra, Analysis*; Einführende die Herren Arzelà, Capelli, Pascal, Pincherle.

II. Sektion: *Geometrie;* Einführende die Herren Bianchi, Segre.

III. Sektion: *Mechanik, Mathematische Physik, Geodäsie, Angewandte Mathematik;* Einführende die Herren Levi-Civita, Luiggi, Pizzetti, Toja.

IV. Sektion: *Philosophische, historische und didaktische Fragen;* Einführende die Herren Enriques, Loria, Vailati.

In der Gruppe: Angewandte Mathematik der III. Sektion ist auch die Versicherungsmathematik (Einführender Herr Toja) einbegriffen, welche hier

zum ersten Male als besonderer Gegenstand auf einem Mathematiker-Kongresse erscheint.

Sitz des Kongresses. Alle auf die Eröffnungssitzung folgenden Sitzungen werden in den Räumen der *Accademia dei Lincei* (Palazzo Corsini, Via della Lungara, 10) abgehalten werden. Ebenda wird auch vom 1. bis 15. April das Sekretariat des Kongresses seinen Sitz haben.

Preisermäßigung für die Kongreßteilnehmer. Die Generaldirektion der Eisenbahnen gewährt den Kongressteilnehmern eine Ermäßigung von 40—60% (je nach der Entfernung) auf die tarifmäßigen Preise der Fahrkarten. Diese Preisermäßigung wird erteilt gegen Vorweisung eines eigens dafür ausgegebenen Fahrscheinheftes, welches auch alle sonstigen Angaben enthält. Die Gültigkeit erstreckt sich, *vom 25. März 1908* angefangen, auf die Reise vom Wohnort des Kongreßteilnehmers, beziehungsweise von der Grenze, nach Rom, sowie nach Schluß des Kongresses auf weitere zehn beliebige Reisen innerhalb Italiens, bis zum 5. Mai 1908.

Kongreßteilnehmern, welche von den italienischen Inseln herkommen, gewährt die «Navigazione Generale Italiana» ein Hin- und Rückfahrtsbillet auf ihren Schiffen mit 50% Preisermäßigung.

Die Kongreßteilnehmer haben in der Zeit vom 1. bis 12. April 1908 gegen Vorweisung der Mitgliedskarte freien Eintritt in die staatlichen und städtischen Museen Roms.

Wohnungen. Der Verein für Fremdenverkehr (*Associazione Nazionale per il movimento dei Forestieri*, sede di Roma, Via della Colonna, 52) übernimmt es, für die Kongreßteilnehmer Wohnungen in empfehlenswerten Hotels oder Pensionen, sowie auch Privatwohnungen (Preise zwischen *4* und *12* Francs pro Tag) zu besorgen. Zu diesem Zwecke wird der genannte Verein im Laufe des März 1908 den Kongreßteilnehmern und jedem, der es sonst verlangt, ein Rundschreiben mit näheren Angaben zuschicken und ist auch bereit, auf besondere Anfragen den Kongreßteilnehmern Auskunft zu erteilen. Der genannte Verein wird überdies am 4., 5. und 6. April für die Kongreßteilnehmer auf dem Bahnhofe Rom-Termini ein Bureau für unentgeltliche Auskünfte offen halten.

Damenkomitee. Zum Empfang der Damen der Kongreßmitglieder wird ein Damenkomitee gebildet werden.

Veröffentlichungen. Während des Kongresses wird ein Tageblatt herausgegeben werden, enthaltend die Namen und Adressen der anwesenden Kongreßmitglieder, die Berichte über die Arbeiten des vorhergegangenen und das Programm des folgenden Tages, ferner alle den Kongreßteilnehmern sonst dienlichen Auskünfte (Festlichkeiten usw.). Die Vorträge und Mitteilungen an den Kongreß werden zu einem Band vereinigt, dessen Herausgabe der *Circolo Matematico di Palermo* unter Leitung des Direktors der Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo übernommen hat. Die Verfasser werden gebeten, das Manuskript ihrer Vorträge bis *spätestens 12. April 1908* dem Generalsekretär des Kongresses zu übergeben. Die Abhandlungen in fremden Sprachen (deutsch, französisch, englisch) müssen (mit Ausnahme der Formeln) mit der Schreibmaschine geschrieben sein. Etwaige Klischees sind gleichzeitig mit dem Manuskript beizustellen. Die Verfasser erhalten 100 Sonderabdrücke kostenfrei.

Anmeldung zum Kongreß. Der Beitrag zum Kongreß beträgt Francs *25* (für das Ausland in Gold) und ist an Herrn Prof. Vincenzo Reina, Schatzmeister des IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Piazza S. Pietro in Vincoli, 5, Roma einzusenden. Bei Einzahlung vor dem 25. März 1908 wird die Mitgliedskarte und das obenerwähnte Fahrscheinheft portofrei an die Adresse des Teilnehmers eingeschickt. Trifft der Beitrag später ein, so werden die Mitgliedskarte und das Fahrscheinheft in Rom zur Verfügung des Kongreßteilnehmers gehalten.

Die Kongreßmitglieder haben das Recht auf Teilnahme an sämtlichen Sitzungen und Festlichkeiten des Kongresses, auf den Genuß der Fahrpreisermäßigungen, den freien Eintritt in die Museen und endlich auf den unentgeltlichen Bezug eines Exemplares der Verhandlungen des Kongresses. — Dieselben Rechte, mit Ausnahme des Bezuges der Verhandlungen, stehen gegen einen Beitrag von *15* Francs für die Person den Familienangehörigen der Kongreßmitglieder zu.

Das Organisationskomitee.

Für alle auf diesen Kongreß bezüglichen Auskünfte wende man sich an den Generalsekretär des Organisationskomitees: Prof. G. Castelnuovo, 5, Piazza S. Pietro in Vincoli, Rom (Italien).

Allgemeine Vorträge. Darboux, [Thema vorbehalten.] — Forsyth, On the present condition of partial differential equations of the second order, as regards formal integration. — Hilbert, Die Methode der unendlich vielen unabhängigen Variabeln. — Klein, Über die mathematische Enzyklopädie. — Lorentz, Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther. — Mittag-Leffler, Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe. — Newcomb, La théorie du mouvement de la Lune; son progrès et son état actuel. — Picard, L'Analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique. — Poincaré, [Thema vorbehalten.] — Veronese, La Geometria non archimedea.

In der Eröffnungssitzung wird außerdem der folgende Vortrag gehalten werden:

Volterra, Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 18. Dezember 1907.* Tagesordnung: Steinitz, Beiträge zur Analysis situs. Güntsche, Konstruktion des regelmäßigen 257-Ecks. Fleck, Wie würde sich die B. M. G. zu einem Verein der Freunde der Mathematik stellen?

Mathematische Sektion der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Kultur zu Breslau. *Sitzung: Dienstag, den 10. Dezember 1907.* Tagesordnung: Maschke, Einiges über die Elektronenhypothese. *Sitzung: Dienstag, den 21. Januar 1908.* Tagesordnung: Franz, Über Vermessung und Nomenklatur des Mondes; Born, Ein neuer Beweis des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. Winter-Semester 1907/08. *Erste Sitzung am 29. Oktober:* F. Klein berichtet über die Ereignisse der Ferien und erwähnt besonders die Debatten über Schul- und Hochschulunterricht auf der Versammlung der Naturforscher und Ärzte in Dresden und der unmittelbar folgenden Tagung der Philologen und Schulmänner in Basel. — *Zweite Sitzung am 5. November:* H. Minkowski entwickelt im

Anschlusse an die neuen Untersuchungen über das Prinzip der Relativität in der Elektrodynamik eine neue Form der elektrodynamischen Gleichungen. Er setzt die Zeit bis auf einen rein imaginären Faktor gleich einer vierten Raumkoordinate und faßt die elektrischen und magnetischen Größen, gleichfalls unter Hinzufügung geeigneter imaginärer Faktoren, zu vierdimensionalen Vektoren zusammen. Dadurch erhalten die Gleichungen eine vollkommen symmetrische Form, die bei allen orthogonalen Transformationen des vierdimensionalen Raumes unverändert bleibt. Hält man das hierin liegende allgemeine Prinzip der Relativität für bewegte Materie aufrecht, so ergibt sich eine neue Form der elektrodynamischen Gleichungen auch für diesen Fall, wenn man bemerkt, daß jeder Geschwindigkeitszustand durch eine passende Transformation jener Art in einen Zustand der Ruhe übergeht, wofern man nur die transformierte vierte Variable wieder als imaginäre Zeit auffaßt. Der Vortragende deutet schließlich Anwendungen des Relativitätsprinzipes auf die Dynamik und die Theorie der Gravitation an. — *Dritte Sitzung am 12. November:* F. Klein gibt den Literaturbericht. — F. Bernstein referiert über den Fundamentalsatz der Integralrechnung, daß eine Funktion $\varphi(x)$ konstant ist, wenn ihre Ableitung $\varphi'(x)$ sicher an allen Stellen eines Intervalles mit Ausnahme einer gewissen Menge L verschwindet. Er beweist, daß die für die Gültigkeit des Satzes notwendige und hinreichende Voraussetzung über die Natur von L die ist, daß L keine einzige perfekte Untermenge hat; eine mengentheoretische Betrachtung ergibt, daß notwendig nicht abzählbare Mengen dieser Art existieren. — *Vierte Sitzung am 19. November:* Nach dem Literaturbericht von F. Klein referiert P. Koebe über die soeben erschienene Arbeit „sur l'uniformisation des fonctions analytiques“ von H. Poincaré in den Acta mathematica (31. pag. 1) und vergleicht den hierin enthaltenen Beweis des allgemeinen Uniformisierungstheorems mit seinem eignen Beweise (Gött. Nachr. 1907, pag. 191). Weiterhin teilt er Gedanken zu einem neuen dem Poincaréschen verwandten Beweise des Theorems mit (vgl. eine demnächst in den Gött. Nachr. erscheinende Arbeit). — *Fünfte Sitzung am 26. November:* C. Runge entwickelt eine graphische Methode zur Bestimmung der wirbelfreien Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit über ein Wehr in 2 Dimensionen; die Methode liefert, von einer plausiblen Annahme des obersten Stromfadens ausgehend, das Netz der Strom- und Potentiallinien bis zum Boden hin. — D. Hilbert bespricht im Anschluß an das letzte Heft der „Fortschritte der Mathematik“ einige neuere Arbeiten, und legt sodann zwei demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Noten zahlentheoretischen Inhalts von A. Hurwitz vor. — *Sechste Sitzung am 3. Dezember:* F. Klein erstattet den Literaturbericht. — O. Toeplitz berichtet über seine weiteren Untersuchungen über die Elementarteilertheorie unendlicher Matrizen (vgl. diesen Jahresb. 16 (1907), pag. 167) und geht besonders auf eine charakteristische Klasse unsymmetrischer Matrizen ein, für die sich das Äquivalenzproblem lösen läßt; er weist auf die Beziehungen zu den Resultaten der Dissertation von E. Hellinger über die Orthogonalinvarianten quadratischer unendlicher Formen hin. Ferner berührt er die Theorie der komplexen Zahlensysteme und ihren Zusammenhang mit den unendlichen Matrizen. — *Siebente Sitzung am 10. Dezember:* F. Klein trägt über Quaternionentheorie vor und weist auf den großen Nutzen hin, den ein nicht übertriebener Gebrauch der Quaternionensymbolik häufig ge-

währt; insbesondere führt er aus, wie die Quaternionenmultiplikation die einfachste Darstellung der Drehungen des drei- und vierdimensionalen Raumes und ihrer Zusammensetzung liefert. Daran anschließend zeigt H. Minkowski (vgl. den Vortrag vom 5. November), wie sich die Gleichungen der Elektrodynamik noch weiter vereinfachen, wenn man die elektrischen und magnetischen Größen zu Vektoren bzw. Quaternionen mit komplexen Komponenten zusammenzieht (Biquaternionen). Man kann dann die Grundgleichungen der Elektronentheorie in eine einzige Biquaternionengleichung einfachster Art zusammenfassen, und auch die aus dem Relativitätsprinzip folgenden allgemeinsten Gleichungen bei bewegter Materie lassen sich sehr einfach schreiben.

Mathematischer Verein zu Hannover. Im Jahre 1907 wurden folgende Vorträge gehalten: Prof. Runge (Göttingen), Über Radioaktivität in der Luft auf hoher See; Dr. Knoblauch, Versuche mit Gasen; Prof. Hespe, Über Wechselströme; Prof. Wanner, Physikalische Schülerübungen; Professor Precht, Strahlungserscheinungen und ihre Gesetze; Prof. Stäckel, Die Bedeutung der Arbeiten Leonhard Eulers für die elementare Mathematik; Prof. Lautenschläger, Gemeinschaftliche Sehnen von Kegelschnitten; Prof. Bräuer, Bestimmung der Ionisationswärme; Prof. Stäckel, Ausbildung der Lehramtskandidaten für Mathematik und Naturwissenschaften.

Deutscher Ausschuß für den mathematischen und den naturwissenschaftlichen Unterricht. Nachdem die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in dreijähriger Tätigkeit ihrem Auftrage gemäß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht abgeglichene Vorschläge ausgearbeitet und ihre Auflösung beantragt hatte, ist eine neue Organisation ins Leben gerufen worden, die eine Durch- und Weiterführung der Reformvorschläge bezweckt. Diese Organisation umfaßt Vertreter der folgenden Gesellschaften, bei denen die Vertreter jedesmal in Klammern bezeichnet worden sind: Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (Chun, Schotten, Gutzmer-Vorsitzender); Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Klein, Stäckel); Deutsche Physikalische Gesellschaft (Hallwachs, Poske); Verein Deutscher Ingenieure (Peters, Taaks); Verein Deutscher Chemiker (Duisberg, Rassow); Deutsche Botanische Gesellschaft (Vertreter noch nicht ernannt); Deutsche Zoologische Gesellschaft (Hertwig, Kraepelin); Deutsche Geologische Gesellschaft (Fricke, Rauff); Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (Pietzker, Schmid); Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Mathematik und Physik (v. Böttinger); Anatomische Gesellschaft (v. Bardeleben); Physiologische Gesellschaft (v. Frey, Verworn); Deutscher Medizinalbeamten-Verein (Cramer). Die genannten Vertreter haben sich am 3. Januar 1908 in Cöln als „Deutscher Ausschuß für den mathematischen und den naturwissenschaftlichen Unterricht“ konstituiert, indem sie ihren Arbeitsplan festsetzten und für dessen Durchführung einige Unterausschüsse einsetzten, die ihre Tätigkeit zum Teil sogleich begonnen haben.

The London Mathematical Society. Der Vorstand der Gesellschaft besteht für das Jahr 1908 aus folgenden Herren: Professor W. Burnside, Präsident; Professor A. R. Forsyth und Professor H. M. Macdonald, Vizepräsidenten; Professor J. Larmor, Schatzmeister; Professor A. E. H. Love und J. H. Grace, Schriftführer.

American Mathematical Society. Gelegentlich der Jahresversammlung der American Association for the advancement of Science, die in den Weihnachtsferien 1907 zu Chicago stattfand, wurden gemeinsame Sitzungen der Mathematiker und der Ingenieure unter Mitwirkung der Chicago Section der American Mathematical Society abgehalten. In der Sitzung am 30. Dezember 1907 wurde allgemein über die gegenwärtige Lage des mathematischen Unterrichts für Studierende der Ingenieurwissenschaften — in Amerika und im Auslande — verhandelt, während in der am 31. Dezember stattgehabten Sitzung über folgende Frage beraten wurde: Was ist beim Unterricht der Mathematik an Studierende der Ingenieurwissenschaften zu verlangen? Und zwar: a) welche Unterrichtsgegenstände? b) bis zu welchem Umfange in jedem derselben? c) nach welcher Methode der Darbietung? d) welches sollten die Hauptziele sein?

The American Federation of Teachers of the mathematical and the natural sciences. Die zweite Jahresversammlung dieser Federation wird am 1. Januar 1908 in Chicago stattfinden. Zweck der Federation ist Erzielung eines einheitlicheren und geschlosseneren Vorgehens betreffs der Verbesserung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Der Federation gehören nur die verschiedenen Vereinigungen an, die durch Delegierte auf den Versammlungen vertreten werden. Bis jetzt sind folgende Vereinigungen beigetreten: The Association of teachers of mathematics of the Middle States and Maryland; The New York State science teachers association; The Central Association of science and mathematics teachers; The association of teachers of mathematics of New England; The physics teachers association of Washington City; The Missouri Society of teachers of mathematics and science; The New Jersey State science teachers association; The Michigan schoolmasters club; The New England association of chemistry teachers; The New York physics club; The Indiana association of science and mathematics teachers; The association of Ohio teachers of mathematics and science. — Auf der Versammlung am 1. Januar soll über die endgültige Organisation der Federation Beschluß gefaßt werden. Es ist geplant, daß jede Vereinigung ihre Individualität und das Recht behalten soll, auf ihrem eigenen Gebiete nach ihrer Eigenart zu wirken; aber durch die Teilnahme an der Federation wird jede Vereinigung mit den andern beteiligten Gesellschaften in Verbindung kommen und Anregung geben und empfangen können für die Behandlung gemeinsamer Aufgaben.

Es ist ein eigenartiges Zusammentreffen, daß fast genau zu derselben Zeit auch in Deutschland sich etwa ein Dutzend große Gesellschaften, die an der Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts besonderes Interesse nehmen, sich zur Einsetzung eines gemeinsamen Unterrichtsausschusses vereinigt haben. [Vgl. den Bericht hierüber auf S. *6* dieses Heftes.]

---

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisverteilung der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

In ihrer Sitzung vom 2. Dezember 1907 hat die Akademie der Wissenschaften zu Paris folgende Preise aus dem Gebiete der mathematischen und verwandten Disziplinen verteilt:

Prix Francœur. E. Lemoine erhält den Preis für die Gesamtheit seiner mathematischen Arbeiten.

Prix Bordin. Für die gemeinsame Bearbeitung der gestellten Aufgabe: „Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près). Étudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme $z^2 = f(x, y)$, f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces" erhalten F. Enriques und F. Severi den Preis.

Prix Vaillant. Die gestellte Aufgabe: „Perfectionner en un point important le problème d'analyse relatif à l'équilibre de plaques élastiques encastrées; c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$ avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire" hat 12 Bearbeitungen gefunden. Der Preis wird in folgender Weise verteilt: Dreiviertel des Preises erhält J. Hadamard, und unter Erhöhung des Fonds erhalten A. Korn und G. Lauricella je einen Preis in der Höhe des halben Preises; einen solchen in der Höhe des Viertelpreises erhält T. Boggio, und eine höchst lobende Erwähnung erhält die Bearbeitung, die unter dem Motto „Barré de Saint-Venant" eingelaufen ist.

Prix Poncelet. Den Preis erhält Renard für die Gesamtheit seiner mathematischen und experimentellen Arbeiten über die Mechanik und ihre Bedeutung für den gegenwärtigen Stand der Aëronautik.

Prix Lalande. Den Preis erhält Th. Lewis, Astronom der Sternwarte zu Greenwich.

Prix Valz. Den Preis erhält Giacobini, Astronom der Sternwarte zu Nizza.

Prix G. de Pontécoulant. Den Preis erhält Guillot, Subdirektor der Sternwarte zu Paris.

Prix Hébert. Den Preis erhält Lucien Poincaré für sein Buch: Physique moderne.

Prix Hugues. Den Preis erhält P. Langevin für die Gesamtheit seiner physikalischen Arbeiten.

Prix Gaston Planté. Den Preis erhält Mathias für die Gesamtheit seiner Arbeiten, insbesondere für seine seit 1893 ausgeführten Untersuchungen über den Erdmagnetismus.

Prix La Caze. Den Preis erhält Paul Villard für seine physikalischen Arbeiten.

Prix Kastner-Boursault. Der Preis wird P. Weiß in Zürich für seine Arbeiten zuerkannt.

Prix Binoux. Es erhält den Preis G. Loria für die Gesamtheit seiner geschichtlichen Arbeiten.

Prix Saintour. Es erhalten je einen Preis: Gonnessiat für seine astronomischen Arbeiten und de Séguier für sein Werk: Sur la théorie des groupes.

Prix Petit d'Ormoy. Den Preis erhält P. Duhem für die Gesamtheit seiner Arbeiten über mathematische Physik.

Preise der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

Für die Jahre 1909 und 1910 hat die Pariser Akademie am 2. Dezember 1907 folgende Preisaufgaben aus dem Gebiete der mathematischen und verwandten Disziplinen gestellt.

1909. Prix Francœur (1000 Fr.); *Prix Poncelet* (2000 Fr.) ohne bestimmte Preisaufgaben.

Prix Bordin (3000 Fr.) für Bearbeitung folgender Aufgabe: L'invariant absolu qui représente le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce d'une surface algébrique dépend d'un invariant relatif ϱ, qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans celle des courbes algébriques tracées sur la surface. On propose de faire une étude approfondie de cet invariant, et de chercher notamment comment ou pourrait trouver sa valeur exacte, au moins pour des catégories étendues de surfaces.

Prix Vaillant (4000 Fr.) für die Bearbeitung der Aufgabe: Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

Prix Boileau (1300 Fr.) für: Recherches sur les mouvements des fluides, jugées suffisantes pour contribuer au progrès de l'Hydraulique.

Prix Lalande (540 Fr.), *Prix Valz* (460 Fr.), *Prix G. de Poutécoulant* (700 Fr.), *Prix Petit d'Ormoy* (zwei Preise von 10 000 Fr.) ohne bestimmte Preisaufgabe.

1910. Grand Prix des sciences mathématiques für die Behandlung folgender Frage: On sait trouver tous les systèmes de deux fonctions méromorphes dans le plan d'une variable complexe et liées par une relation algébrique. Une question analogue se pose pour un système de trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle et liées par une relation algébrique. L'Académie demande, à défaut d'une solution complète du problème, d'indiquer des exemples conduisant à des classes de transcendantes nouvelles.

Prix Poncelet (2000 Fr.), *Prix Leconte* (50 000 Fr.) ohne bestimmte Preisaufgabe.

Die Bewerbungsschriften müssen in französischer Sprache abgefaßt und bis zum 31. Dezember des der Preisverteilung vorangehenden Jahres an das Sekretariat der Akademie eingesandt sein.

---

3. Hochschulnachrichten.

Universität Rostock. Für den Neubau eines physikalischen Instituts haben die mecklenburgischen Stände einen Beitrag von 200 000 Mark bewilligt.

Universität Münster. Zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Studiums ist der Universität von Herrn Geheimrat Hittorf ein Kapital von 25 000 Mark als Geschenk überwiesen worden.

Harvard Universität. Der Universität ist ein Ölporträt des im Jahre 1905 verstorbenen Professors der Mathematik James Mills Peirce von der Schwester des Verstorbenen geschenkt worden.

Promotionen an der Faculté des sciences zu Paris im Jahre 1907. In dem Jahre 1907 fanden folgende Promotionen statt: Faton, Séries trigonométriques et série de Taylor. Traynard, Sur les fonctions théta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques. Montel, Sur la suites infinies de fonctions. Lambert, Sur les coefficients du développement de la fonction perturbatrice.

---

4. Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. A. Bernoulli habilitierte sich an der Technischen Hochschule zu Aachen als Privatdozent für Physik.

Dr. E. Bianchi habilitierte sich an der Universität Rom als Privatdozent für Astronomie.

Dr. P. Koch habilitierte sich an der Universität München als Privatdozent der Physik.

Dr. A. Leon habilitierte sich an der Technischen Hochschule zu Wien als Privatdozent für Elastizitätslehre.

Dr. Eugen Meyer habilitierte sich an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg als Privatdozent für darstellende Geometrie.

Dr. L. Sinigallia habilitierte sich an der Universität Pavia als Privatdozent für Mathematik.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. E. Almansi, ao. Professor der mathematischen Physik an der Universität Pavia, wurde zum o. Professor ernannt.

Privatdozent Dr. A. Becker an der Universität Heidelberg wurde zum außeretatmäßigen außerordentlichen Professor für Physik daselbst ernannt.

Professor G. Bigourdan wurde zum Direktor der Sternwarte in Paris ernannt.

Dr. Bourget wurde zum Direktor der Sternwarte in Marseille ernannt.

Privatdozent Dr. H. Buchholz an der Universität Halle wurde zum Professor ernannt.

Dr. Louis Cohen wurde zum ao. Professor der Mathematik an der George Washington Universität ernannt.

Privatdozent Dr. F. v. Dalwigk an der Universität Marburg wurde zum Professor ernannt.

Dr. R. Fueter, Privatdozent an der Universität Marburg, wurde zum o. Professor der Mathematik an der Universität Basel ernannt.

Dr. Gonnessiat wurde zum Direktor der Sternwarte in Alger ernannt.

Professor Dr. Helmert, Direktor des Geodätischen Instituts in Potsdam, wurde zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg gewählt.

Professor Dr. D. Hilbert wurde zum Mitgliede des bayerischen Maximilianordens für Wissenschaft und Kunst ernannt.

Professor Dr. E. W. Hobson in Cambridge erhielt von der Royal Society eine königliche Medaille.

Dr. J. Löschner wurde zum o. Professor der Geodäsie an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn ernannt.

Professor R. Maclaurin, am Victoria College zu Wellington in Neuseeland, wurde zum Professor der mathematischen Physik an der Columbia Universität ernannt.

Dr. W. A. Manning wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Stanford Universität ernannt.

Dr. R. Marcolongo, Professor der rationellen Mechanik an der Universität Messina, wurde in gleicher Eigenschaft nach Neapel berufen.

Professor Dr. A. A. Michelson in Chicago erhielt von der Royal Society die Copley-Medaille.

Professor Dr. G. Morera an der Universität Turin wurde zum Mitglied der Accademia dei Lincei in Rom gewählt.

Dr. G. Picciati, Privatdozent an der Universität Padua, wurde zum ao. Professor der rationellen Mechanik an der Universität Bologna ernannt.

Dr. O. Tedone, ao. Professor der rationellen Mechanik an der Universität Genua, wurde zum o. Professor ernannt.

Dr. G. Vivanti, Professor der Mathematik an der Universität Messina, wurde in gleicher Eigenschaft nach Pavia berufen.

Professor Dr. W. Wirtinger in Wien erhielt von der Royal Society die Sylvester-Medaille.

Gestorben:

Professor Asaph Hall, Professor der Astronomie an der Harvard Universität, ist am 22. November 1907 im Alter von 78 Jahren gestorben.

Lord Kelvin (Sir William Thomson) ist am 17. Dezember 1907 zu Glasgow im Alter von 83 Jahren gestorben.

Professor Dr. A. Paalzow, weiland Professor der Physik an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, ist im Alter von 84 Jahren gestorben.

Dr. A. Wassiliewitsch, Professor der Astronomie und Geodäsie an der Universität Warschau und Direktor der Sternwarte daselbst, ist im Alter von 41 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Programm für den vom 21. April bis 2. Mai in Göttingen abzuhaltenden Ferienkursus für Lehrer höherer Schulen. *Mathematik und Astronomie.* Prof. Behrendsen, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. 1 Doppelst. — Prof. Klein, Besprechungen über den elementaren Unterricht in der Differential- und Integralrechnung. 3 Doppelst. — Prof. Minkowski, Neuere Ideen über die Grundgesetze der Mechanik. 2 Doppelst. — Prof. Schwarzschild, Astrophysikalische Fragen. 2 Doppelst. — *Physik.* Prof. Riecke, Über die Erscheinungen der Radioaktivität. 3 Doppelst. — Prof. Simon, Elektrische, magnetische, dielektrische Kreise. 2 Doppelst. Wechselströme, elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. 1 Doppelst. — Prof. Prandtl, Probleme der Motorluftschiffahrt und der Flugtechnik. 2 Doppelst. — Prof. Wiechert, Die neueren Ergebnisse über die Beschaffenheit des Erdinnern, mit besonderer Berücksichtigung der Erdbebenforschung. 2 Doppelst. — Dr. Gerdien, Luftelektrizität und luftelektrische Messungen. 2 Doppelst. — Prof. Behrendsen, Über Resonanzerscheinungen. 1 Doppelst. — Dr. Krüger; Demonstrationen

aus dem Kursus für physikalische Handfertigkeit. — Dr. Bestelmeyer, Demonstrationen aus dem Praktikum für Radioaktivität. — In den folgenden Instituten werden Besichtigungen und Demonstrationen an je einem Nachmittage stattfinden: Mathematisches Lesezimmer, Sammlung mathematischer Modelle, Institut für angewandte Mathematik, Institut für angewandte Mechanik, Sternwarte, Institut für Geophysik, Physikalisches Institut des Gymnasiums. An zwei Nachmittagen werden Besichtigungen und Demonstrationen in der Abteilung für Experimentalphysik des physikalischen Institutes (allgemeine Unterrichtseinrichtungen, Kursus für physikalische Handfertigkeit, Praktikum für Radiologie und Elektronik) und ebenso an zwei Nachmittagen Demonstrationen in der Abteilung für angewandte Elektrizität abgehalten werden. Außerdem ist ein Besuch des städtischen Elektrizitätswerkes in Aussicht genommen.

Tornow-Stiftung. Gelegentlich der Einweihung des neuen Hauses des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. am 11. Januar d. J. machte Oberbürgermeister Dr. Adickes die Mitteilung, daß die Erben von Eugen Tornow für die Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften eine Stiftung in Höhe von 470000 Mark errichtet haben, die der Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts dienen soll.

Mathematische Diapositive. Das „Educational Museum, Teachers College, Columbia University, New York City“, hat eine zweite Serie von 160 Diapositiven herausgegeben, die sich auf die Entwicklung der Mathematik beziehen. Die erste Serie (vgl. Jahresbericht **16**, S. 328) umfaßte die Nummern 1—119. Von der neuen Serie stellen die Nummern 120—144 Abbildungen von Probeseiten alter Schriften, Lehrbücher usw. dar; die Nummern 145—207 beziehen sich auf alte mathematische Instrumente, die Nummern 208—232 auf moderne Rechenapparate, die Nummern 233—265 auf die Entwicklung der höheren Analysis.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Mathematische Werke von Paolo Ruffini. Im Interesse einer möglichst vollständigen Ausgabe der mathematischen Werke Ruffinis ergeht die Bitte, Briefe, Dokumente und Notizen aller Art, die sich auf das Leben und die Arbeiten Ruffinis beziehen, zu sammeln und dem Herausgeber der Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Herrn Professor B. G. Guccia in Palermo, darüber Mitteilungen zugehen zu lassen. Band 1, enthaltend die klassische Schrift Ruffinis: Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Bologna 1799, befindet sich in Vorbereitung.

Ludwig Boltzmanns Schriften. Die Akademie der Wissenschaften zu Wien bewilligte in ihrer Sitzung vom 28. November 1907 für die Herausgabe der Schriften Ludwig Botzmanns den Betrag von 1000 Mark aus dem Legat Scholz.

Von der **Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften** erschienen kürzlich in der deutschen Ausgabe Band IV 2 II, Heft 2, enthaltend:

Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper, von O. Tedone in Genua und A. Timpe in Danzig,

Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akustik, von H. Lamb in Manchester;

in der französischen Ausgabe tome I, vol. 2, fasc. 1, enthaltend:

Les fonctions rationelles, exposé, d'après l'article allemand de E. Netto-Gießen, par R. Le Vavasseur-Lyon.

W. Rouse Ball, Histoire des Mathématiques. Édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome deuxième. Avec des additions de R. de Montessus. Les mathématiques modernes depuis Newton jusqu'à nos jours. Note complémentaire de M. G. Darboux. A. Hermann, Paris 1907. Frs. 8.—.

Der erste Band der französischen Übersetzung der Geschichte der Mathematik von Ball ist in Band XV, S. 78, dieses Jahresberichts angezeigt worden. Während diesem zur Ergänzung fünf Zusätze von verschiedenen Autoren angehängt wurden, sind in dem nun vorliegenden zweiten Bande eine große Zahl von kürzeren und längeren Notizen dem Texte einverleibt worden, und zwar stammen sie aus der Feder des Herrn de Montessus. Diese Einschaltungen sind durch Sternchen kenntlich gemacht worden; sie bilden zweifellos wertvolle Bestandteile der französischen Ausgabe. Am Schluß ist noch beigegeben ein Abdruck des Vortrags „étude sur le développement des méthodes géométriques", den G. Darboux am 24. September 1904 auf dem Kongreß zu St. Louis gehalten hat. Ferner findet sich noch ein Verzeichnis von Verbesserungen, dessen Umfang — über vier gedruckte Seiten! — freilich einen beunruhigenden Eindruck macht.

Da in dem vorliegenden Bande die Geschichte der Mathematik bis zur Gegenwart verfolgt wird, so wird die Darstellung ganz besonders lebhaftem Interesse begegnen. Es ist geradezu selbstverständlich, daß das subjektive Moment in der Beurteilung der Leistungen der großen Forscher der neueren und neuesten Zeit sehr stark hervortritt, und bald wird sich bei dem Leser lebhafte Zustimmung, bald aber auch nicht minder lebhafter Widerspruch regen. Da es sich hier um eine subjektive Auffassung von der Bedeutung der Arbeiten kürzlich Verstorbener oder Lebender handelt, kann füglich auf Einzelheiten verzichtet werden; es wird Sache eingehender Studien sein, die Sicherheit und Haltbarkeit der einzelnen Angaben zu prüfen.

Alles in allem ist der zweite Band durchaus anregend und anziehend. Die Ausstattung ist von bekannter Güte. G.

W. Rouse Ball, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Deuxième édition française traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. Première partie: Arithmétique, Algèbre et Théorie des nombres A. Hermann, Paris 1907. Frs. 5.—

Die neue französische Ausgabe des wohlbekannten und geschätzten Ballschen Buches ist nicht eine bloße Übersetzung des englischen Originals; vielmehr hat der Herausgeber selbst zahlreiche wertvolle Zusätze gemacht. Ins-

besondere sei hervorgehoben, daß Fitz-Patrick eine eigene „histoire des nombres“ als erstes Kapitel beigefügt hat, die mit zahlreichen Anekdoten gewürzt, und deren Lektüre sehr unterhaltend ist. Ebenso hat er sehr viele Aufgaben neu hinzugegeben. Am Schluß hat A. Hermann eine längere Note angefügt, in der er über die Methode handelt, wie man sich selbst eine Leibrente verschaffen kann.

Der Inhalt, die frische Darstellung, die nette Ausstattung und die Wohlfeilheit sichern dem Werkchen auch in Deutschland zahlreiche Freunde. G.

Victor v. Dantscher, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. [VI u. 80 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Der Verfasser hat sich entschlossen, seine an der Grazer Universität wiederholt gehaltenen Vorlesungen über die *Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen* zu veröffentlichen, um den Studierenden Gelegenheit zu geben, auch diese Theorie, die in den Lehrbüchern meist nur andeutungsweise berücksichtigt wird, genauer kennen zu lernen. — Das Fundament bildet die Lehre von den *additiven Aggregaten* aus unendlich vielen positiven rationalen Zahlen, deren Einführung durch das Verfahren der Wurzelausziehung nahe gelegt wird. Die Hauptrolle spielt dabei die Entwicklung der *Gleichheitserklärung;* aus ihr ergibt sich naturgemäß die Unterscheidung zwischen *konvergenten* und *divergenten* additiven Aggregaten; auf die ersteren werden die vier Rechnungsoperationen im Gebiete der rationalen Zahlen ausgedehnt und gezeigt, daß es konv. addit. Aggregate gibt, deren k^{te} Potenz zwar nicht identisch sein kann mit einer vorgegebenen rationalen Zahl (welche nicht selbst k^{te} Potenz einer solchen ist), ihr aber doch nach der aufgestellten Gleichheitserklärung gleich ist, so wie der periodische Dezimalbruch 0·9 gleich 1 ist. — Die Ausdehnung der Theorie auf addit. Aggregate, deren Glieder nicht mehr pos. rat. Zahlen sind, vollzieht sich ohne Schwierigkeit. — Den Schluß bildet die Betrachtung der *multiplikativen Aggregate*, welche nach Weierstraß durch *additive* erklärt werden.

Igls, im September 1907. Victor v. Dantscher.

Ioannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex cum prooemio Georgii Ioachimi Rhetici. I. **De triangulis sphaericis libri quatuor.** Herausgegeben von Axel Anthon Björnbo. Auch unter dem Titel: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Heft XXIV, 1. Mit Bildnis des Johannes Werner und 211 Figuren im Text. [XVI u. 184 S.] gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. geh. ℳ 8.—.

Allerdings gehört Johannes Werner, der alte Nürnberger Pfarrer, nicht zu den meist hervorragenden Mathematikern, und seine Leistungen sind nicht immer tadellos, aber dennoch ist es, obschon die meisten seiner Werke nie bekannt geworden sind, durch Forschungen von Gelehrten wie Siegmund Günther, A. v. Braunmühl und H. G. Zeuthen festgestellt worden, daß Werner viel zu gut und seine Arbeit allzu gediegen ist, um in Vergessenheit zu geraten. Ganz besonders eifrig wünschte man sein als verschollen angesehenes Buch de triangulis sphæricis kennen zu lernen, und zwar um zu wissen, ob — wie v. Braunmühl vermutete — die prostaphäretische Methode schon darin benutzt wurde, und ob Copernicus, Georg Joachim Rheticus

und Tycho Brahe daraus geschöpft hatten. Auf einer Forschungsreise in Italien fand nun der Herausgeber eine übrigens schon dem Heilbronner bekannte Abschrift dieses Werkes, und durch G. Eneström wurde es bald festgestellt, daß eine dazu gehörige Vorrede von Rheticus in Krakow im Jahre 1557 gedruckt worden war. Die Vorrede und der Text haben nun in der vorliegenden Ausgabe einander gefunden, und obwohl der Text von seiten des Verfassers nicht druckfertig und gar nicht frei von Fehlern und Ungenauigkeiten ist, so ist doch durch sein Erscheinen die Lücke zwischen Regiomontanus auf der einen, Copernicus, Rheticus und Tycho Brahe auf der andern Seite ausgefüllt worden, und es ist endgültig festgestellt, daß Werner der Urheber der prostaphäretischen Methode ist.

Köbenhavn. A. A. Björnbo.

A. Schoenflies, die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Zweiter Teil. Auch unter dem Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Der Ergänzungsbände II. Band. Mit 26 Figuren im Text. [X u. 332 S.] gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Erst nach längerer Pause erscheint der zweite, abschließende Teil des Berichts, der sich vorwiegend mit *Geometrie* beschäftigen wird. Die mengentheoretische Klärung der geometrischen Grundbegriffe, besonders auch derer, die als unentbehrliche Hilfsmittel in den Aufbau der Funktionentheorie eingehen, ist nur sehr allmählich erfolgt. Jetzt ist sie soweit fortgeschritten, daß wenigstens ein gewisser Teil einer zusammenhängenden Darstellung fähig geworden ist. Es ist derjenige, der im Mittelpunkt der Analysis situs steht, und in dem die geometrisch invarianten Eigenschaften der geometrischen Gebilde zum Ausdruck kommen. — Um den Inhalt des Berichts näher zu kennzeichnen, mag es genügen, die einzelnen Kapitel, die er enthält, hier zu nennen: 1. Allgemeine Mengensätze. 2. Die geordneten Mengen. 3. Punktmengensätze. 4. Die gestaltlichen Grundbegriffe. 5. Die gestaltlichen geometrischen Invarianten. 6. Die stetige Kurve. 7. Die Kurvenmengen und der Funktionalraum. Als Anhang folgen einige Berichtigungen und Zusätze zum ersten Teil. — Das erste und zweite Kapitel enthält die Fortschritte im Gebiet der abstrakten Mengenlehre. Diese glaubte ich dem Berichte nicht entziehen zu sollen; ich habe mich bemüht, sie eingehend und vollständig darzustellen. Dagegen habe ich davon Abstand nehmen müssen, die vielfachen Einzelanwendungen, die die Mengentheorie in Analysis und Geometrie sowie in sonstigen Gebieten gefunden hat, näher zu erörtern. Einzelnes hiervon, was sich in natürlicher Weise in den Bericht einfügen ließ, ist berücksichtigt worden. Wenn hier von Vollständigkeit keine Rede sein kann, so liegt es unter anderem auch daran, daß es für jede Arbeitskraft eine physische Schranke gibt. Doch hoffe ich, dem Bericht einen gewissen abgerundeten Inhalt gegeben zu haben.

Königsberg i. Pr. A. Schoenflies.

H. Kreis, Contribution à la théorie des systèmes linéaires, Thèse, Zurich 1906, 62 p.

Einige Bemerkungen allgemeinerer Art mögen diese Besprechung einleiten. Es sei eine algebraische Funktion $y = f(r)$ von r durch die Gleichung

$\Theta(y, r) = 0$ gegeben, wo $\Theta(y, r)$ als ganze Funktion von y und r vorausgesetzt werden kann; ferner seien X und A quadratische Matrizes n-ter Ordnung (Bilinearformen von je $2n$ Variabeln, systèmes linéaires d'ordre n) und $\psi(r) \equiv (r-a)^{\alpha}(r-b)^{\beta} \ldots = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt. Besitzt alsdann die Gleichung $\Theta(y, a) = 0$ $[\Theta(y, b) = 0, \ldots]$ mindestens eine endliche, und zwar im Falle $\alpha > 1$ $[\beta > 1, \ldots]$ mindestens eine endliche einfache Wurzel, so kann man stets mindestens eine ganze Funktion $g(A)$ von A so bestimmen, daß $\Theta(g(A), A) = 0$ ist. In diesem Falle stellt $g(A)$ eine Lösung der Gleichung

(1) $$\Theta(\mathrm{X}, A) = 0$$

vor, in der A eine gegebene, X eine unbekannte Matrix bedeutet. Man setzt $g(A) = f(A)$ und nennt die Matrix $f(A)$ eine algebraische Funktion von A.[1])

Unter den eben angegebenen Bedingungen ist mithin die Gleichung (1) stets lösbar; außer Lösungen von der Gestalt $g(A)$ können auch noch andere auftreten; doch hat man solche bisher nur in sehr einfachen Spezialfällen in Betracht gezogen (siehe unten).

Herr Kreis hat nun für einen Unterfall allgemeinerer Art, nämlich für den Fall $\Theta(y, r) = \varphi(y) - r$, wo $\varphi(y)$ eine *beliebige* ganze Funktion von y allein bedeutet, *die Auflösbarkeit der Gleichung* $\varphi(\mathrm{X}) - A = 0$ *oder*

(2) $$\varphi(\mathrm{X}) = A$$

untersucht, und im Falle ihrer Lösbarkeit angegeben, wie man *sämtliche Lösungen* aufstellen kann. Zu den Gleichungen (2) gehören die Gleichung $y^m = A^0 = E$, von der bekanntlich alle Lösungen — die zyklischen Formen m-ten Grades — bekannt sind, und die stets und leicht lösbare Gleichung $\varphi(\mathrm{X}) = 0$.[2])

Ehe Herr Kreis an seine Aufgabe herantritt, stellt er in Kapitel I eine Reihe von Begriffen und Sätzen über Matrizes zusammen, die später benutzt werden. Von besonderem Interesse ist hier die von Herrn Hurwitz[3]) nach Laguerre eingeführte Darstellung einer beliebigen Matrix in verallgemeinerter oder verdichteter Form (sous forme généralisée ou condensée). Hierbei wird eine Matrix gleichsam durch Horizontal- und Vertikalschnitte in rechtwinklige bzw. quadratische Matrizes zerlegt und jede Teilmatrix als Element einer neuen Matrix aufgefaßt. Zwei solche verallgemeinerte Matrizes, deren Elemente also selbst Matrizes sind, können bei bestimmter Beschaffenheit genau so komponiert werden, wie gewöhnliche, wobei ihr Produkt wieder als verallgemeinerte Matrix erscheint. Übrigens haben mit solchen Matrizes schon früher die Herren Volterra[4]) und Hensel[5]) ge-

1) Vgl. Bromwich, Theorems on Matrices a. bil. Forms, Proceed. of the Cambr. Phil. Soc. (1900) Vol. XI, S. 79 ff. Daselbst findet man auch eine gute vergleichende Zusammenstellung der Literatur über algebraische und transzendente Funktionen von Matrizes. Die Ausführungen von Bromwich über erstere Funktionen auf S. 81 u. 82 lassen sich in oben angegebener Weise noch etwas verallgemeinern.

2) Vgl. Frobenius, Über lin. Subst. u. bil. Formen, Crelles Journal (1878) Bd. 84, S. 14 Art. V.

3) In einer Vorlesung im W.-S. 1904/05 in Zürich.

4) Volterra, Sui fond. della teoria delle equaz. diff. lin., Mem. d. Soc. Ital. delle Scienze (1899), Bd. XII, S. 4 ff.

5) Hensel, Theorie der Körper von Matrizen, Crelles Journ. (1904) Bd. 127, S. 130 ff.

rechnet, ohne jedoch den Gegenstand in vollster Allgemeinheit zu erledigen.

Die großen Vorteile der eben besprochenen Darstellung treten gleich im IIten Kapitel hervor, wo Herr Kreis weiterhin vorbereitend die vielbehandelte Aufgabe löst, alle Matrizes zu bestimmen, die mit einer gegebenen Matrix vertauschbar sind. Er wendet im übrigen dabei ganz dieselbe Methode an, mittels deren Herr Voß[1]) in einer den Gegenstand erschöpfend behandelnden Arbeit über vertauschbare Matrizes diese Aufgabe schon vor längerer Zeit gelöst hat, und die auch Herr Volterra l. c. ohne Kenntnis der Voßschen Arbeit zu ihrer Lösung angewendet hat. Die Resultate der drei Autoren stimmen naturgemäß vollkommen überein. Als wertvolle Anwendung untersucht der Verfasser hier noch für spätere Zwecke die Matrizes X, die so beschaffen sind, daß jede mit A vertauschbare Matrix auch mit X vertauschbar ist.

Nunmehr wendet er sich in Kapitel III zu seinem eigentlichen Thema. Ist X eine Lösung von (2) und M ihre Weierstraßsche Normalform, so sind die Matrizes $\varphi(M)$ und A ähnlich, ihre Elementarteiler gleich, und umgekehrt. Unsere Aufgabe zerfällt darnach in die beiden folgenden: Erstens sind alle Normalformen M zu suchen, für die $\varphi(M)$ und A gleiche Elementarteiler haben, und zweitens alle Matrizes T für die $T^{-1}\varphi(M)T = A$ ist. Die zweite ist bekanntlich gelöst; um die erste zu erledigen, beweist und benutzt der Verfasser ein Theorem, welches lehrt, wie aus den Elementarteilern irgendeiner Matrix P die von $\varphi(P)$ berechnet werden, ein Theorem, das zuerst Herr Bromwich l. c. S. 86 ff. und dann unabhängig davon der Referent[2]) veröffentlicht hat. Herr Kreis gelangt mit seiner Hilfe schließlich zu einem oder mehreren Systemen von linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Sind diese in positiven ganzen Zahlen lösbar, so ist es auch die Gleichung (2); den Lösungen der Systeme entsprechen ebensoviele wesentlich verschiedene, d. h. *nicht ähnliche* Lösungen von (2); die Anzahl derselben ist sonach eine *endliche*. Das ganze Verfahren ist, wie auch aus dieser notgedrungen kurzen Skizze hervorgehen dürfte, ziemlich weitläufig; jedenfalls wäre ein einfaches Kriterium für die Lösbarkeit erwünscht.

Im Schlußparagraphen wirft der Verfasser noch die Frage auf, wann eine Lösung $X = B$ von (2) eine ganze Funktion von A ist. Diese Frage beantwortet sofort ein Satz von Frobenius (vgl. l. c. S. 14, Satz V): B ist dann und nur dann eine ganze Funktion von A, wenn $\varphi(r)$ für die verschiedenen Wurzeln der Gleichung niedrigsten Grades, der B genügt, verschiedene Werte hat, und $\varphi'(r)$ für die mehrfachen Wurzeln jener Gleichung nicht Null ist. Weniger einfach, aber sehr bemerkenswert ist das Kreissche Kriterium: Aus $\varphi(B) = A$ folgt dann und nur dann $B = g(A)$, wenn alle mit A vertauschbaren Matrizes auch mit B vertauschbar sind. Sein Beweis schließt einen neuen Beweis des eben angeführten Satzes von Frobenius in sich; setzt man letzteren als bekannt voraus, so werden die Entwickelungen von S. 58—62 der Kreisschen Arbeit durch ihn überflüssig.

1) A. Voß, Über die mit einer bil. Form vertauschbaren bil. Formen, Münch. Sitzb. (1889), Bd. XIX, S. 283 ff.

2) Über rationale Funkt. bil. Formen, Crelles Journ. (1903), Bd. 125, S. 291 f.

Referent möchte von sich aus noch folgende Punkte hervorheben. Jede Lösung B von (2) ist mit A vertauschbar. Nach einem Satze von Herrn Frobenius (l. c. S. 28, Satz XIII) ist daher *jede Lösung* der Gleichung (2) eine ganze Funktion von A, wenn A *lauter verschiedene* Elementarteiler besitzt. — Ist ferner $\varphi(X_1) = A$ und S eine mit A vertauschbare Matrix mit nicht verschwindender Determinante, so wird für $X_2 = S^{-1}X_1S$ auch $\varphi(X_2) = A$; also ist X_2 eine zu X_1 ähnliche Lösung. Hat man umgekehrt $\varphi(X_1) = \varphi(X_2) = A$ und $X_2 = S^{-1}X_1S$, so muß $SA = AS$ sein. Man erhält daher aus einer Lösung X_1 *sämtliche* zu ihr ähnliche Lösungen, indem man in $S^{-1}X_1S$ der Reihe nach für S alle mit A vertauschbaren Matrizes setzt, deren Determinanten nicht Null sind. Ist insbesondere $X_1 = g(A)$, so wird dabei $S^{-1}X_1S = X_1$, d. h. alle zu X_1 ähnliche Lösungen sind mit X_1 identisch. Diese letzte Bemerkung vermißt Referent auf S. 58—59 der Kreisschen Arbeit.

Der Verfasser hat seine zum Teil recht verwickelten Untersuchungen mit vielem Scharfsinn und Geschick durchgeführt und einen interessanten, zu weiteren Forschungen anregenden Beitrag zur Theorie der Matrizes geliefert.

Osthofen, 11. Juni 1907. P. Muth.

Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik, München, Maximilianstr. 26. Führer durch die Sammlungen. Mit 96 in den Text gedruckten Abbildungen und Plänen. [158 S.] qu. 4. Leipzig 1907, B. G. Teubner. geh. ℳ 1.—.

Der Führer soll eine rasche Übersicht über den Gesamtinhalt des Museums nach seiner gegenwärtigen Aufstellung im alten Nationalmuseum in München gewähren. In zusammenfassenden Erläuterungen wird die Anordnung der einzelnen Gruppen dargelegt und auf die wichtigsten Einzelobjekte hingewiesen. Zahlreiche Illustrationen ergänzen die Darlegungen und lassen den Katalog auch für die Nichtbesucher als ein wertvolles vorbereitendes Orientierungsmittel erscheinen, das in seinen systematischen und historischen Angaben als eine Geschichte der naturwissenschaftlichen und technischen Entdeckungen und Erfindungen betrachtet werden kann.

Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik, München, Maximilianstr. 26. Bibliothek-Katalog. [IX u. 271 S.] gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner. geh. ℳ 5.—.

Die Bibliothek des Deutschen Museums soll in ihrer weiteren Ausgestaltung eine Zentralstelle der alten und neuen Literatur werden, soweit diese die exakten Naturwissenschaften sowie die Technik und Industrie umfaßt. Außer Büchern und Zeitschriften enthält die Bibliothek als besonderen Schatz auch Handschriften bedeutender Gelehrter und Techniker. Im innigsten Anschluß an die Bibliothek soll eine Plansammlung errichtet werden, die als ein Archiv hervorragender Werke der Technik ein ganz besonderes Belehrungsmittel bilden wird. Es ist in Aussicht genommen, nach weiterer Vervollständigung der Bibliothek durch die zu erwartenden Stiftungen sowie nach dem weiteren Ausbau der Plansammlung einen vollständigen Katalog herauszugeben, während dessen gegenwärtige Ausgabe nur als provisorischer Behelf für die Benutzung der Bibliothek dienen soll.

Katalog des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen. Bearbeitet von K. Hiemenz. Mit einem Vorwort von F. Klein. [XI u. 224 S.] gr. 8. Leipzig 1907, in Kommission bei B. G. Teubner. ℳ 4.—.

Der unmittelbare Anlaß zur Drucklegung des Katalogs war das von Jahr zu Jahr lebhafter hervortretende Bedürfnis, den jeweiligen Benutzern des Lesezimmers einen zuverlässigen und bequemen Führer zur Übersicht über die vorhandenen Bestände in die Hand zu geben. Ich habe mich aber gern entschlossen, den Katalog auch dem allgemeinen mathematischen Publikum vorzulegen, da Zusammenstellungen dieser Art, die bei der Neueinrichtung mathematischer Bibliotheken und Arbeitsräume nützlich sein können, bisher in der Tat nur in sehr ungenügender Art existieren. F. Klein.

A. Höfler, Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und mit 230 physikalischen Leitaufgaben. Verfaßt unter Mitwirkung von E. Maiß und F. Poske. Mit 981 Abbildungen im Text und 12 Tafeln, zum Teil in Farben. XXXI u. 966 S. Braunschweig 1904, Fr. Vieweg & Sohn. Preis geh. M. 15.—, geb. in Lnwd. M. 16.—.

F. Poske, Unterstufe der Naturlehre. (Physik nebst Astronomie und Chemie.) Nach A. Höflers Naturlehre für die unteren Klassen der österreichischen Mittelschulen für höhere Lehranstalten des Deutschen Reiches bearbeitet. Mit Abbildungen und 1 Tafel. 246 S. Braunschweig 1905, Fr. Vieweg & Sohn. Preis geh. M. 2.40, geb. in Lnwd. M. 2.80.

Als Höfler, der bekannte österreichische Philosoph, nach siebenundzwanzigjähriger Tätigkeit als Lehrer der Mathematik, Physik und philosophischen Propädeutik an einem Wiener Gymnasium einem Rufe an die Universität Prag folgte, erschien seine hier anzuzeigende Physik, die unter der Mitwirkung des verstorbenen E. Maiß und von F. Poske entstanden ist. Eine eingehende Besprechung fällt aus dem Rahmen des Jahresberichtes heraus. Soviel sei aber gleich gesagt, nachdem der Berichterstatter über ein Jahr lang das Buch beim Unterricht in Prima und Obersekunda benutzt hat, daß wir hier ein Werk vor uns haben, das für die moderne Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichtes an den höheren Schulen von größter Bedeutung ist.

Das Buch zerfällt in vier Teile, deren erster die Mechanik bringt (beginnend mit Phoronomie des Punktes und schließend mit mechanischen Schwingungen und Wellenbewegungen). Im zweiten Teil finden wir die Physik der Sinnesqualitäten (Wärme, Schall, Licht); im dritten die elektrischen und magnetischen Erscheinungen und im vierten astronomische, meteorologische und chemische Erscheinungen. — Klares Herausarbeiten der physikalischen Begriffe, moderne mathematische Formulierung der Gesetze — nicht in der schwerfälligen Proportionsform, wie sie noch so oft heute erscheint — (vgl. hierzu die Bemerkungen Öttingens in seiner Ausgabe der Galileischen Unterredungen, Ostwalds Klassiker, Nr. 11. S. 132), philosophische Durchdringung durch den steten Hinweis auf logische und psychologische Fragen, natürliche Betonung des Geschichtlichen[1]) erscheinen als die Hauptvorzüge dieser Physik.

1) Vgl. hierzu auch Höflers Antrittsvorlesung „die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichtes". Braunschweig. Fr. Vieweg & Sohn 1904.

Ganz besonders wertvoll aber wird das Buch durch den Anhang, dessen erster Teil auf 76 Seiten Zusätze aus der *angewandten Mathematik* bringt. Aus diesen Zusätzen seien erwähnt: Vektoren und Skalaren, die Mittel (auch das harmonische in seiner Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel), die mathematische Funktion und ihre graphische Darstellung, der Differentialquotient und das Integral, die harmonische Analyse — nicht unter diesem Namen — (auf diesen Abschnitt weise ich besonders gern hin, weil die graphische Zusammensetzung von Sinuskurven im mathematischen Unterricht noch kaum behandelt wird; nur bei Schülke kommt sie vor. Ich selbst habe schon wiederholt auch in der Reifeprüfung die Nullstellen einer Funktion wie $y = a \sin x + b \sin 2x$ durch *Zeichnung* und Rechnung bestimmen lassen). Sehr wichtig ist ferner die annähernde Größenbestimmung in der Physik, da der Fehler der eingebildeten Genauigkeit noch recht häufig vorkommt. An die Kegelschnitte schließt sich eine zu Versuchen einladende Behandlung der Zykloiden, Schraubenlinien, einhüllenden Linien und Flächen und schließlich der Trajektorien an.

Alle diese mathematischen Begriffe finden bei Höfler ihre physikalische Anwendung, zum Teil in 230 ausgezeichneten lehrreichen Leitaufgaben.

Ein zweiter Teil des Anhangs bringt auf 42 Seiten *Zusätze aus der Logik und Psychologie* und gewinnt dadurch heute besondere Wichtigkeit, da für die philosophische Propädeutik ein lebhafteres Interesse sich wieder geltend macht. Höfler ist für einen besonderen Unterricht in der Propädeutik, wie das in Österreich der Fall ist, während ich kein Freund besonderer philosophischer Stunden bin. (Vgl. mein Referat: Dieser Jahresbericht 1907. B. 16. S. 90.) Ich halte vielmehr, wie ich das schon vor 4 Jahren in einem Bericht für die schlesische Direktorenkonferenz ausgesprochen habe, die Erweckung des philosophischen Interesses innerhalb des anderen Unterrichtes für das beste und namentlich innerhalb der Mathematik und Physik, und für diesen Fall bietet das Höflersche Buch eine sehr gute Hilfe.

Wo freilich der propädeutische Unterricht in Philosophie wesentlich den Vertretern der sprachlichen Fächer obliegt, da ist der Gebrauch des Höflerschen Anhanges oder auch seiner größeren *Grundlehren der Logik und Psychologie* bedenklich, wie ich vor einigen Jahren an einem außerpreußischen Gymnasium beobachten konnte. Es ist aber heute sehr wünschenswert, daß die Mathematiker und Physiker an den höheren Schulen sich für die philosophische Propädeutik interessieren. (Vgl. hierzu auch die Bemerkungen F. Kleins in seinen eben erschienenen *Vorlesungen über den mathematischen Unterricht.* Leipzig, Teubner. S. 132.)

Ein so umfangreiches Werk, wie die Höflersche Physik, ist natürlich nicht für den Gebrauch der Schüler bestimmt; es ist ein Handbuch für den Lehrer, das hoffentlich auch recht vielen Lehrern der Mathematik und Physik an den höheren Schulen in die Hände kommt. Bei der von maßgebender Stelle in Berlin immer wieder verkündeten freiheitlichen Auffassung läßt sich innerhalb unserer heutigen Lehrpläne, ohne erst einen großen behördlichen Apparat der Anfragen usw. in Bewegung zu setzen, sehr wohl der mathematisch-physikalische Unterricht im Sinne Höflers erteilen.

Zum Gebrauch der Schüler sind kleinere Ausgaben erschienen, die für die österreichischen Gymnasien bestimmt sind. Für die Schulen des deutschen Reiches hat F. Poske im Anschluß an Höfler eine sehr empfehlens-

werte „Unterstufe der Naturlehre" herausgegeben. Da wir im Eulergedächtnisjahre stehen, so sei mir zu Seite 116 dieser Naturlehre die Bemerkung gestattet, daß Euler in einem Briefe an eine deutsche Prinzessin vom 15. August 1761 von dem Blitzableiter des Pfarrers Divisch in Mähren erzählt, während bei Poske die Erfindung des Blitzableiters durch Franklin in das Jahr 1765 verlegt wird. In anderen Büchern findet man die Jahre 1760 und 1755 angegeben. (Vgl. hierzu meinen Vortrag über Leonhard Euler. Leipzig, Teubner 1907. S. 15.)

Görlitz, 21. Mai 1907. WILHELM LOREY.

2. Bücherschau.

Appel, P. et J. Chappuis, Leçons de mécanique élémentaire, à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B conformément aux programmes de 1905. 2e éd., entièrement refondue. 1re partie: Notions géométriques. Cinématique. 2e partie: Dynamique et statique du point. Statique des corps solides. Machines simples. 2 vol. avec fig. Paris 1907. Fr. 6.—.

Baire, R., Leçons sur les théories générales de l'analyse. Tome 1er: Principes fondamentaux. Variables réelles. X, 232 p. Paris 1907. Fr. 8.—.

Barbarin, P., La géométrie noneuclidienne, 2e édition. Paris 1907. Fr. 2.—.

Böger, R., Die optische Verwandtschaft in projektiver Darstellung. Schulprogramm Hamburg 1907. ℳ 2.—.

Bruno, K., Die Grundlehren der Integral- und Differentialrechnung. 51 S. Wien 1908. ℳ 1.25.

Dafert, F. W., Über einige Reformen auf dem Gebiete des technischen Unterrichts. Wien 1908. ℳ 1.—.

Falk, M., Über die Haupteigenschaften derjenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche Additionstheoreme besitzen. Upsala 1907. ℳ 5.—.

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, Herausgegeben vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Mit 2 Bildnissen Eulers. IV, 137 S. Leipzig 1907. ℳ 5.—.

Girndt, M., Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte bautechnische Lehranstalten. 1. Teil. Lehre von den ebenen Figuren. 3. Auflage. Mit 271 Figuren im Text und auf 5 Tafeln und 238 der Baupraxis entnommenen Aufgaben. VIII, 88 S. gr. 8. Leipzig 1907. ℳ 2 20.

Keck, W., Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeits-Berechnung der Bauwerke. 2. vermehrte Auflage, neu bearbeitet von L. Hotopp. 2. Teil. VIII, 418 S. m. 214 Holzschnitten. Hannover 1908. ℳ 11.—.

Klein, F., P. Wendland, Al. Brandt, Ad. Harnack, Universität und Schule. Vorträge auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner am 25. September 1907 zu Basel gehalten. Mit einem Anhang: Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte betreffend die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften. 88 S. gr. 8. Leipzig 1907. geh. ℳ 1.50, geb. ℳ 2.—.

Kohlrausch, F., Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2. vermehrte Auflage. 6.—10. Tausend. XVIII, 268 Seiten. Leipzig 1907. ℳ 4.—.

Perry, J., Applied mechanics. A treatise for the use of students. New edition. London 1907. 7 s. 6 d.

Pincherle, S., Algebra complementare. Parte II. Teoria delle equazioni. 2a edizione. Milano 1907. £ 1.50.

Schorr, R., Tafel der Reduktions-Konstanten zur Berechnung scheinbarer Sternörter für die Jahre 1830 bis 1860. Hamburg 1907. ℳ 7.—.

Schubert, H., Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Kleine Ausgabe. 3. Auflage. Leipzig 1907. *M* 5.—

Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume. 1. Heft. Simplicius, des, Bericht über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch von Ferd. Rudio. Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Mit 11 Figuren im Texte. X, 184 Seiten. Leipzig 1907. *M* 4.80.

Valbreuze, R. de et Ch. Laville, Éléments de mécanique et d'électrité. VI, 379 p. avec fig. Paris 1907. Fr. 7.—.

Vital, A., Corso di navigazione geodetica ad uso delle scuole nautiche. IV, 144 S. m. Fig. Triest 1908. *M* 5.—.

Wall, C., Éléments de mécanique appliquée et d'hydrostatique. Notions sommaires sur la résistance des matériaux et sur la graphique statique, à l'usage des élèves officiers de la marine et des éléves des écoles de maistrance des arsenaux. 269 p. avec 195 fig. Paris 1907.

Weber, H. und **J. Wellstein,** Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. 2. Band. Enzyklopädie der elementaren Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. M. 251 Fig. XII, 596 S. Leipzig 1907. *M* 12.—.

Weber, M., Einführung in die Kristalloptik. 17 S. mit 35 Fig. München 1908. *M* —.80.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe. 12. Band. 4. Heft.

Neuberg, Über hyperboloïdische Würfe. Ludwig, Über das Problem, eine Fläche II. Grades in einem der Gestalt und Größe nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden. Janisch, Zur Schattenkonstruktion für das Plückersche Konoïd. Rogel, Beitrag zur trigonometrischen Analysis. Heger, Die Kugeln, die einem unebenen Vierecke eingeschrieben sind. Malo, Sur la génération cissoïdale des quartiques unicursales bicirculaires. Schaefer, Theorie zweier Beugungsversuche mit elektrischen Wellen. Rezensionen. Vermischte Mitteilungen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 133. Heft 2.

Pirondini, Sur la théorie générale des radiales et des anti-radiales. Appell, Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Tôkyô Sugaku-Buturigakkwai Kizi-Gaiyô. [Proceedings of the Tôkyô Mathematico-Physical Society.] Vol. III. 1906.

Fujiwara, On the configuration arising from a Pascal's Hexagon. Kusakabe, A note on the direction of earthquake motion. Nagaoka, On damped progressive waves and the formation of tail in distant earthquakes. Honda and Terada, Effects of stress on magnetization and its reciprocal relations to the change of elastic constants by magnetization. Nakagawa, On maximum and minimum. Nagaoka, Dispersion of seismic waves. Nagaoka, Group velocity in distant earthquakes. Hayashi, On functions having an addition theorem. Hayashi, On the Mr. Nakagawa's Lecture on maximum and minimum. Hayashi, The isosceles trapezium problem is incorrect. Kimura, Harmonic analysis of the variation of latitude during the years

1890.0—1905.0. Nagaoka, Strains produced by surface loading over a circular area. Nagaoka, Stationary surface waves. Terada, On syakuhati. Kusakabe, A note on Kanamé-ishi of Kashima: an example of the relation between seismic action and geological structure. Yokota, On vibration of steamers. Terada, On the vibrating of a bar floating on a liquid surface. Kusakabe, Effect of heat on the kinetic modulus of elasticity of rocks. Hayashi, Some questions in the hyperbolic geometry. Hayashi and Sato, The symmedian point of a polylateral. Hayashi, Seki's Daijutsu-bengi and byōdai-meichi. Shimizu and Tanakadate, Wiedemann effect in ferromagnetic metals at high temperatures. Yosida and Kadooka, Experimental determinations of induced magnetism in cylinders and ellipsoids. Hirayama, On the harmonic analysis of sun-spot number. Honda, On the velocity of sea waves through the Pacific. Ishitani, Note on the formula for calculating the period of seiches. Terada, Note on seiches. Hayashi, Seki's Kaihōhoupen, Hōjin-ensan, and Sandatsu-kempu. Yoshiye, A note on Lie's theorem on integrating factor. Endô, Four series of works of Seki's school [in japanischer Sprache]. Yoshiye, On the integration of linear differential equations of the second order. Honda, On the seiches in Lake Chiuzenji.

4. Kataloge.

Alfred Lorentz, Leipzig, Kurprinzstr. 10. Katalog 174. Exakte Wissenschaften, Chemie, Technologie. (1908.)

R. Oldenbourg, München. Technische Literatur für Theorie und Praxis. (Verlagsanzeige, ausgegeben Winter 1907/1908.)

A. Twietmeyer, Leipzig, Gellertstr. 16. Ausländische Zeitschriften. Die in Deutschland und Österreich-Ungarn gangbarsten ausländischen Zeitschriften. Leipzig 1907.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

W. Rouse Ball, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Deuxième édition française traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrik. Première partie. Arithmétique, Algèbre et théorie des nombres. Paris 1907. A. Hermann. Fr. 5.—.

W. Rouse Ball, Histoire des mathématiques. Édition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome deuxième. Avec des additions de R. de Montessus. Les mathématiques modernes depuis Newton jusqu' à nos jours. Note complémentaire de M. G. Darboux. Paris 1907. A. Hermann. Fr. 8.—.

E. Bardeys Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. II. Teil (für die Oberklassen neunstufiger Anstalten). Bearbeitet von H. Hartenstein. Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ 2.60.

M. Bôcher, Introduction to higher algebra. Prepared for publication with the coöperation of E. P. R. Duval. The Macmillan Company, New York 1907. $ 1.90.

J. Bojko und E. Wendling, Neues System zum technischen Kopfrechnen. I. Heft. Die Quadratbildung der Zahlen 1 bis 1250. Systematisch bearbeiteter Lehrgang mit zahlreichen Beispielen und Übungen. Zürich 1907. E. Speidel. ℳ —.50.

E. Czuber, Die Kollektivmaßlehre. [Sonderabdruck aus den „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens", 1907.] Wien 1907.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I (Deuxième volume), Algèbre. Premier fascicule [Les fonctions rationelles; exposé, d'après l'article allemand de E. Netto-Gießen, par R. Le Vavasseur-Lyon]. Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ 6.80.

S. Fukuzawa, Klassifikation der Unstetigkeiten von Funktionen einer reellen Veränderlichen. Tokio 1907.

O. Haßlinger und **E. Bender,** Der Betrieb des Zeichenunterrichts. Die Zeichenmaterialien und Lehrmittel sowie die Anlage und Einrichtung der Zeichensäle. Ein Handbuch für Zeichenlehrer, Schulbehörden und zum Selbstunterricht. Mit Unterstützung des Großherzogl. Badischen Oberschulrates herausgegeben. Mit 206 Figuren und 21 Tafeln. Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Der Ergänzungsbände II. Band. [Enthaltend: A. Schoenflies. Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil.] Leipzig 1908. B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Fr. Kohlrausch, Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Zweite vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ 4.—.

E. Marx, Grenzen in der Natur und in der Wahrnehmung vom Standpunkte der Elektronentheorie und des elektro-magnetischen Weltbildes. Akademische Antrittsvorlesung gehalten am 2. November 1907. Mit einer Vorbemerkung, Zusätzen und Literaturangaben. Leipzig 1908. B. G. Teubner. ℳ 1.—.

M. Möller, Exakte Beweise für die Erdrotation. Elementar dargestellt. Wien 1908. Alfred Hölder.

M. C. Mott-Smith, Metageometrische Raumgeometrien. Eine philosophische Untersuchung. Dissertation. Halle a. S. 1907.

S. Müller, Technische Hochschulen in Nordamerika. Mit zahlreichen Textabbildungen, einer Karte und einem Lageplan. [Aus Natur- und Geisteswelt, 190. Bändchen.] Leipzig 1908. B. G. Teubner. geh. ℳ 1.—, geb. ℳ 1.25.

Fr. Reidt, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. Teil: Trigonometrie. 5. Auflage. Neu bearbeitet von H. Thieme. Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ 4.80.

— Auflösungen hierzu. geh. ℳ 1.80, geb. ℳ 2.50.

F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hyppokrates. Griechisch und deutsch. Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Mit 11 Figuren im Texte. [Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume. 1. Heft.] Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ 4.80.

R. Sachsze, Einführung in die chemische Technik. Kurz gefaßtes Lehrbuch der chemischen Technologie mit Berücksichtigung der Grundlehren der Chemie für Handels-, Real- und Gewerbeschulen. Mit einem Titelbild und 92 Figuren im Text. Leipzig 1907. B. G. Teubner. steif geh. ℳ 2.—, geb. ℳ 2.50.

Ch. M. Tidy, Das Feuerzeug. Drei Vorträge vor jugendlichen Zuhörern, nach dem englischen Original bearbeitet v. P. Pfannenschmidt. Mit 40 Figuren im Text. Leipzig 1907. B. G. Teubner. ℳ. 2.—.

S. Valentiner, Vektoranalysis. Mit 11 Figuren. [Sammlung Göschen.] Leipzig 1907, G. J. Göschensche Verlagsbuchhandlung, ℳ —.80.

H. Weber und **J. Wellstein,** Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Zweiter Band. Enzyklopädie der elementaren Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Zweite Auflage. Mit 251 Textfiguren. Leipzig 1907. B. G. Teubner, ℳ 12.—.

E. T. Whittaker, The theory of optical instruments. [Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics.] Cambridge University Press. London 1907. 2 s. 6 d.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Januar und Februar 1908.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Herr Dr. Paul Roth in Brünn, Anastasius Grüngasse 6.

Herr Bruno Hein, Lehramtskandidat in Königsberg i. Pr., Oberlaak 11.

Herr Dr. L. Gustav Du Pasquier, Assistent am Eidgen. Polytechnikum in Zürich IV, Clausiusstr. 42.

Gestorben:

Am 6. Februar starb zu Davos Dr. Richard Greiner.

Adressenänderungen und Berichtigungen:

Bromwich, Th., Lecturer am St. Johns College, Cambridge (England), Devona Terrace 1.

Carathéodory, C., wohnt z. Z. noch Göttingen, Nikolausbergerweg 49.

Guradze, H., ist von Berlin verzogen; Adresse unbekannt.

Hilb, E., Dr., Privatdozent a. d. Universität, Erlangen, Löwenichstr. 33.

Kempe, H., Dr., Professor am Realgymnasium, Remscheid, Viktoriastr. 6

Korn, A., Dr., Universitätsprofessor a. D., München, Hohenzollernstr. 1.

Müller, Felix, Dr., Professor, Oberloschwitz bei Dresden, Post Weißer Hirsch, Bautzenerstr. 84.

Müller, Johann, O., Dr., Göttingen, Nikolausbergerweg 49.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 29. Januar 1908.* Tagesordnung: Jacobsthal, über den Aufbau der transfiniten Arithmetik; P. Schafheitlin, über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion; Güntsche, Bemerkung zu dem Vortrage: Konstruktion des regelmäßigen 257-Ecks. — *Sitzung am Mittwoch, den 26. Februar 1908.* Tagesordnung: Wallenberg, Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen; Jacobsthal: Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *Achte Sitzung am 17. Dezember:* D. Hilbert spricht über die Fortschritte, die in der Behandlung der in seinem Pariser Vortrag 1900 erörterten mathematischen Probleme seither gemacht worden sind. Dabei führt er den Beweis des dort ausgesprochenen Satzes über die Existenz eigentlicher analytischer Funktionen dreier Variabler aus. Alsdann teilt er einen grundlegenden Satz über die Umkehrung unendlichvieler „analytischer“ Gleichungen mit unendlichvielen Unbe-

kannten mit, der eine Übertragung des bekannten Satzes für endlich viele Variable ist. — *Neunte Sitzung am 14. Januar 1908:* F. Klein legt den Gesamtbericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte vor und berichtet von der in den Ferien in Cöln vollzogenen Konstituierung des aus jener Kommission hervorgegangenen erweiterten „Deutschen Ausschusses". — C. Carathéodory teilt einen neuen einfachen allgemeinen Beweis des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie mit; er beruht auf dem Hilfssatze, daß ein Differentialausdruck $X_1\,dx_1 + \cdots + X_n\,dx_n$ stets dann einen Multiplikator besitzt, wenn man mit $X_1\,dx_1 + \cdots + X_n\,dx_n = 0$ genügenden Kurven nicht jeden Punkt der Umgebung des Nullpunktes von diesem aus erreichen kann. — *Zehnte Sitzung am 21. Januar:* F. Klein gedenkt des verstorbenen Lord Kelvin und seiner großen wissenschaftlichen Bedeutung. — F. Bernstein und H. Brandes berichten über die demnächst erscheinende Hallenser Dissertation des letzteren, die die Anzahl der zu einem Beweise des pythagoräischen Satzes notwendigen Anwendungen des ebenen Kongruenzaxiomes — als Maß für die Einfachheit des Beweises — untersucht; in diesem Sinne ist der Beweis des An Nairici der einfachste. — H. Weyl referiert über seine Untersuchungen über Integralgleichungen mit Kernen höherer Singularität, bei denen er insbesondere einen neuen Zugang zum Fourierschen Integral erhält (vgl. die demnächst erscheinende Dissertation). — R. Schachenmeyer behandelt auf Grund der Hadamardschen Grundlösungstheorie die hyperbolischen Differentialgleichungen mit zwei und mehreren Variablen. — E. Bunitzky behandelt die Theorie der Eigenwerte von Differentialgleichungen 2. Ordn. bei allgemeineren Randbedingungen. — A. Frizell teilt einen allgemeinen logisch-gruppentheoretischen Satz über Zahlsysteme mit, der die Ableitung der rationalen Zahlen aus den ganzen u. dgl. umfaßt. — *Elfte Sitzung am 28. Januar:* D. Hilbert teilt einen die Gruppeneigenschaft analytischer Funktionen von unendlichvielen Variablen betreffenden Satz sowie einige einfache Anwendungen desselben mit. — R. Schimmack berichtet über seine Untersuchungen über die in der Vektoranalysis auftretenden und verwandte Funktionalgleichungen sowie über den logischen Aufbau der verschiedenen Axiomensysteme der Vektoraddition (vgl. die demnächst erscheinende Dissertation) — E. Hellinger referiert über neue Untersuchungen von E. Hilb, der insbesondere die von F. Klein in Bd. 64 der mathem. Ann. angeregten Verallgemeinerungen der Oszillationstheoreme für lineare Differentialgleichungen mit 4 singulären Punkten und die in Verbindung damit stehenden Fundamentaltheoreme der automorphen Funktionen beweist.

Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Mathematik und Physik. Am 22. Februar wurde das zehnjährige Bestehen der Vereinigung gefeiert. Die Festrede hielt Geheimrat F. Klein-Göttingen.

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Freitag, den 8. November 1907.* Tagesordnung: Frank, über den Verlauf der Bahnkurven der Mechanik (besonders nach den Arbeiten von Kneser und Hadamard). — *Freitag, den 22. November 1907.* Tagesordnung: Rothe, Oszillationstheorem und automorphe Funktionen. — *Freitag, den 6. Dezember 1907.* Tagesordnung: Freud, über die Natur der Lösungen partieller Differentialgleichungen. — *Freitag, den 10. Januar 1908.* Tagesordnung: Berger, über die größte Schwankung einer analytischen Funktion in einem Kreise. — *Freitag, den 24. Januar*

1908. Tagesordnung: Rothe, Die Obertheoreme der automorphen Funktionen. — *Freitag, den 7. Februar 1908.* Tagesordnung: Blaschke, über eine Verallgemeinerung der Laguerreschen Hyperzykeln. — *Freitag, den 21. Februar 1908.* Tagesordnung: Hanni, Kinematische Interpretation der Maxwellschen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsgesetz der Geometrie. — *Freitag, den 6. März 1908.* Tagesordnung: Roth, Automorphe Funktionen von n Argumenten.

American Mathematical Society. Die 15. Jahresversammlung fand zu Newyork City in der Columbia Universität am 27.—28. Dezember 1907 statt. Folgende Vorträge wurden bei dieser Gelegenheit gehalten:

Griffin, Certain families of central orbits with a constant apsidal angle; Griffin, On the non-existence of certain types of periodic solutions in the problem of three bodies; Lovett, On a problem in mechanics; Lovett, On a class of periodic solutions in the problem of four bodies; Veblen und Young, A set of assumptions for projective geometry; Morley, The transformation of a Clifford configuration into itself; Richardson, Lebesgue improper integrals; Brown, The motion of the moon relative to a moving plane of reference; Brown, The development of the infinite determinant; Ranum, Groups of singular matrices; Hardy, Curves in a space of n dimensions; Coble, A reduction of the problem of solving a quintic to Klein's „problem of the A's“ by means of invariant theory; Hutchinson, Hermitian forms with zero determinant; Wilson, On the uniform rotation of a homogeneous chain obout a vertical axis; Wilson, On the theory of double products and strains in hyperspace; Max Mason, Note on implicit functions; Hawkes, On the equivalence of families of bilinear forms; Bliss, An existence theorem for a partial differential equation of the first order which is non-analytic.

American Mathematical Society. Chicago Section. Die 22. ordentliche Sitzung fand zu Chicago, Illinois, am 30.—31. Dezember 1907 und am 1. Januar 1908 statt. Folgende Mitteilungen bildeten das wissenschaftliche Programm der Versammlung.

Morehead, The rapid computation of power residues; Sisam, On the inflectional tangents to a quartic curve; Sisam, Some loci connected with plane curves; Shaw, Standard forms of certain types of Pierce algebras; Miller, On the multiple holomorphs of a group; Dowling, On the generation of plane quintics with ordinary double points; Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces; Hasemann, Some boundary problems in the theory of functions; Crathorne, Hilbert's invariant integral in the general isoperimetric problems; Escott, The converse of Fermat's theorem; Brenke, Convergence of trigonometric series; Schweitzer; Tactical systems; Birkhoff, On a certain existence and oscillation theorem; Moore, Note on a form of general analysis; Dickson, Reduction of families of quadratic forms in a general field; Dickson, On commutative linear groups; Buchanan, Note on the convergence of a sequence of functions of a certain type; Underhill, Note on the calculus of variations.

Gleichzeitig fanden gemeinsame Sitzungen mit den Ingenieuren, über die bereits in Heft 1, S 7 berichtet wurde, und mit der Section A (Astronomie und Mathematik) der American Association for the advancement of science

statt, in der Kasner als „presidential address" einen Vortrag über Geometrie und Mechanik hielt.

American Mathematical Society. Southwestern Section. Am 30. November 1907 fand in St. Louis, Mo., die erste ordentliche Sitzung der neu gegründeten Southwestern Section der American Mathematical Society statt. Das wissenschaftliche Programm umfaßte folgende Vorträge: Wernicke, On Euler's tactical „36 Officers" Problem; Wernicke, Extension of the map-color theorem to 3 dimensions. Osgood, On the differentiation of definite integrals; Cajori, Notes on the history of the slide rule; Jugold, Note on areal cross ratios; James, A relation connecting aberration and parallax; Shaw, A new graphical method for quaternions; Hedrick, On a definition of the jacobian; Chessin, On an integral appearing in photometry; Kellogg, Real roots of an algebraic equation; Ingold, Note on a connection between algebraic invariants and the invariants of a differential form; Newson, On the resultant of two collineations; Miller, On the holomorph of the cyclic group of order p^m; Davis, Colored imaginaries on a cubic. — Die nächste Versammlung soll in der Universität von Kansas stattfinden.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

(Vacat.)

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Sommersemester 1908 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften.

Berlin. Schwarz, Über Kurven doppelter Krümmung und krumme Flächen (4); Variationsrechnung (4); Über einige Anwendungen der elliptischen Funktionen (2); Seminar; Mathematische Kolloquien. Frobenius, Theorie der Determinanten (4); Seminar. Schottky, Elementare Analysis (4); Theorie der Abelschen Funktionen (4); Seminar. Hettner, Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (2). Knoblauch, Anwendungen der elliptischen Funktionen (4); Integralrechnung (4); Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung (1). Lehmann-Filhès, Analytische Mechanik (4); Übungen dazu (1). Landau, Differentialrechnung (4); Über die Verteilung der Primzahlen (4). Schur, Theorie der algebraischen Gleichungen II (4); Analytische Geometrie (4). Foerster, Theorie und Kritik der Raummessung (2); Geschichte der mittelalterlichen Astronomie (1); Kosmische Erkenntnis und psychische Probleme (1). Bauschinger, Mechanik des Himmels, neuere Theorien (3); Übungen zur Ausgleichungsrechnung (1). Struve, Theorie der Systeme von Jupiter und Saturn (3); Übungen an den Instrumenten der Sternwarte. Helmert, Theorie der Kartenprojektionen (1); Methode der kleinsten Quadrate II (1). Scheiner, Spektralanalytische Theorien (1); Astrophysikalisches Kolloquium (1). Marcuse, Theorie und Anwendung astronomischer Instrumente (2); Einführung in die astronomische Geographie und kosmische Physik (2). Ristenpart, Über Doppelsterne (1); Übungen in Messungen an Doppelsternen und Rechnungen ihrer Bahnen (3); Gemeinverständliche Himmelskunde (2). Rubens, Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik (1); Physikalisches Kollequium. Wehnelt, Theoretische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum II (1). Planck, Theoretische Optik (4); Mathematisch-physikalische Übungen (1). Slaby, Elektromechanik (4);

Drahtlose Telegraphie und Telephonie (2). Warburg, Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik (2). Schmidt, Theorie der Gezeiten (2); Das Innere der Erde (1); Theorie der erdmagnetischen Instrumente (1). Meyer, Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik (2). Neesen, Geometrische Optik (2). Aschkinaß, die Radioaktivität (1). Börnstein, Physikalische Unterrichtsübungen (4). Gehrcke, Theorie der Wechselströme (1). Grüneisen, Ausgewählte Teile aus der Hydrodynamik (1). Henning, Absolute Temperaturskala und Temperaturmessung (1). Kiebitz, Elektrische Meßinstrumente (1). Krigar-Menzel, Theoretische Physik II (4). Ladenburg, Ausgewählte Kapitel aus der experimentellen Strahlungslehre (2). Laue, Elektronentheorie (2). Martens, Ausgewählte Kapitel aus der Elektrizitätslehre (2). Valentiner, Über das Verhalten der wirklichen Gase (1). v. Ihering, Maschinenkunde mit Übungen (4). Hellmann, Theoretische Meteorologie (2); Meteorologie (2); Meteorologisches Kolloquium.

Bonn. Study, Elliptische Funktionen (4); Ausgewählte Kapitel der Elementargeometrie (1); Seminar. London, Darstellende Geometrie mit Zeichenübungen (4); Ausgewählte Kapitel der analytischen Geometrie (2); Seminar. Kowalewski, Differential- und Integralrechnung I (4); Übungen dazu (1); Grundlagen und Geschichte der höheren Analysis (2); Lektüre und Besprechung ausgewählter Schriften von Leibniz und Newton (1). Schmidt, Einführung in die Zahlentheorie (4). Mönnichmeyer, Geographische Ortsbestimmungen (2); Praktische Übungen auf der Sternwarte. Küstner, Theorie und Praxis der astronomischen Instrumente (3); Astronomisches Kolloquium; Praktische Übungen auf der Sternwarte. Kayser, Physikaliches Kolloquium. Kaufmann, Theorie der Wärme (4). Übungen dazu (1). Bucherer, Ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik (1). Pflüger, Elektromagnetische Wellen (1). Eversheim, Spektralanalyse (2).

Braunschweig. Fricke, Analytische Geometrie und Algebra, Differential- und Integralrechnung I mit Übungen, Trigonometrische Reihen und harmonische Analyse. Vektorentheorie, Analytische Mechanik. Hohenner, Geodäsie II nebst Übungen, Grundzüge der sphärischen Astronomie mit Übungen, Vermessungsübungen I. u. II., Planzeichnen. Ludwig, Darstellende Geometrie mit Übungen, Geometrie der Bewegung. Ausgewählte Kapitel aus der elementaren Geometrie. Schlink, Technische Mechanik I mit Übungen, Technische Mechanik II (Hydraulik) mit Übungen. Schöttler: Festigkeitslehre, Kinematik, Angewandte Wärmemechanik, Übungen zur theoretischen Maschinenlehre. Leitung des mechanischen Laboratoriums II (für Fortgeschrittenere). Wernicke, Statik starrer und elastisch-fester Körper mit Übungen. Zenneck, Physikalisches Praktikum. Theorie des elektromagnetischen Feldes II, Mechanische Wärmetheorie, Experimentalphysik, physikalisches Kolloquium.

Breslau. Rosanes, Algebraische Gleichungen (4); Seminar. Sturm, Differentialrechnung und Elemente der Integralrechnung (4); Differentialgeometrie (2); Seminar. Kneser, Variationsrechnung (4); Allgemeine Potentialtheorie (2); Seminar. Franz, Interpolation, mechanische Quadratur und Berechnung der speziellen Störungen der Himmelskörper (2); Sphärische und praktische Astronomie (4); Astronomisches Praktikum. Lummer, Physikalisches Kolloquium. Pringsheim, Kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität (4); Seminar; Kolloquium. Schaefer, Theoretische Optik (4); Kolloquium. Sackur, Einführung in die mathematische Behandlung der Chemie.

Danzig. v. Mangoldt, Höhere Mathematik II (3); Übungen dazu (1); Einführung in die höhere Mathematik (5). Schilling, Darstellende Geometrie (3); Übungen dazu (4); Graphische Statik (2); Übungen dazu (3). Sommer, Höhere Mathematik I (5); Unendliche Reihen (2). Lorenz, Einführung in die Mechanik (4); Übungen dazu (2); Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik (2). Kalähne, Akustik (1).

Erlangen. Gordan, Integralrechnung (4); Invarianten (4); Seminar. Noether, Analytische Geometrie des Raumes (4); Differentialgeometrie (4); Vorträge und Übungen in synthetischer Geometrie. Reiger, Thermodynamik (2); Elektromagnetische Lichttheorie (2); Übungen zur theoretischen Physik.

Freiburg i. Br. Lüroth, Integralrechnung (6); Seminar. Stickelberger, Analytische Geometrie des Raumes (4); Zahlentheorie (3); Seminar. Loewy, Determinanten (4); Über die Grundlagen der Geometrie (2); Seminar. Seith, Praktische Geometrie (2); Übungen dazu. Himstedt, Übungen aus der theoretischen Physik (1); Physikalisches Kolloquium. Koenigsberger, Elektrizität und Magnetismus (3); Neuere physikalische Forschungen (1); Besprechung theoretischer Untersuchungen (1). Reinganum, Aufgaben aus der analytischen Mechanik (3).

Göttingen. Klein, Enzyklopädie der Geometrie (4); Seminar. Hilbert, Prinzipien der Mathematik (4); Seminar. Minkowski, Analytische Geometrie (4); Fouriersche Reihen und bestimmte Integrale (2); Seminar. Runge, Differential- und Integralrechnung I mit Übungen (6); Graphische Statik (1); Seminar. Prandtl, Theorie der Elastizität und Festigkeit (3); Einführung in die Maschinentechnik (1); Seminar. Herglotz, Gleichgewicht und Bewegung gravitierender Flüssigkeitsmassen (3); Ausgewählte Kapitel der Himmelsmechanik (3). Zermelo, Mathematische Logik (2). Carathéodory, Funktionen von reellen Veränderlichen (2); Geschichtliche Entwicklung der Variationsrechnung (1). Koebe, Elementare Differentialgleichungen mit Übungen (6). Toeplitz, Einführung in die Theorie der Integralgleichungen (3); Übungen für mittlere Semester. Bernstein, Versicherungsrechnung (2); Übungen dazu (2); Einleitung in die Geschichte der Mathematik (2). Schwarzschild, Allgemeine Astronomie (3); Populäre Astronomie (1); Praktikum. Wiechert, Meteorologie mit besonderer Berücksichtigung der luftelektrischen Erscheinungen (4); Theorie des Lichtes (4); Vermessungswesen I (4); Seminar. Wetter und Wettervorhersage (1); Geophysikalisches Praktikum. Ambronn, Theorie und Gebrauch der astronomischen Instrumente (3); Über Grenzregulierungen und das Vermessungswesen in den Kolonien (1); Übungen. Riecke, Ausgewählte Probleme der Optik (1); physikalische Übungen gemeinsam mit Voigt, Prandtl und Simon (4). Voigt, Theorie des Potentials (4), Einführung in die Elektronentheorie (2). Simon, Elektrische Messmethoden und Messinstrumente (2); Theorie und Technik des elektrischen Lichtbogens (1); Übungen. Bestelmeyer, Kinetische Theorie der Gase (2); Praktikum der Elektronik und Radioaktivität (mit Gerdien) (4). Krüger, Wärmestrahlung (2); Übungen in der Anfertigung und Handhabung von Demonstrationsapparaten (3). Gerdien, Grundzüge der Spektroskopie (2).

Greifswald. Thomé, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes (4); Theorie und Anwendung der Fourierschen Reihe (2); Seminar. Engel, Differentialgeometrie (Fortsetzung) (4); Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen (4); Seminar; Übungen über Transformationsgruppen, Partielle Differentialgleichungen (Fortsetzung) (2). Vahlen, Algebra (Fortsetzung), (3); Übungen (1); Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung (3); Geodätische Exkursionen. Mie, Elementarmathematische Ergänzungen zur Experimental-Physik (1). Holtz, Galvanische Elektrizität (1); Physik der Erde und der Gewässer (1). Stark, Theorie der Elekrizität (4); Übungen (1). Schreber, Thermische Eigenschaften der Gase und Dämpfe (1); Übungen in Demonstrationen physikalischer Apparate (1). Herweg, Elektronen.

Halle. Cantor, Theorie der analytischen Funktionen (5); Seminar. Wangerin, Analytische Geometrie der Ebene mit Übungen (4); Differentialgeometrie (5); Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie (1); Seminar. Gutzmer, Höhere Algebra (4); Anwendungen der elliptischen Funktionen (4); Seminar. Eberhard, Differentialrechnung (4); Übungen dazu (1). Buchholz, Wahrscheinlichkeits- und Aus-

gleichungsrechnung mit Anwendung auf Triangulation (2); Praktische Übungen in geographischer Ortsbestimmung (2). Dorn, Elektromagnetische Theorie des Lichtes (2). Schmidt, Theorie der Wärme (3); Über schnelle elektrische Schwingungen, mit Übungen (2); Kolloquium über elektrische Präzisionsmessungen. Berndt, Einführung in die Vektoranalysis (1).

Heidelberg. Königsberger, Differential- und Integralrechnung (4); Theorie der Linien und Flächen (4); Unter- und Oberseminar. Cantor, Analytische Geometrie der Ebene (4); Determinanten (2); Politische Arithmetik (2). Koehler, Darstellende Geometrie mit Übungen (4). Boehm, Algebra (4); Übungen zur Theorie der Linien und Flächen (2). Bopp, Geschichte der Mathematik im XVIII. Jahrhundert. Valentiner, Allgemeine Astronomie (2). Wolf, Elemente der Meterologie (2). Kopff, Die Kometen (1). Lenard, Physikalisches Kolloquium und Seminar (1). Pockels, Physikalische Mechanik (3); Übungen dazu (1); Geophysik (1). Becker, Physikalische Messapparate und Messmethoden mit Demonstrationen (2). Müller, Wechselströme und elektrische Schwingungen (1).

Jena. Thomae, Elementare Funktionentheorie (5). Haussner, Differential- und Integralrechnung I mit Übungen (5); Analytische Geometrie der Ebene (4); Variationsrechnung (4); Proseminar (2); Seminar (1). Frege, Über algebraische Gebilde der Raumgeometrie (4). Rau, Technische Mechanik (Dynamik) (4); Graphische Übungen (3). Knopf, Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen auf der Sternwarte (4); Interpolationsrechnung und mechanische Quadratur (3); Elemente der Himmelsmechanik (2). Auerbach, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (4); Physikalische Besprechungen.

Königsberg. Meyer, Analytische Geometrie der Ebene (3); Übungen hierzu (1); Seminar. Schoenflies, Theorie der Polyeder (2); Funktionentheorie (4); Seminar. Saalschütz, Differentialrechnung (5); Übungen hierzu (1). Battermann, Geographisch-astronomische Ortsbestimmung (2); Übungen hierzu (2); Praktische Übungen. Cohn, Bahnbestimmung der Planeten und Kometen (3); Ausgewählte Kapitel der sphärischen Astronomie (1). Volkmann, Einleitung in das Studium der theoretischen Physik (4). Seminar.

Leipzig. Neumann, Analytische Mechanik (4); Hölder, Anwendungen der elliptischen Funktionen (3); Elliptische Modulfunktionen (3); Seminar. Rohn, Algebraische Kurven (4); Darstellende Geometrie II (2); Seminar. Hausdorff, Differentialgleichungen (4); Übungen hierzu. Liebmann, Analytische Geometrie der Ebene (4); Vektorrechnung mit physikalischen Anwendungen (2). Bruns, Sphärische Astronomie (4); Praktische Übungen. Peter, Theoretische Astronomie (2); Praktische Übungen. Wiener, Physikalisches Kolloquium. Des Coudres, Thermodynamik (4); Hydrodynamik (2); Physikalisches Kolloquium. v. Oettingen, Akustik und Optik (2). Marx, Kosmische Physik (2). Dahms, Phasenlehre und thermodynamische Theorie der Lösungen (2); Neuere Fortschritte der Photographie (1). Fredenhagen, Elektrische Wellen und drahtlose Telegraphie und Telephonie (2).

München. Lindemann, Integralrechnung (5); Theorie der konformen Abbildung und der linearen Differentialgleichungen (4); Über die Grundbegriffe der Geometrie (2); Seminar. Voss, Analytische Geometrie des Raumes (4); Analytische Mechanik II (4); Seminar. Pringsheim, Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der analytischen Funktionen (4); Elementare Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (3). Doehlemann, Darstellende Geometrie II (Axonometrie, Perspektive) (3); Übungen hierzu (2); neuere Geometrie II (4); Das Imaginäre in der Geometrie (1). Brunn, Elemente der höheren Mathematik (4). Hartogs, Theorie der endlichen diskreten Gruppen und der höheren algebraischen Gleichungen (4). Perron, Stereometrie und sphärische Trigonometrie (2); Variationsrechnung (2). v. Seeliger, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate (4); Praktische Übungen. Großmann, Mathematische Geographie (2); Praktische Übungen.

Röntgen, Physikalisches Kolloquium. Sommerfeld, Wärmeleitung, Diffusion und Elektrizitätsleitung (3); Hydrodynamik (2); Seminar. Graetz, Einleitung in die theoretische Physik (4); elektromagnetische Lichttheorie (3). Donle, Einführung in die neuere Elektrizitätslehre (2). Koch, Interferenz und Beugung mit besonderer Berücksichtigung der Anwendung in der Optik (2).

Münster. Killing, Mechanik II (4); Oberseminar. v. Lilienthal, Differential- und Integralrechnung I (4); Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen (4); Unterseminar. Dehn, Analytische Geometrie I (4); Niedere Geodäsie, Ausgleichungsrechnung und Photogrammetrie (3). Meinardus, Geographische Ortsbestimmung in elementarer Behandlung; Geodätische Übungen in Verbindung mit Exkursionen (gemeinsam mit Dehn und Plaßmann). Plaßmann, Astronomische Zeit- und Ortsbestimmung (2); Zeitrechnung und Kalenderkunde (2); Das Sonnensystem (2); Übungen im Beobachten und Rechnen. Schmidt, Elementar-mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik. Konen, Einleitung in die theoretische Physik (3); Übungen dazu (1); Übungen in physikalischen und chemischen Demonstrationsversuchen und in der Anfertigung einfacher Apparate.

Rostock. Staude, Analytische Geometrie der Ebene (4); Theorie der Kurven und Flächen (4), Seminar. Weber, Analytische Mechanik (3); Übungen dazu (1); die partiellen Differentialgleichungen der Physik (2). Heydweiller, Physikalisches Seminar.

Straßburg. Reye, Geometrie der Lage (4); Seminar. Weber, Bestimmte Integrale und Einleitung in die Funktionentheorie (4); Enzyklopädie der Elementarmathematik (3); Oberseminar. Wellstein, Einleitung in die Invariantentheorie (3); Ultraelliptische Funktionen (2); Unterseminar. Timerding, Analytische Geometrie des Raumes (3); Übungen dazu; Technische Mechanik (4). Epstein, Einführung in die Zahlentheorie (2). Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit Kulturgeschichte (2). Becker, Sphärische Astronomie II (3); Astronomisches Kolloquium; Beobachtungen auf der Sternwarte. Wirtz, Über astronomische Aufnahmen und Beobachtungen auf Reisen (1). Braun, Physikalisches Kolloquium (mit Cohn). Cohn, Theorie der Elektrizität (4). Mandelstam, Die Resonanzerscheinungen und ihre Rolle in der modernen Physik.

Stuttgart. Reuschle, Analytische Geometrie der Ebene (3); Übungen dazu (1); Differential- und Integralrechnung I (4); Übungen dazu (2); Differential- und Integralrechnung III (3); Übungen dazu (1); Seminar. Mehmke, Darstellende Geometrie (4) mit Übungen (6); Analytische Mechanik (3) mit Übungen (1); Seminar. Roth, Perspektive (2). Wölffing, Funktionentheorie (3); Variationsrechnung (1). Bretschneider, Repetitionen in niederer Mathematik (2). Stübler, Mathematische Geographie (2). Fischer, Trigonometrische Übungen (2). v. Weyrauch, Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehramtskandidaten (2). Kriemler, Technische Mechanik (6) mit Übungen (6). Hammer, Praktische Geometrie mit Übungen. N. N., Praktische Geometrie, Übungen für Lehramtskandidaten. Koch, Theoretische Physik (2). Lang, Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichts (2).

Tharandt. Weinmeister, Infinitesimalrechnung I. mit Übungen (4); Mechanik (3); Meteorologie (3). Kunze, Vermessungskunde (4); Planzeichnen; Meßübungen.

Tübingen. v. Brill, Mechanik (5); Seminar. v. Stahl, Niedere Analysis (3); Allgemeine Funktionentheorie (4); Seminar. Maurer, Differential- und Integralrechnung (4); Übungen hierzu (1); Grundbegriffe der Mathematik (2). Waitz, Theorie des Lichtes (3); Übungen hierzu (2); Populäre Astronomie (2). Gans, Theorie der Schwingungen (1). Happel, Partielle Differentialgleichungen der Physik (1).

Würzburg. Prym, Integralrechnung (6); Proseminar; Seminar. Rost, Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Theorie der ebenen Kurven (4); Analytische und synthetische Geometrie der Kegelschnitte (4); Sphärische Astronomie (2); Proseminar; Seminar. v. Weber, Theorie der Raumkurven und Flächen (4); Einführung in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (4); Ergänzungen und Übungen zur analytischen Geometrie des Raumes (2). Cantor, Elektromagnetische Lichttheorie (4). Harms, Wechselstrom und elektromagnetische Schwingungen mit Demonstrationen (1); Mathematische Ergänzungen dazu (1). Füchtbauer, Ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik (1).

4. Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. E. Hilb habilitierte sich an der Universität Erlangen als Privatdozent der Mathematik mit einer Habilitationsschrift „über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen".

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. L. Cohen wurde zum ao. Professor der Mathematik an der George Washington Universität ernannt.

Professor Dr. Helmert, Direktor des Geodätischen Instituts zu Potsdam, wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg erwählt.

Professor Dr. A. Korn an der Universität München hat auf seine Lehrtätigkeit daselbst verzichtet.

Dr. Lebesgue, Dozent der theoretischen und angewandten Mechanik an der Universität Poitiers, wurde zum Professor ernannt.

Dr. W. Mitchell wurde zum Direktor des Haverford College Observatory ernannt.

Professor Dr. G. Schmidt an der Universität Königsberg wurde zum o. Professor der Physik an der Universität Münster ernannt.

Professor Dr. P. Stäckel an der Technischen Hochschule zu Hannover hat einen Ruf als etatmäßiger Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe erhalten und angenommen.

Gestorben.

Dr. T. Barker, früher Professor am Owens College in Manchester, ist am 20. November 1907 gestorben. Er hinterließ 40000 £ für die Victoria Universität, um Professuren für Mathematik und Botanik zu begründen.

Dr. R. Greiner ist am 6. Februar d. J. in Davos gestorben.

Dr. A. Levy, Professor der Mathematik an der Ecole de physique et chimie, ist am 28. Dezember 1907 gestorben.

Dr. Wedekind, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, ist am 8. Februar d. J. daselbst gestorben.

Dr. Ch. A. Young, ehemals Professor der Astronomie an der Princeton Universität, ist am 4. Januar 1908 im Alter von 73 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Brown-Stiftung. Der verstorbene Richard Brown aus Youngstown, Ohio, hat dem Mount Union College für die Ausstattung des mathematischen Lehrstuhles 30000 $ vermacht.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht, enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Cassel und Breslau sowie die seitens der Kommission den Versammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden unterbreiteten Reformvorschläge. Im Auftrage der Kommission herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a. S. XII u. 322 S. gr. 8 1907. In Leinwand geb. *M* 7.—.

Die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte hat nach dreijähriger Tätigkeit ihre Aufgabe im wesentlichen als erledigt erachtet und will in dem vorliegenden „Gesamtbericht" ein möglichst vollständiges Bild ihrer Bestrebungen und Reformvorschläge allen interessierten Kreisen, den Behörden, den Schul- und Fachmännern und dem gebildeten Publikum darbieten, die ihren Arbeiten ein so erfreuliches Interesse gewidmet haben. Die Kommission glaubte, sich in diesem Gesamtberichte nicht auf die Zusammenstellung der verschiedenen von ihr ausgearbeiteten Reformvorschläge beschränken zu sollen; sie hat daher, um die ganze Reformbewegung im Gebiete des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts klarer hervortreten zu lassen, auch die Vorverhandlungen auf der Casseler und der Breslauer Naturforscherversammlung mit aufgenommen. Sind die dort gehaltenen Vorträge und gefaßten Beschlüsse auch nicht formell von der Kommission ausgegangen, so vervollständigen sie doch nach mancher Richtung das Bild von der Entwicklung der Kommissionsvorschläge. — Den Abschluß des Bandes bilden die auf der Dresdener Versammlung gepflogenen Verhandlungen. Diese hatten zum Ziel, an Stelle der von der Naturforschergesellschaft eingesetzten Kommission einen allgemeinen Unterrichtsausschuß zu berufen, in den die großen mathematischen, naturwissenschaftlichen, medizinischen und technischen Vereine und Gesellschaften Vertreter entsenden, um die Weiterführung der Kommissionsarbeit in die Wege zu leiten.

Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch von Ferdinand Rudio. (A. u. d. T.: Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume. I. Heft.) Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Kreisquadratur vor Euklid. Mit 11 Figuren im Texte. [X u. 184 S.] 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates ist eine der wichtigsten Quellen für die Geschichte der griechischen Geometrie vor Euklid. Enthält doch dieser Bericht, neben vielen anderen historisch höchst wertvollen Mitteilungen, einen umfangreichen wörtlichen Auszug aus der leider verloren gegangenen Geschichte der Geometrie des Eudemus! — Bevor der Bericht in seiner jetzigen Gestalt mitgeteilt werden konnte, bedurfte es eines nicht unerheblichen Reinigungsprozesses. Dieser darf jetzt als abgeschlossen betrachtet werden. Die vorliegende Ausgabe

bietet einen einwandfreien Text mit gegenüberstehender, möglichst wörtlich gehaltener Übersetzung. Für die völlige Erschließung des ganzen Sprachschatzes sorgt ein hinzugefügtes ausführliches Wörterbuch, das auch dem weniger Geübten ein Eindringen in den Text ermöglicht. — Vorausgeschickt ist eine Einleitung, die neben anderen historischen Erläuterungen zugleich einen fortlaufenden Kommentar zu dem ganzen Berichte darbietet. Und schließlich sind in einem Anhange ergänzende Urkunden (griechisch und deutsch) in großer Zahl vereinigt und durch verbindenden Text in einen lesbaren Zusammenhang gebracht, so daß das vorliegende Heft nunmehr insofern eine gewisse Abrundung besitzt, als es alles enthält, was bei den Griechen auf dem Gebiete der Kreisquadratur vor Euklid geleistet worden ist. F. R.

R. Bonola, Professor an der Universität in Pavia, **die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe besorgt von Prof. Dr. H. Liebmann in Leipzig. Mit 76 Figuren im Text. A. u. d. T.: Wissenschaft und Hypothese. Band IV. [VIII u. 244 S.] 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Vor kurzem ist in der „Math. Encyklopädie" der Artikel III A, B 1: „Prinzipien der Geometrie" von F. Enriques in Bologna erschienen, der eine große Übersicht und eingehende Erörterung dieser in den letzten Jahren von den namhaftesten Mathematikern wieder so viel bearbeiteten Gebietes gibt. — R. Bonola in Pavia verehrt in Enriques seinen Lehrer, dem er viele Anregungen verdankt, und hat sich selbst durch historische und systematische Arbeiten vor allem auf dem speziellen und doch mathematisch so bedeutsamen Gebiet der nichteuklidischen Geometrie einen Namen erworben. — Aus diesen Arbeiten ist das (zuerst 1906 italienisch bei Zanichelli in Bologna erschienene) Werk herausgewachsen, mit dessen vom Verfasser und vom Übersetzer erweiterten deutschen Ausgabe wir nicht nur den Mathematikern einen Gefallen zu erweisen glauben (es sei z. B. der in der Formelzusammenstellung § 56 kristallisierte Kern von Bolyais absoluter Geometrie erwähnt, dann die hier im Anhang übersichtlich dargestellte statische Begründung der nichteuklidischen Geometrie, endlich die elegante geometrische Ableitung der Cliffordschen Parallelen), sondern vor allem auch den vielen, welche, mit elementaren mathematischen Vorkenntnissen ausgestattet, Ziele und Methoden der nichteuklidischen Geometrie kennen lernen wollen. — Wir sind überzeugt, daß sie, dank Bonolas möglichst elementar gehaltener Darstellung in dem vorliegenden Werk in verständlicher und flüssiger Form die Antwort auf viele Fragen finden, wo andere nur dem gründlich vorgebildeten Mathematiker zugängliche Quellen versagten. H. Liebmann.

H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. III. Band: Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Rudolf H. Weber (Heidelberg). Mit 358 Figuren im Text. [XIII u. 666 S.] gr. 8. Leipzig 1907. B. G. Teubner.

Der dritte (und letzte) Band der Enzyklopädie der Elementarmathematik ist den Anwendungen gewidmet. Er bringt zunächst eine induktive Darstellung der Statik und Mechanik vom Standpunkte der empirischen Naturwissenschaften aus. Als wichtigstes Produkt rein geometrischer Natur ergeben sich

sodann die verschiedenen Arten des Vektorbegriffs und dessen Geometrie, soweit sie additiv ist. Aus diesem Begriff und den Gesetzen der Vektoraddition werden schließlich die Gesetze der Statik noch einmal deduktiv gewonnen und zur Begründung der graphischen Statik benutzt. Der darstellenden Geometrie, die für die Entwicklung der Raumanschauung von so großer Bedeutung ist, wird besondere Sorgfalt gewidmet werden. Es wird hierin auch die Lehre von den Kegelschnitten und der Krümmung noch einmal selbständig behandelt, und auch die Perspektive findet ihre Stelle. — Es schließt sich ein Abschnitt über Maxima und Minima nach geometrischen und mechanischen Gesichtspunkten an sowie eine kurze Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf die Ausgleichungen der Beobachtungsfehler. Die physikalischen Anwendungen haben vorzugsweise den Zweck, die Grundbegriffe von Energie, Wärme und Elektrizität, wie sie gegenwärtig in der Physik gelten, soweit es mit elementaren Mitteln möglich ist, darzulegen und dabei hauptsächlich die anschaulichen Methoden der Kraftlinien und ähnliches zur Anwendung zu bringen. H. W.

H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. In fünfter Auflage neu bearbeitet von Ludwig Maurer. Mit 36 Figuren im Text. [VIII u. 436 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Wie die Funktionentheorie habe ich auch die Theorie der elliptischen Funktionen von Durège vollständig neu bearbeitet. Es war dies schon aus dem Grunde nicht zu umgehen, weil in Durèges Werk die grundlegenden Arbeiten von Weierstraß keinerlei Berücksichtigung gefunden haben. — Bei der Darstellung der Theorie der elliptischen Funktionen kann man entweder von der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen oder von der Theorie der elliptischen Integrale ausgehen. Der erstere Weg ist der kürzere; ich habe aber trotzdem den letzteren gewählt. Er empfiehlt sich dadurch, daß er dem Gang der historischen Entwicklung folgt, und er bietet außerdem den Vorteil, daß er dem Anfänger das Verständnis für Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen eröffnet. Überdies entspricht meiner Ansicht nach eine diesen Weg einschlagende Darstellung mehr einem praktischen Bedürfnis, denn an Darstellungen der Theorie der doppelt periodischen Funktionen herrscht kein Mangel. — Es erschien mir zweckmäßig, mit einer elementaren Darstellung der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen zu beginnen. Sie zeigt, wie die Integralrechnung mit Notwendigkeit zu denselben führt. Die Schwierigkeiten, auf die man stößt, sobald man komplexe Werte der Variabeln in Betracht zieht, führt dann naturgemäß dazu, von den Methoden der Funktionentheorie Gebrauch zu machen. — Die Theorie der Teilung und Transformation und die Theorie der Modulfunktionen sind so eng mit der ganzen Entwicklung der modernen Mathematik verknüpft, daß ich es für unumgänglich gehalten habe, wenigstens die Grundlagen derselben ausführlich zu behandeln. — Man kann diese Theorien nicht übersichtlich darstellen, ohne von den Grundbegriffen der Gruppentheorie Gebrauch zu machen, man reicht aber — wenigstens für die hier verfolgten Zwecke — mit wenigen Definitionen und Sätzen aus. Ich habe sie in einem kurzen Kapitel zusammengestellt. — Dem Zweck des Buches entsprechend habe ich das Maß der Vorkenntnisse, die ich voraussetze, möglichst beschränkt: außer den Elementen der Differential- und Integralrechnung werden in den ersten fünf Abschnitten nur die einfachsten

Sätze der Funktionentheorie benutzt, in den letzten beiden Abschnitten werden außerdem die Elemente der Zahlentheorie und die einfachsten Sätze aus der Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung als bekannt vorausgesetzt. — Bezüglich der benutzten funktionentheoretischen Sätze habe ich überall auf die von mir herausgegebene Funktionentheorie Durèges verwiesen. — Um den Gebrauch des Buches zu erleichtern, habe ich die wichtigsten Formeln am Schluß zusammengestellt.

München. L. Maurer.

W. Scheibner, Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. [250 S.] gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Die vorliegende Schrift „Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie" ist zumeist aus älteren Vorlesungsaufzeichnungen des Verfassers entstanden und wünscht vornehmlich jüngeren Mathematikern den Zugang zu einer in den letzten Jahrzehnten zu immer größerer Tragweite erwachsenen Disziplin zu erleichtern. Ein gewisses Maß von Ausdauer und rechnerischer Gewandtheit dürfte die Beherrschung des behandelten Stoffes, trotz seines vielfach elementaren Charakters, auf seiten des Studierenden immerhin in Anspruch nehmen. In den einzelnen Abschnitten werden behandelt: 1. Die lineare Transformation ganzer Funktionen. 2. Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen 2. 3. 4. Grades. 3. Die Reduktion elliptischer Differentiale. 4. Die Gleichungen 5. und 6. Grades. Ferner anhangsweise: 5. Die Eigenschaften der Kreisverwandtschaft, insbesondere der reziproken Radien. 6. Die sogenannte Tschirnhaus-Transformation. 7. Die Auflösung der Ikosaedergleichung. 8. Die lineare Transformation der Thetafunktionen und elliptischen Modulfunktionen. Eingehende historische Nachweisungen finden sich zur Orientierung des Lesers beigefügt. Sch.

J. Scheiner, a. o. Professor der Astrophysik an der Universität Berlin. **Populäre Astrophysik,** mit 30 Tafeln und 210 Figuren im Text. [VI u. 718 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das Werk, aus einem vom Verfasser an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungszyklus entstanden, versucht, zum ersten Male in allgemeinverständlicher Weise die Instrumente, Theorien und Ergebnisse des Gesamtgebietes der Astrophysik, die in den letzten Jahrzehnten einen außerordentlichen Aufschwung genommen hat, in ausführlicherer Weise, als dies in den populären Astronomien möglich ist, einem gebildeten Leserkreise vorzuführen. Dieser jüngste Zweig der Astronomie ist aber bereits ein so entwickelter, daß es unmöglich gewesen wäre, in nur einem Bande eine in historischer Beziehung vollständige Darstellung zu geben. Der Verfasser mußte daher aus dem großen Materiale eine Auswahl treffen und somit dem Buche einen subjektiven Charakter geben, der ja für eine allgemeinverständliche Darstellung auch am angemessensten erscheint. Die populäre Astrophysik will den zahlreichen Gebildeten, denen der erweiterte Blick ins Weltall als einer der schönsten und reinsten Genüsse erscheint, als Führer in das Gebiet der physikalischen Erforschung der Himmelskörper dienen. — Zahlreiche Reproduktionen von photographischen Himmelsaufnahmen gewähren

hierbei eine bessere Anschauung von den verschiedenartigen Welten, als die direkte Beobachtung im Fernrohr dem ungeübten Beobachter zu liefern vermag. J. Sch.

Polarisation des gebeugten Lichtes. Von Dr. **I. Fröhlich,** Professor der Physik an der Universität Budapest. Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XXII, S. 65—438, gr. Oktav mit 35 Figuren im Texte, ausführlichem Vorworte, Sach- und Namenregister nebst genauem Inhaltsverzeichnis. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Auch als in Leinen gebundene Sonderausgabe.

Die Frage des Polarisationszustandes gebeugter Lichtstrahlen war schon seit Entdeckung der Polarisation und der Beugungserscheinungen vielfach Gegenstand eingehender experimenteller und theoretischer Untersuchungen. Indessen konnten diese schon aus dem Grunde zu keinem einheitlichen Ergebnisse führen, weil die einzelnen Forscher meist verschiedene Erscheinungen untersuchten und deshalb auch verschiedene Resultate erhielten. Den Verfasser vorliegender Monographie beschäftigte diese Frage mit größeren Unterbrechungen schon seit langer Zeit; davon zeugen auch mehrere Veröffentlichungen in den Annalen der Physik; doch konnte er erst in den letztverflossenen fünf Jahren seine ganze verfügbare Zeit diesen Untersuchungen widmen, deren Frucht nun in diesem Buche niedergelegt ist.

Darin beschränkte er sich hauptsächlich auf eine bestimmte, etwas einfachere Erscheinungsgruppe, welche auch der vollständige Titel des Werkes andeutet: „Experimentelle Erforschung und theoretische Deutung der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Polarisation des von Glasgittern gebeugten Lichtes."

Das mannigfaltige und reichhaltige Material der Arbeit ist nach drei Hauptteilen geordnet.

Der erste, *historische* Teil (S. 65—139) bietet eine übersichtliche Zusammenstellung und kurze Würdigung der bisherigen, hierher gehörigen wichtigeren Untersuchungen auf experimentellem und theoretischem Gebiete, um dem Leser in bezug auf den gegenwärtigen Stand unserer Erkenntnis in dieser Frage eine allgemeine Orientierung zu geben. —

Der zweite, *theoretische* Teil (S. 140—186) enthält die physikalische Theorie derjenigen Kugelwellen, die zur Darstellung der Polarisationsverhältnisse der im dritten, experimentellen Teil mitgeteilten Erfahrungstatsachen geeignet sind, und die in fast jeder Beziehung mehr leisten als alle bisherigen, meist sehr komplizierten Theorien.

Diese Wellen sind nach dem Grundgedanken der Theorie leuchtender Punkte von W. Voigt, und deren von G. Kirchhoff meisterhaft bewerkstelligten Vereinfachung in physikalischer Weise konstruiert; jedoch stellt sie der Verfasser in gleicher Weise nach der elastisch-festen und nach der elektrisch-magnetischen Auffassung dar.

Er bildet und unterscheidet hier besonders drei Haupttypen solcher Wellen, die geeignet sind, ein physikalisches Bild der beobachteten Erscheinungen zu bieten, nämlich die *zirkumaxialen*, die *meridionalen* und die *isogonalen* Kugelwellen, deren Vektoren alle auf einer zur Erregungsstelle konzentrischen, kugelförmigen Wellenfläche liegen.

α) Die ersten stellen eine solche räumliche Anordnung des Wellenvektors dar, bei welcher derselbe längs den um eine Achse koaxialen Parallelkreisen gerichtet ist.

β) Die zweiten zeigen eine solche räumliche Anordnung des Vektors, bei welcher derselbe längs den durch eine gemeinsame Achse gehenden Meridianen gerichtet ist.

γ) Die dritten haben eine solche räumliche Verteilung des Vektors, daß die Vektoren aller Punkte der Wellenfläche, die längs je eines, durch eine bestimmte Gerade gehenden Meridianes liegen, zu diesem Meridian untereinander die gleiche Neigung haben wie der Vektor des in dieser Geraden liegenden Punktes der Wellenfläche.

Diese Kugelwellen-Typen können in physikalischer Weise wie folgt dargestellt werden.

1. *Auf elastisch-fester Grundlage:* Es sei im unendlichen, homogenen, isotropen, inkompressiblen, elastisch-festen Mittel eine starre Kugel gegeben, die infolge äußerer elastischer Erregung, verursacht durch den auffallenden Lichtstrahl, nach bestimmten Gesetzen in gleichförmigen elastischen Oszillationen erhalten wird; an der Grenzfläche der Kugel hafte das umgebende Mittel fest an der Kugel und vollziehe dieselben Bewegungen wie deren Oberfläche. Das Problem des Bewegungszustandes jedes Punktes des Mediums für jeden Zeitpunkt kann nun in folgenden Fällen ganz gelöst werden:

a) Wenn die starre Erregungskugel um eine, durch ihren ruhenden Mittelpunkt gehende, festgerichtete Achse einfach-harmonische, *rotatorische* Oszillationen vollführt.

b) Wenn die starre Erregungskugel längs einer, durch ihren Mittelpunkt gehenden festgerichteten Geraden einfach-harmonische, *translatorische* Oszillationen vollführt.

a) und b) Wenn die Erregungskugel eine aus den unter a) und b) erwähnten zusammengesetzte Oszillation vollzieht; insbesondere:

c) Wenn die Erregungskugel gleichzeitig die unter a) erwähnte rotatorische Oszillation, und längs einer senkrecht zu deren Rotationsachse gerichteten fixen Geraden die unter b) erwähnte translatorische Oszillation vollzieht; hier ist die Lösung gleich der Summe der Lösungen von a) und b); der einfachste und zugleich wichtigste Fall ist der, wenn die Energien der beiden erregenden Oszillationen einander gleich sind.

Ist nun in allen diesen Fällen der Radius der erregenden Kugel klein zur Wellenlänge, und betrachtet man den schon stationär gewordenen Oszillationszustand solcher Punkte des Mittels, welche auf einer zur Erregungsstelle konzentrischen Kugelfläche liegen, deren Radius zur Wellenlänge sehr groß ist, dann wird diese Kugelfläche zur Wellenfläche, in welcher die Oszillationsvektoren liegen, und dann findet man für die obigen Fälle a), b), c) der Reihe nach folgende einfache Systeme von Kugelwellen:

a) Längs den, zur verlängerten Rotationsachse der erregenden Oszillation koaxialen Parallelkreisen vollführen die Punkte der Wellenfläche lineare, einfach-harmonische Oszillationen; die zu diesen gehörigen, mit denselben untrennbar verbundenen torsionalen (rotationalen) einfach-harmonischen Oszillationen sind daher so angeordnet, daß deren Achsen längs den zu diesen Parallelkreisen normalen Meridianen gerichtet sind. Es bilden sonach hier die linearen Oszillationen ein zirkumaxiales, die zugehörigen rotatorischen Oszil-

lationen ein zu ersterem orthogonales meridionales Vektorensystem, deren gemeinsame Symmetrieachse die Rotationsachse der erregenden Drehung ist.

b) Die beiderlei Oszillationen an der Wellenfläche sind hier, in bezug auf *a*) miteinander gegenseitig vertauscht; die gemeinsame Symmetrieachse ist hier die fixe Gerade der erregenden translatorischen Oszillation. Es bilden also hier an der Wellenfläche die linearen Oszillationen ein meridionales, die zugehörigen rotatorischen Oszillationen ein zu ersterem orthogonales zirkumaxiales Vektorensystem.

c) In diesem Falle zeigen die Oszillationen an der Wellenfläche folgende Anordnung: Man ziehe senkrecht zur translatorischen Oszillationsrichtung und senkrecht zur Achse der rotatorischen Oszillation der Erregungskugel eine Gerade, die hier *Normale* genannt werden soll, bis sie die Wellenfläche trifft; durch diesen Durchstoßungspunkt ziehe man an die Wellenfläche, parallel zu den genannten zwei erregenden Vektoren, zwei Tangenten und lege durch jede derselben eine Ebenenschar, welche die Wellenfläche in zwei zueinander orthogonalen Systemen von Kreisen schneiden. Die linaren Oszillationen der Punkte an der Wellenfläche liegen alle längs denjenigen Kreisen, deren gemeinsame Tangente parallel zur erregenden translatorischen Oszillation gerichtet ist; die Achsen der zugehörigen torsionalen (rotatorischen) Oszillationen liegen längs den anderen Kreisen, deren gemeinsame Tangente parallel zur Rotationsachse der erregenden rotatorischen Oszillation gerichtet ist. Legt man nun durch die oben definierte Normale ein System von Meridianen, so schneiden alle Kreise je eines Systemes jeden Meridian unter einem bestimmten Winkel; deshalb bilden hier die linearen Oszillationen und die Achsen der torsionalen Oszillationen an der Wellenfläche zwei zueinander orthogonale, zu diesen Meridianen isogonale Vektorensysteme.

2. *Auf elektro-magnetischer Grundlage:* Es sei im unendlichen, homogenen, isotropen Dielektrikum eine Kugel von selbem Mittel gegeben, die infolge äußerer elektro-magnetischer Erregung, verursacht durch den auffallenden Lichtstrahl, nach bestimmten Gesetzen in gleichförmigem elektrisch-magnetischem Oszillationszustande erhalten wird; das Medium habe an der Grenzfläche der Erregungskugel denselben elektrisch-magnetischen Zustand wie die Kugel selbst. Das Problem des Oszillationszustandes jedes Punktes des Mediums für jeden Zeitpunkt kann in folgenden Fällen ganz gelöst werden:

a) Wenn in der Erregungskugel längs einer bestimmten Richtung eine gleichförmige, einfach-harmonische *elektrische* Oszillation vor sich geht.

b) Wenn in der Erregungskugel längs einer bestimmten Richtung eine gleichförmige, einfach-harmonische *magnetische* Oszillation vor sich geht.

a) und *b*) Wenn in dieser Kugel eine aus den unter *a*) und *b*) erwähnten zusammengesetzte elektrisch-magnetische Oszillation vor sich geht; insbesondere:

c) Wenn in der Erregungskugel gleichzeitig die unter *a*) erwähnte elektrische Oszillation und senkrecht zu dieser die unter *b*) erwähnte magnetische Oszillation vor sich geht; auch hier ist die Lösung gleich der Summe der Lösungen unter *a*) und *b*) und auch hier ist der einfachste und wichtigste Fall der, wenn die Energien der beiden erregenden Oszillationen einander gleich sind.

Ist nun auch in diesen Fällen der Radius der Erregungskugel klein zur Wellenlänge, und untersucht man den stationär gewordenen Oszillationszustand

solcher Punkte des Mediums, die auf einer zum Erregungszentrum konzentrischen Kugelfläche liegen, deren Radius zur Wellenlänge sehr groß ist, dann wird die Kugelfläche zur Wellenfläche, in welcher die Oszillationsvektoren liegen, und dann findet man für die obigen Fälle *a*), *b*), *c*) der Reihe nach folgende einfache Systeme der Kugelwellen:

a) Längs den, durch die erregende elektrische Oszillationsrichtung gehenden Meridianen vollziehen sich elektrische, längs den zugehörigen Parallelkreisen magnetische, einfach-harmonische Oszillationen; es bilden also hier die elektrischen Oszillationen ein meridionales, die zugehörigen magnetischen Oszillationen ein zu ersterem orthogonales, zirkumaxiales Vektorensystem, deren gemeinsame Symmetrieachse die Gerade der erregenden elektrischen Oszillation ist.

b) Die beiderlei Oszillationen in der Wellenfläche sind hier in bezug auf *a*) miteinander gegenseitig vertauscht; die gemeinsame Symmetrieachse ist hier die Richtung der erregenden magnetischen Oszillation; also bilden hier die magnetischen Oszillationen ein meridionales, die zugehörigen elektrischen Oszillationen ein zu ersterem orthogonales, zirkumaxiales Vektorensystem.

c) In diesem Falle bilden die zweierlei Oszillationen zwei isogonale Vektorensysteme, wie unter 1. *c*); die gemeinsame Tangente der Kreise elektrischer Vektoren ist parallel zur erregenden elektrischen Oszillation; ebenso ist die gemeinsame Tangente der Kreise magnetischer Vektoren parallel zur erregenden magnetischen Oszillation.

3. *Darstellung mittels Elektronen*, deren sekundäre, erregende Schwingungen durch den auffallenden Lichtstrahl verursacht werden.

a) Ein stationär, einfach-harmonisch *translatorisch* schwingendes Elektron erzeugt in größerer Entfernung vom Erregungsorte ein meridionales elektrisches und ein dazugehöriges zirkumaxiales, magnetisches, einfach-harmonisch oszillierendes Kräftesystem, wie oben unter 2. *a*).

b) Ein stationär, einfach-harmonisch *rotatorisch* schwingendes Elektron erzeugt in größerer Entfernung vom Erregungsorte ein zirkumaxiales elektrisches und ein dazu gehöriges meridionales, magnetisches, einfach-harmonisch oszillierendes Kräftesystem, wie oben unter 2. *b*).

c) Ein gleichzeitig stationär translatorisch und rotatorisch, einfach-harmonisch schwingendes Elektron, dessen Translationsrichtung senkrecht ist zu seiner Rotationsachse, erzeugt in größerer Entfernung vom Erregungsorte ein isogonales elektrisches und ein dazu orthogonales, isogonales magnetisches, einfach-harmonisch oszillierendes Kräftesystem; die an der Wellenfläche liegenden gemeinsamen Tangenten der beiden Kreissysteme sind parallel der erregenden translatorischen Oszillation und parallel der Rotationsachse der erregenden rotatorischen Oszillation und gehen durch den Punkt der Wellenfläche, in welchem die zur erregenden Translation und zur erregenden Rotationsachse senkrechte Gerade, die Normale, diese Fläche durchstößt, wie oben unter 2. *c*).

4. Die unter *a*), *b*), *c*) der Punkte 1., 2., 3. behandelten drei Typen von Kugelwellen haben auch noch eine andere, sehr bemerkenswerte Eigenschaft, die eine wichtige physikalische Interpretierung gestattet. Die partiellen Differentialgleichungen, die für die in homogenen, isotropen Medien sich vollziehenden Oszillationen gelten, können durch verschiedene Typen von Lösungen befriedigt werden. Es zeigt sich nun, daß in größerer Entfernung vom Erregungszentrum die betrachteten Kugelwellen sich stets genau bilden, wenn nur die

Art der *Erregung* mit den unter *a*), *b*), *c*) der Punkte 1., 2., 3. erwähnten Arten übereinstimmt, und zwar bei beliebiger Form des Erregungskörperchens und bei beliebigen Grenzbedingungen an dessen Oberfläche. Es ist also zur Entstehung dieser Kugelwellen nur der, durch die Art der Erregung im sekundären Zentrum bedingte Typus der Lösung maßgebend, während Form und Oberflächenbedingungen der erregenden sehr kleinen Partikelchen den resultierenden Wellentypus nicht beeinflussen können. —

Der dritte, *experimentelle* Teil (S. 187—438) ist der weitaus größte und wichtigste. In demselben führte der Verfasser die im ausführlichen Titel des Buches angedeutete Untersuchung vorerst ausschließlich auf erfahrungsmäßigem Wege zu Ende, und zwar unbeirrt und unbeeinflußt von jeglicher, auf Hypothesen beruhenden Theorie und frei von jeglicher, von solchen Auffassungen herrührender, oft ganz unwillkürlicher und unbewußter Befangenheit. Es war also durchaus nicht seine Absicht, nur solche Versuche anzustellen, welche zur Entscheidung über eine oder die andere Folgerung aus irgendeiner Hypothese geeignet wären, sondern der Verfasser suchte mittels systematischer Untersuchungen umfassender Natur die charakteristischen Haupteigenschaften der genannten Erscheinungen festzustellen. Dies führte nun zur Auffindung einer ganzen Reihe von bisher meist noch garnicht, oder nur ganz unvollständig bekannten Gesetzmäßigkeiten der Polarisation des gebeugten Lichtes.

Diese bemerkenswerten, erfahrungsmäßigen Ergebnisse konnte der Verfasser nur mittels seiner allgemeineren Beobachtungsmethoden erzielen, welche es ihm ermöglichten, die in jeder beliebigen räumlichen Richtung gebeugten Lichtstrahlen zu untersuchen, die störenden Nebenerscheinungen zu beseitigen oder zu umgehen und schließlich zu konstatieren, daß innerhalb der möglich weitesten Grenzen des Gitterintervalles, dessen Weite, bei Glasgittern in den meisten Fällen auf die Anordnung der Polarisationsverhältnisse der gebeugten Strahlen von fast unmerklichen Einfluß ist.

Von den im Titel genannten Erscheinungen werden diejenigen, die sich auf das aus Luft an Glas in Luft räumlich reflektiert-gebeugte Strahlensystem beziehen, quantitativ sehr ausführlich untersucht, und zwar sowohl bei unpolarisiertem, wie bei polarisiertem einfallendem Lichte; ersteres bei verschiedenem Einfallswinkel, letzteres sowohl bei verschiedenem Einfallswinkel, wie bei verschiedenen Einfallsazimuten.

Die streng geordneten Resultate dieses beträchtlichen Materiales, welches aus mehr denn fünfundzwanzigtausend Beobachtungen, Einstellungen und Ablesungen gewonnen wurde, sind in zahlreichen, ausführlichen Zahlentabellen enthalten, während fast ebensoviele andere Tabellen zur Vergleichung der Beobachtungsdaten mit den strengen Gesetzmäßigkeiten dienen. Hierzu kommen noch fünfzehn Projektionsbilder, welche die räumliche Anordnung der Polarisationsebenen und Polarisationsrichtungen der gebeugten Strahlensysteme in übersichtlicher Weise darstellen; dabei gelangen die oben betrachteten drei Typen von Kugelwellen in ausgiebiger Weise zur Anwendung.

Es mögen hier nur einige der einfachsten allgemeinen Resultate erwähnt werden, die auch mit den einfachsten Hilfsmitteln sofort erhärtet werden können:

α) Fällt *unpolarisiertes* Licht unter dem Polarisationswinkel der Gittersubstanz auf das Glasgitter, dann sind alle reflektiert-gebeugten Strahlen, welche mit der Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Strahles einen ebenso großen, nämlich mit dem Polarisationswinkel gleich großen Winkel bilden, linearpola-

risiert, und zwar stets in der jeweiligen, den einfallenden und den gebeugten Strahl enthaltenden Ebene; diese Strahlen liegen also auf einer geraden Kegelfläche, deren geometrische Achse die Richtung des einfallenden Strahles ist; diese Regel nennt der Verfasser das *Gesetz des Polarisationskegels.*

β) Fällt hingegen *linearpolarisiertes* Licht unter dem Polarisationswinkel der Gittersubstanz auf das Glasgitter, dann können alle reflektiert-gebeugten Strahlen, welche mit der Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Strahles einen ebenso großen, nämlich mit dem Polarisationswinkel gleich großen Winkel bilden, durch Drehen des Polarisators ausgelöscht werden, haben also bei geeigneter Lage der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes die Intensität Null; diese Strahlen liegen also auf derselben Kegelfläche, wie die unter α), doch hat die Fläche hier eine andere physikalische Bedeutung; diese Regel nennt der Verfasser das *Gesetz des Extinktionskegels.*

Die beiden Erfahrungssätze α) und β) enthalten das gewöhnliche *Malus-Brewster*sche Gesetz und dessen Umkehrung als *ganz spezielle Fälle*; sie sind aber durchaus nicht als Verallgemeinerung dieses Gesetzes und seiner Umkehrung zu betrachten.

γ) Ist der Einfallswinkel wieder der Polarisationswinkel der Glassubstanz des Gitters und das Einfallsazimut 90^0, dann zeigen die Polarisationsebenen des räumlich reflektiert-gebeugten Strahlensystems eine um den regelmäßig reflektierten, jetzt ausgelöschten Strahl als Symmetrieachse, sehr schön ersichtliche, vollständig zirkumaxiale Anordnung; dies ist nach dem Verfasser das *Gesetz der zirkumpolaren Polarisation.*

Bleibt in diesem Falle das Einfallsazimut dasselbe, ändert sich jedoch der Einfallswinkel von 90^0 bis etwa 40^0, dann tritt noch immer eine ähnliche Anordnung auf, die hier als das allgemeinere *Gesetz der zirkumaxialen Polarisation* bezeichnet wird; dieses Gesetz gilt selbst dann noch, wenn innerhalb der erwähnten Grenzen des Einfallswinkels das Einfallsazimut um mäßige Winkelwerte von 90^0 abweicht.

δ) Ist das Einfallsazimut 0^0 und der Einfallswinkel beliebig, dann zeigen die Polarisationsebenen des räumlich reflektiert-gebeugten Strahlensystems stets dieselbe Anordnung in bezug auf die Gitternormale und auf die Polarisationsebene des einfallenden Strahles: Legt man nämlich durch diese Normale eine beliebige Ebene, so haben hier die Polarisationsebenen aller in dieser Ebene gebeugten Strahlen zu dieser Ebene dieselbe Neigung. Dies deutet auf eine *isogonale* Verteilung dieser Polarisationsebenen im Raume; der Verfasser nennt sie hier das *Gesetz der stereographisch-parallelen Polarisation*, weil in der stereographischen Projektion die Polarisationsrichtungen aller gebeugten Strahlen parallel sind zur Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes.

In dem besonderen Falle der *normalen Inzidenz* gilt dies Gesetz ebenfalls, doch wird es einfacher, weil die Gitternormale mit dem regelmäßig reflektierten Strahl zusammenfällt: Die Polarisationsebenen aller Strahlen, die in irgendeiner und derselben, diese Normale enthaltenden, Ebene gebeugt sind, haben hier zu dieser Ebene dieselbe Neigung, wie die Polarisationsebene des regelmäßig, normal reflektierten Strahles zu dieser Ebene; es ist dies das bemerkenswerte *Gesetz der reinen isogonalen Polarisation.*

In bezug auf die hierher gehörigen weiteren, zahlreichen Einzelheiten, insbesondere auf die bei stetiger Änderung des Einfallswinkels und des Einfallsazimutes eintretenden stufenweisen Übergänge der Polarisationsanordnungen

möge auf das Werk selbst verwiesen werden, welches deren ausführliche tabellenmäßige und graphische Darstellung enthält. —

In einem folgenden Abschnitt dieses dritten Teiles sind die Polarisationsverhältnisse der aus Glas an Luft in Glas reflektiert-gebeugten Strahlensysteme, ferner der aus Glas in Luft und der aus Luft in Glas gebrochen-gebeugten Lichtstrahlen mittels zahlreicher, innerhalb der weitesten Grenzen variierter qualitativer Beobachtungen untersucht. Bei der ersten Erscheinungsgruppe wurde ebenfalls das Gesetz der vollständigen zirkumpolaren Polarisation, ferner das Gesetz des Polarisationskegels und das des Extinktionskegels festgestellt. Durch diese Untersuchungen konnte man wenigstens im allgemeinen darüber Aufschluß erlangen, in welcher Weise eine genauere, quantitative Erforschung der jetzt genannten Erscheinungen einzurichten sei, und welche Hauptergebnisse man von einer solchen, die gewiß ebenso viele Jahre angestrengter Arbeit kosten wird, wie die oben mitgeteilte, zu erwarten hat.

Der letzte Abschnitt enthält umfassende, jedoch nur qualitative Untersuchungen solcher räumlich-gebeugten Strahlensysteme, welche entstehen, wenn die Beugung ohne erheblichen optischen Wechsel des Mittels oder im selben Mittel selbst stattfindet. Im ersteren Fall erstreken sich die Beobachtungen sowohl auf gebrochen-gebeugte, wie auf reflektiert-gebeugte Strahlensysteme; es wird hier bei normaler Inzidenz polarisierten Lichtes wieder das einfache Gesetz der räumlich vollständigen zirkumaxialen Polarisation festgestellt. Zu den im selben Mittel entstehenden Beugungen gehören auch die H. Siedentopfschen Beugungsscheibchen, aus deren qualitativer Untersuchung der Verfasser mit der größten Leichtigkeit dasselbe einfache Gesetz feststellt.

Hieran schließt sich als willkommene Ergänzung die quantitative Erforschung der Polarisationsverhältnisse derjenigen Lichtbeugung (oder Lichtzerstreuung), welche entsteht, wenn ein intensiver Lichtstrahl auf die leuchtende Hülle heller Flammen oder auf deren Rauch fällt; die durch die darin schwebenden kleinen Teilchen als sekundäre Erregungszentra hervorgerufene Anordnung stimmt völlig mit dem Gesetz der räumlich vollständigen zirkumaxialen Polarisation überein; dasselbe gilt auch dann, wenn im Mittelpunkte einer homogenen, isotropen, flüssigen oder festen Kugel, durch von außen hingeleitete Lichtstrahlen sekundäre Erregungszentra hergestellt werden; so daß dasselbe als eines der einfachsten und schönsten allgemeinen Naturgesetze zu betrachten ist.

Noch möge hier eines der interessantesten Ergebnisse dieser Untersuchungen erwähnt werden nämlich das, welches sich auf die vielumstrittene Frage nach der Richtung des linear-polarisierten Lichtvektors zu seiner Polarisationsebene bezieht; es fand sich hier nämlich eine ganze Reihe von Erscheinungsgruppen, welche eine solche Anordnung der Polarisationsebenen der räumlich-gebeugten Strahlensysteme zeigen, daß bei jeder einzelnen dieser Gruppen, folgender zwingender Schluß sich aufdrängt: Unabhängig von jeglicher Hypothese über die Natur des Lichtes, *muß der sekundär erregende Vektor des linear-polarisierten Strahles senkrecht zu seiner Polarisationsebene sein.* —

Schließlich erörtert der Verfasser die zahlreichen Anschauungsbehelfe, Zeichnungen und Modelle, welche er zur Versinnlichung der im Buche mitgeteilten Untersuchungsresultate benützte, als er dieselben in den letzten Jahren in den Sitzungen der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Ungarischen Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft bekannt machte. —

Es bietet demnach diese Monographie eine große Fülle neuer Erfahrungs-

tatsachen, die unsere Erkenntnis der Eigenschaften der aus sekundären Erregungszentren sich ausbreitenden Lichtstrahlen, insbesonders deren Polarisationsverhältnisse sehr wesentlich erweitern und die wohl geeignet sind, als Ausgangspunkt fernerer Forschungen zu dienen.

G. Kowalewski, a. o. Prof. der Mathematik an der Universität Bonn. **Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht.** Band 197 der Sammlung: Aus Natur und Geisteswelt. Mit 18 Figuren im Text. [IV u. 126 S.] 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das vorliegende Büchlein bietet die Grundbegriffe und Hauptsätze der Infinitesimalrechnung in einer Form, die ungefähr den modernen Anschauungen entspricht. Es ist überall der Versuch gemacht, so streng wie möglich zu sein, ohne doch durch zu tiefes Eingehen auf alle Schwierigkeiten den Leser abzuschrecken. Eine völlig strenge Begründung der Infinitesimalrechnung ist nur nach klarer Festlegung des Zahlbegriffs möglich. Eine solche hätte aber in den Rahmen dieser Schrift nicht hineingepaßt. Deshalb wurde davon abgesehen. — Der Verfasser hofft, daß jeder Gebildete aus diesem kleinen Buch einen Begriff von dem Wesen der Infinitesimalrechnung gewinnen kann, und daß insbesondere auch der mathematische Student Nutzen daraus ziehen wird.

Bonn. G. Kowalewski.

L. Pfaundler, Professor der Physik an der Universität Graz, **das chinesisch-japanische Go-Spiel.** Eine systematische Darstellung und Anleitung zum Spielen desselben. Mit einem Deckelbildchen und zahlreichen erklärenden Abbildungen im Texte. [VI u. 75 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Der Verfasser rechtfertigt in einem Vorworte, bezugnehmend auf ein von Leibniz stammendes Motto sein Unternehmen, gibt dann in der Einleitung mit Benutzung des Werkes von Dr. Korschelt einen Abriß der Geschichte des Go-Spieles als des ältesten aller Brettspiele und vergleicht es mit dem Schach, dem es an Geist ebenbürtig erscheint. Er entwickelt dann die einfachen Spielregeln an der Hand zahlreicher Figuren und Beispiele und bringt als Muster japanische Originalpartien und Probleme mit ihren Lösungen bei. In der 2. Abteilung sucht er auf Grund eigner Studien durch präziserere Fassung der maßgebenden Begriffe tiefer in die Kombinationen des Spieles einzudringen und den Anfänger durch eine gründliche Darstellung der sicheren und der verlorenen Stellungen, der Ausnutzung der Go-Stellung, der Spielfallen und der wichtigsten Vorsichtsregeln in der Durchführung des Spieles zu unterrichten.

2. Bücherschau.

Abert, G., Die platonische Zahl als Präzessionszahl (3600 · 2592) und ihre Konstruktion. 81 S. m. Fig. u. 1 Fig. — Taf. Wien 1907. ℳ 1.—.

Bohlin, K., Sur la réduction élémentaire du problème des trois corps. 1 Kr. 25 öre.

Bourlet, C. et P. Baudoin, Cours abrégé de géométrie, publié avec de nombreux exercices théoriques et pratiques et des applications au dessin géométrique. II. Géométrie dans l'espace. VIII, 239 p. avec fig. Paris 1907. Fr. 1.50.

Buchholz, H., Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet und die Theorie der Figur der Erde. Zur Einführung in die höhere Geodäsie (angew. Mathematik). 1. Teil. XVI, 470 S. m. 137 Fig. Leipzig 1908. ℳ 15.—.

Czuber, E., Die Kollektivmaßlehre. Wien 1908. ℳ 2.25.

Daniëls, Fr., Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives. XIII, 280 S. Fribourg 1907. ℳ 6.40.

Dantscher, V. v., Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. VI, 80 S. Leipzig 1908. ℳ 3.40.

Falk, M., Über die Haupteigenschaften derjenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche Additionstheoreme besitzen. Upsala 1907. ℳ 5.—.

Geigenmüller, R., Leitfaden und Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Für technische Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet. 6. Auflage. II. Band. Die höhere Analysis oder Differential- und Integralrechnung. VIII, 339 S. mit 91 Fig. Mittweida 1908. ℳ 7.—.

Gurski, V., Über den Zusammenhang zwischen den partikulären Lösungen der einzelnen Gebiete bei der hypergeometrischen Differentialgleichung 3. Ordnung mit 2 endlichen singulären Punkten. 60 S. m. Fig. Berlin 1907. ℳ 2.—.

Heger, R., Analytische Geometrie auf der Kugel. VII, 152 S. Leipzig 1908. ℳ 4.40.

Kiepert, L., Grundriß der Differential- und Integralrechnung. II. Teil. Integralrechnung. 9. verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. XXIII, 738 S. m. 153 Fig. Hannover 1908. ℳ 12.50.

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der analytischen und höheren Geometrie. Zum Selbstunterricht und mit Rüksicht auf das Notwendigste und Wichtigste bearbeitet. 15. Auflage, neu bearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. IV, 228 S. m. 105 Fig. Leipzig 1908. ℳ 4.50.

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der ebenen und spärischen Trigonometrie. Neu bearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. Leipzig 1908. ℳ 2.90.

Neuberg, J., Cours d'algèbre supérieure. Nouvelle édition. Liège 1907. Fr. 6.—.

Tapla, Th., Grundzüge der niederen Geodaesie. II. Instrumentenkunde. VIII, 279 S. m. 25 lith. Tafeln. Wien 1908. ℳ 9.—.

Verneri, J., de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex, cum proemio Geo. Joach. Rhetici. 1. De triangulis sphaericis. Herausgegeben von A. A. Björnbo. Mit 211 Fig. im Text. Leipzig 1907. ℳ 8.—.

Weinstein, B., Thermodynamik und Kinetik der Körper. III. Band. 2. Halbband. Thermodynamik der Elektrizität und des Magnetismus. Elektrochemie. Braunschweig 1908. ℳ 24 —.

Wiessner, V., Die mechanische Energie, das Prinzip der Mechanik. VII, 253 S. Dresden 1908. ℳ 4.—.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 8. Band. 2. Heft.

Tittel, Das Weltbild bei Heron. Zeuthen, Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analysis. Eneström, Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift. Bosmans, Sur le „libro de algebra" de Pedro Nuñes. Stuyvaert, Sur l'auteur de l'Histoire de la roulette publiée par Blaise Pascal. Häbler, Eneström, Suter, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik." Anfragen. Rezensionen.

Mathematische Annalen. 65. Band. 1. Heft.

Hertz, Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einflusse einer stets gleich gerichteten Kraft. Herglotz, Über die Integralgleichungen der Elektronentheorie. Zermelo, Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Loewy, Die Rationalitätsgruppe einer linearen homogen Differentialgleichung.

Mathematische Annalen. 65. Band. 2. Heft.

Hölder, Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Curtiss, The vanishing of the wronskian and the problem of linear dependence. Meyer, Über eine Konfiguration von geraden Linien im Raume. Timpe, Über die Umkehrbarkeit der Differentiationsordnung.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 55. Band. 3. Heft.

Willers, Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Grünwald, Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers. Nußbaum, Das Ausknicken von Trägern. Bücherschau.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 55. Band. 4. Heft.

Scheufele, Die Aufgabe der sechs Punkte in der Photogrammetrie. v. Gleich, Beitrag zur Theorie der sogenannten konischen Pendelung der Geschosse. Schur, Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschroten. Timpe, Bemerkungen zu den Sommerfeldschen Ausführungen „Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen" (Zusatz). Wölffing, Abhandlungsregister 1905—1906. Bücherschau.

L'Enseignement Mathématique. IX[e] Année. Nr. 6.

Aubry, Étude élémentaire sur le théorème de Fermat. Majcen, Sur les projections de droites perpendiculaires. Richard, Sur la nature des axiomes de la géométrie. Claparède, Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens: les résultats, questions 22 et 23. Mélanges. Chronique.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième série. Tome VII. Octobre, Novembre 1907.

Fontené, Sur les formules de Salmon analogues aux formules de Plücker. Haag, Sur un réseau particulier de courbes coordonnées. Godeaux, Sur une surface du neuvième ordre. Vacquant, Solution de la question de mathématiques spéciales. Hilleret, Étude sur le calcul de π par des formules dérivées de la théorie des périmètres et des rayons. Bricard, Sur le problème d'Apollonius et sur quelques propriétés des cycles. Bibliographie. Solutions. Questions.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4[me] Série. Tome VII. Décembre 1907.

Cotton, A propos des équations de M. Appell. Michel, Sur un théorème de M. Picard. Charrasse, Sur un théorème relatif à la déformation des surfaces gauches. Dumas, Sur le problème de scrutin.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième série. Tome VIII, Janvier 1908.

Petrovitch, Procédé élémentaire d'application des intégrales définies réelles aux équations algébriques et transcendantes. Fontené, Sur les quadrangles de Desboves. Fontené, Note sur un article précédent. Bricard, Sur une propriété des quadriques homofocales. Questions. Solutions.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 1[re] Année. No. 10.

Montel, Thybaut, Sur l'équilibre du corps solide. Marotte, Les „Nouveaux Éléments de Géométrie" de M. Ch. Méray. Lemaire, Une démonstration simple du théorème de Stewart. Morin, Une leçon sur la photographie. Mamy, Exercices pratiques sur les lois de Joule. Documents officiels.

---

4. Kataloge.

Buchhandlung Gustav Fock, Leizig, Schloßgasse 7/9. Antiquariatskatalog Nr. 325. Mathematik, Physik, Astronomie.

K. F. Koehlers Antiquarium, Leipzig, Kurprinzstr. 6. Antiquariatskatalog Nr. 572, Mathematik. Nr. 573, Astronomische, mathematische und physikalische Zeitschriften.

Dr. H. Lüneburgs Sortiment und Antiquariat, München, Karlstr. 4. Antiquariatskatalog 82. Naturwissenschaften (Mathematik).

B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3. Mitteilungen aus dem Verlage. 40. Jahrgang. Nr. 21. 1907.

Hermann Ulrich, Steglitz, Schützenstr. 46. Bücherverzeichnis Nr. 103. März 1908. Mathematik, Astronomie usw.

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

Roberto Bonola, Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe besorgt von Prof. Dr. Heinrich Liebmann. Mit 76 Figuren im Text. [Wissenschaft und Hypothese, Bd IV.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 5.—.

V. von Dantscher, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Deutsches Museum. Führer durch die Sammlungen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.—.

H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. In fünfter Auflage neu bearbeitet von Ludwig Maurer. Mit 36 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 11.—.

F. Hočevar, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. Mit 184 Figuren. 8. Auflage. Wien 1907, F. Tempsky. K 1.30.

O. Janzen, Über einige stetige Kurven, über Bogenlänge, linearen Inhalt und Flächeninhalt. Dissertation. Königsberg i. Pr. 1907.

L. Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung. II. Teil: Integralrechnung. Neunte verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. Mit 153 Figuren im Texte. Hannover 1908, Helwingsche Verlagshandlung.

R. Kischke, Über Fehlerabschätzung bei unendlichen Produkten und deren Anwendungen. Dissertation. Königsberg i. Pr. 1908.

H. Knoche, Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichtes für Lehrerbildungsanstalten und Volksschullehrer. Ein neuer Versuch zur Lösung der Frage: „Wie wirkt der Rechenunterricht sittliche Bildung?" Arnsberg 1908, J. Stahl. ℳ 2.50.

G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Mit 18 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

O. Manville, Les découvertes modernes en physique. Leur théorie et leur rôle dans l'hypothèse de la constitution électrique de la matière. Paris 1908, A. Hermann. Fr. 5.—.

Mocnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Klassen der Gymnasien. 30. Auflage. Wien 1907, F. Tempsky.

Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien. Erste Abteilung. Für die I. und II. Klasse. 39. Auflage. Wien 1907, F. Tempsky. K 2.30.

Reinhold Müller, Die geometrische Reliefperspektive in ihrer Anwendung auf die Werke der bildenden Kunst. Rede zur Feier der Wiederkehr des Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Großherzogs Ernst Ludwig von Hessen und bei Rhein am 25. November 1907 in der Aula der Großherzoglichen Technischen Hochschule zu Darmstadt gehalten. Darmstadt 1908, Herbertsche Hofbuchdruckerei.

Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Herausgegeben von der Direktion des mathematisch-physikalischen Seminars. Neue Auflage Herbst 1907. In Kommission bei B. G. Teubner, Leipzig 1907. ℳ 1.—.

H. Wiener, Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle. In zwanglosen Heften. I. Band. I. Heft. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

P. Worms de Romilly, Sur les premiers principes des sciences mathématiques. Paris 1908, A. Hermann. Fr. 2.50.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. März 1908.

Neu eingetreten als Mitglieder:

Herr Professor Dr. R. C. Archibald an der Acadia-Universität in Wolfville (Neu Schottland).

Herr Dr. W. Büchel, Oberlehrer an der Realschule in Hamburg-Eppendorf, Moltkestr. 49.

Herr Professor Fr. Büttner, Danzig, Schleußengasse 11.

Herr R. D. Carmichael in Anniston, Ala. (U. S. A.), Ala. Pres. College.

Herr Dr. U. S. Hanna, Professor an der Indiana-Universität, Bloomington, Ind. (U. S. A.).

Herr George Rémoundos in Athen, rue Soultani 17.

Herr Dr. C. Davisson Schuyler, Professor an der Indiana-Universität, Bloomington, Ind. (U. S. A.).

Herr Dr. Carl Wägler, Oberlehrer am Realgymnasium in Gera, Blücherstraße 41.

Ausgetreten:

Herberich, G. Dr., Rektor der städt höh. Mädchenschule, Nürnberg, Am Maxfeld 11.

Gestorben:

Am 8. März starb zu München der ord. Professor an der Technischen Hochschule Dr. A. v. Braunmühl.

Adressenänderungen:

Bouton, Ch. L., Dr. Professor an der Harvard-Universität, Cambridge Mass. (U. S. A.), Avon Street 5.

Diestel, F., Dr., Oberbibliothekar an der Technischen Hochschule, Hannover.

Dyck, W. v., Dr., *G. H. R.*, Professor an der Technischen Hochschule, München, Hildegardstr. 5.

Stäckel, P., Dr., *G. H. R.*, Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Stefanienstr. 7.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 25. März 1908.* Lampe, Bemerkungen zu einigen Übungsaufgaben. Lindner, Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur. Mathematische Sektion. *Sitzung Dienstag, den 17. März 1908*: O. Toeplitz, Neuere italienische Forschungen über synthetische Geometrie.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *Zwölfte Sitzung am 4. Februar:* F. Klein gibt den Literaturbericht. — D. Hilbert legt eine Arbeit von E. Hilb (math. Ann. 65) vor und teilt sodann ein einfaches Beispiel einer stetigen nicht differentiierbaren Funktion mit. Alsdann beweist er im Zusammenhang mit der Theorie der Verbiegung einer Fläche folgenden Satz: Ein System von n Differentialgleichungen mit n unbekannten Funktionen, das als gewöhnliches Gleichungssystem aller Argumente aufgefaßt keinen Widerspruch enthält, besitzt stets wenigstens ein Lösungssystem, es sei denn, daß es sich durch Transformation der Unbekannten in ein (überbestimmtes) Gleichungssystem für weniger als n Unbekannte verwandeln läßt. — *Dreizehnte Sitzung am 11. Februar*: Nach dem Literaturbericht von F. Klein trägt F. Bernstein über die Beziehungen zwischen altägyptischer und altgriechischer Mathematik vor. Er geht besonders auf den pythagoräischen Satz und die regulären Polyeder ein; er schildert den Streit um die Echtheit der pythagoräischen Überlieferung sowie die weitere Entwicklung bis Aristoteles hin, wobei er besonders auch auf die möglicherweise nicht nur symbolisch aufzufassende Zuordnung der Aggregatzustände zu den regulären Körpern eingeht. — *Vierzehnte Sitzung am 18. Februar:* F. Klein weist auf eine in Deutschland bisher anscheinend unbemerkt gebliebene Behandlung einer allgemeinen Kreiselbewegung durch Schiff in Moskau (1903) hin; es wird bei willkürlichen Parametern eine Bewegung mit 5 Integrationskonstanten auf Quadraturen zurückgeführt (vgl. eine Darstellung von P. Stäckel in den math. Ann.). — O. Toeplitz berichtet über neuere Untersuchungen der italienischen Geometer; er bespricht die Beweise für die Zusammensetzung der allgemeinen Cremonatransformation aus quadratischen sowie die Untersuchungen über die Geschlechtszahlen algebraischer Flächen. — *Fünfzehnte Sitzung am 25. Februar*: P. Koebe teilt einen Beweis des von F. Klein in Bd. 19. der math. Ann. aufgestellten Fundamentaltheorems der automorphen Funktionen mit und geht besonders auf das hierin als Spezialfall enthaltene Schottkysche Problem ein, einen p-fach zusammenhängenden von p Linien begrenzten Bereich auf ein von p Vollkreisen begrenztes Gebiet abzubilden (vgl. die Note in den Gött. Nachr. 1908). — *Sechszehnte Sitzung am 3. März:* F. Klein gibt den Literaturbericht. — O. Blumenthal berichtet über seine Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen, insbesondere über die Beziehung der „Exponenten" der Dichtigkeit der Stellen, wo die Funktion 1 oder 2 gegebene Werte annimmt, zu ihrer „Ordnung". — C. Runge trägt über die Entwicklung der Flugversuche vor, die er von Lilienthal beginnend über Chanute, die Gebr. Wright, Langley, Maxim bis hin zu den Erfolgen Farmans verfolgt; er leitet dann mit Hilfe der Dimensionsbetrachtungen H. v. Helmholtz' aus den Beobachtungen an einem kleinen Modell, das aus einem mit einer Nadel beschwerten Papierstreifen bestand, Daten zum Vergleich mit der Farmanschen Maschine her.

Mathematisches Kränzchen zu Karlsruhe i. B. Im Wintersemester 1907/08 fanden acht Sitzungen statt. Vorträge hielten: A. Krazer, Die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems bei Rosenhain und Göpel; G. Faber, Über Integralgleichungen; W. Vogt, Jacob Steiners Behandlung des Isoperi-

meterproblems; F. Schur, Über die Proportionslehre; M. Winkelmann, Das astatische Gleichgewicht in der Ebene (mit Demonstration); K. Heun, Reaktionsfreie Impulsion am Kurbelmechanismus; J. Grand, Eine Integration der Differentialgleichung für periodische endliche Schwingungen; E. Öttinger, Über die Theorien der Elektrodynamik von Hertz und Lorentz.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Académie Royale de Belgique. Preisaufgaben für 1908.

1. On demande une contribution importante à l'étude de l'équation différentielle

$$Xdx + Ydy = 0, \tag{1}$$

où X et Y désignent des fonctions données du second degré des variables x et y.

Historique de la question. Formes canoniques de l'équation (1). Intégration sous forme finie ou infinie. Étude des courbes qui correspondent à l'équation (1) lorsque x et y désignent des coordonnées cartésiennes. Étude des transformations géométriqnes définies par cette équation lorsque x et y sont des variables complexes. (Prix 800 Fr.)

2. Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850. (Prix 600 Fr.)

Bewerbungsschriften sind in französischer oder flämischer Sprache mit verschlossener Namenangabe des Verfassers vor dem 1. August 1908 an den Sécrétaire perpétuel, Palais des Académies, Bruxelles (Belgien), zu richten.

Académie Royale de Belgique. Preis für Geometrie. Die belgische Akademie hat den Preis für Geometrie für das Jahr 1907 (700) Fr.) Professor E. Bordiga in Padua zuerkannt. Einen Preis von 600 Fr. hat sie U. Perazzo in Turin zugesprochen.

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Sommersemester 1908 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften.

München (Technische Hochschule). v. Dyck, Höhere Mathematik IV mit Übungen; ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie (mit Übungen). Finsterwalder, Grundzüge der höheren Mathematik mit Übungen (Fortsetzung); Photogrammetrie mit Übungen. v. Dyck, Finsterwalder und Kutta, Mathematisches Seminar (Kolloquium). Burmester, Darstellende Geometrie II mit Übungen. Schmidt, Vermessungskunde II mit Praktikum; Katastertechnik mit Praktikum. Hauptvermessungsübungen; Kartierungsübungen. Föppl, Technische Mechanik einschl. der Elemente der graphischen Statik und der analytischen Mechanik I (Einführung in die Mechanik) und IV (Dynamik); Übungen auf dem Gebiete der technischen Mechanik (Dynamik). Kutta, Algebra (Gleichungstheorie) mit Übungen; Algebraische Analysis mit Übungen; Übungen in der Trigonometrie; Ausgleichungsrechnung. N. N., Höhere Mathematik II mit Übungen.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. Baillaud (nicht Bigourdan, wie es irrtümlich auf S. *10* dieses Jahresberichts heißt) wurde zum Direktor der Sternwarte in Paris ernannt.

Professor Baillaud, Direktor der Sternwarte zu Paris, wurde zum Mitgliede der Pariser Akademie der Wissenschaften gewählt.

Dr. Burgatti, Privatdozent an der Universität in Rom, wurde zum ao. Professor der rationellen Mechanik an der Universität zu Messina ernannt.

Geheimer Hofrat M. Cantor, Honorarprofessor an der Universität Heidelberg, wurde zum ordentlichen Honorarprofessor daselbst ernannt.

Sir David Gill erhielt für seine Beiträge zur Astronomie der südlichen Hemisphäre die goldene Medaille der Royal Astronomical Society.

Professor Dr. K. Hensel an der Universität Marburg wurde zum Mitgliede der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Akademie in Halle gewählt.

Dr. W. Kauffmann, ao. Professor der Physik an der Universität Bonn, wurde zum o. Professor der Physik an der Universität Königsberg ernannt.

Professor Dr. Lenard in Heidelberg wurde zum Ehrenmitgliede der Royal Institution of Great Britain ernannt.

Dr. R. Rothe, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, wurde zum etatsmäßigen Professor der Mathematik an der Bergakademie zu Clausthal ernannt.

Professor Dr. V. Volterra in Rom wurde zum Mitgliede der Akademie der Wissenschaften in Stockholm ernannt.

Professor Dr. J. Weingarten, Honorarprofessor an der Universität Freiburg i. Br., wurde zum ordentlichen Honorarprofessor daselbst ernannt.

Gestorben:

Professor Dr. A. von Braunmühl an der Technischen Hochschule zu München ist am 9. März d. J. im Alter von 54 Jahren gestorben.

Professor Dr. H. Laurent an der École Polytechnique zu Paris, geboren am 2. September 1841 zu Echternach in Luxemburg, ist am 19. Februar d. J. im Alter von 66 Jahren gestorben.

Professor Dr. Lindelöf in Helsingfors ist am 3. März d. J. daselbst im Alter von 80 Jahren gestorben.

Dr. Heinrich Maschke, Professor der Mathematik an der Universität Chicago, ist am 2. März d. J. gestorben.

Professor Dr. A. Mayer an der Universität Leipzig ist am 11. April d. J. in Gries bei Bozen im Alter von 69 Jahren gestorben.

Geheimer Hofrat Professor Dr. Scheibner an der Universität Leipzig ist am 8. April d. J. daselbst im Alter von 82 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Steiner-Bildnisse. Auf der letzten Versammlung der Vereinigung der schweizerischen Mathematik-Lehrer hatte Professor Butzberger seinen Vortrag über J. Steiner durch Ausstellung von Manuskripten, Büchern und Bildnissen des großen schweizerischen Geometers illustriert. Einer Anregung entsprechend, hat Prof. Butzberger (Zürich, Kantonsschule) eines der Bildnisse Steiners vervielfältigen lassen, nämlich eine Lithographie von Hermann

Eichens, Paris 1841. Abzüge können zum Preise von 3,50 fr. von Professor Butzberger bezogen werden. Ein zweites Bild (in Öl) soll gleichfalls vervielfältigt werden, wenn die Subskription zu einem genügenden Ergebnis führt; der Preis dieses zweiten Bildnisses wird 6,50 fr. betragen.

Ferienkurse in Jena. Vom 5. bis 18. August 1908 finden in Jena Ferienkurse für Damen und Herren statt. Das Programm zählt u. a. auf: naturwissenschaftliche Kurse, pädagogische Kurse, schulhygienische Kurse usf. Nähere Auskunft erteilt das Sekretariat in Jena, Gartenstraße 4.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Von der **Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften** erschienen kürzlich in der deutschen Ausgabe Band IV 1 I, Heft 4, enthaltend:

Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper. Mit 35 Textfiguren. Von P. Stäckel in Hannover,

Vorrede zu Band IV. Von F. Klein in Göttingen,

Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band IV 1, I.

Mit diesem Hefte ist der I. Teilband des IV. Bandes vollständig.

Band VI 2, Heft 2, enthaltend:

Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler. Von F. Cohn in Königsberg,

Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion). Von A. Bemborad in Catania;

in der französischen Ausgabe tome I, vol. 1, fasc. 3, enthaltend:

Nombres complexes; exposé, d'après l'article allemand de E. Study-Bonn, par E. Cartan-Nancy,

Algorithmes illimités de nombres complexes; exposé, d'après l'article allemand de A. Pringsheim-Munich, par M. Fréchet-Nantes;

tome I, vol. 3, fasc. 2, enthaltend:

Théorie arithmétique des formes; exposé, d'après l'article allemand de K. Th. Vahlen-Greifswald, par E. Cahen-Paris.

R. Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. In 4 Bänden. I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. [XII u. 415 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Meine über zwei Semester sich erstreckende Vorlesung über geometrische Verwandtschaften, welche ich an der Universität Breslau, seitdem ich an ihr die Nachfolge Schröters angetreten, wiederholt gehalten habe, beabsichtige ich nunmehr als Lehrbuch über diesen Zweig der Geometrie, erweitert durch manche Abschnitte, die in der Vorlesung nicht haben Platz finden können, zu veröffentlichen. Ich denke, daß ich am besten über den Inhalt des ganzen Werkes Rechenschaft gebe, wenn ich die Überschriften der zwölf Abschnitte, in welche ich es zerlegt habe, mitteile; sie werden zeigen, daß in ihm auch Untersuchungsgebiete, die in anderen Werken noch nicht eine zusammenhängende

Darstellung erhalten haben: die nicht linearen, die mehrdeutigen Verwandtschaften, die Ausartungen, Abzählungen u. a., Berücksichtigung gefunden haben. I. Eindeutige Verwandtschaften zwischen einstufigen Gebilden. II. Einführung mehrdeutiger Verwandtschaften. III. Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen zweistufigen Gebilden. IV. Ausartungen von Korrelationen und Kollineationen, Abzählungen, lineare Systeme. V. Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. VI. Lineare Systeme von Kurven und Flächen, Ausartungen und Abzählungen, lineare Systeme von Verwandtschaften und von projektiven oder kollinearen Gebilden. VII. Eindeutige Verwandtschaften höheren Grades (Cremonasche Verwandtschaften) zwischen zweistufigen Gebilden. VIII. Korrespondenzen auf Trägern vom Geschlechte 1. IX. Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen zwei Feldern. X. Eindeutige Flächenabbildungen. XI. Eindeutige Cremonasche Verwandtschaften im Raume. XII. Mehrdeutige Verwandtschaften im Raume.

Die Teile I und II werden den ersten, III und IV den zweiten, V und VI den dritten, die übrigen den vierten Band des Werkes bilden. Sie werden bald hintereinander erscheinen können, weil das volle Manuskript vorliegt.

R. Sturm.

L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. [X u. 334 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

In diesen Vorlesungen werden zunächst die allgemeinen Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen in einer neuen Form dargestellt, die, wie mir scheint, sowohl zur Einführung in dieses Gebiet geeignet, als auch für die weitere Forschung von heuristischem Werte ist. Es werden dann namentlich diejenigen Untersuchungen behandelt, die ich in den letzten zehn Jahren, seit dem Erscheinen des Handbuches, im Anschluß an das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen angestellt habe.

L. Schlesinger.

E. Müller, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, **Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen.** In 2 Bänden. I. Band. Mit 273 Textfiguren und 3 Tafeln. XIV u. 367 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das Werk soll in zwei Bänden den nur wenig erweiterten Inhalt der Vorlesungen über darstellende Geometrie wiedergeben, die ich seit Jahren an der Technischen Hochschule in Wien für die Studierenden der Bauingenieur- und Architektur-Abteilung halte. Mein Hauptstreben in diesen Vorlesungen und den damit verbundenen konstruktiven Übungen geht dahin, das räumliche Vorstellungsvermögen der Hörer nach jener Richtung und ihre konstruktive Fertigkeit in solcher Weise systematisch auszubilden, wie sie beides in ihrem künftigen Berufe als Techniker brauchen.

Der vorliegende erste Band behandelt auf Grund der Darstellung durch zugeordnete Normalrisse (Orthogonalprojektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen) die Elementaraufgaben und die Kurven und Flächen (abwickelbare Flächen, Kugelfläche, Dreh- und Schraubenflächen, windschiefe und „graphische“ Flächen), während die kotierte Projektion, Dachausmittlung, Achsonometrie, schiefe Projektion und Perspektive den Inhalt des zweiten Bandes bilden werden. Die Anpassung an das praktische technische Zeichnen zeigt sich in

dem vorliegenden Bande unter anderm darin, daß das Konstruieren mit Hilfe von Auf- und Kreuzriß stets mitberücksichtigt, die Verwendung der Projektionsachsen und damit der Spurelemente von Geraden und Ebenen vermieden wird, daß ferner bei zahlreichen Konstruktionen möglichst mit einem Riß gearbeitet wird oder, besser gesagt, die verwendeten andern Risse in jenen hineingelegt werden. Das Konstruieren der Schatten an technischen Gegenständen liefert, neben deren achsonometrischer Darstellung, wohl den besten Übungsstoff zur Ausbildung der räumlichen Vorstellung in der beabsichtigten Richtung. Hauptsächlich aus diesem Grunde, neben ihrer praktischen Anwendung, erfuhren die Schattenkonstruktionen eine eingehendere Behandlung als sonst in Lehrbüchern ähnlichen Umfangs.

Obgleich das Buch mit den Elementen beginnt, so wird doch eine vorangegangene Beschäftigung mit dem Gegenstand, also eine gewisse Denk- und Konstruktionsfertigkeit vorausgesetzt. Ich war bestrebt, soweit es die mathematische Vorbildung des angehenden Technikers zuläßt, allgemeine Methoden zu verwenden und höhere Gesichtspunkte zu gewinnen. Die durchgängige Verwendung von Seitenrissen als Konstruktionsprinzip, die Lösung der Aufgaben über Lagenbeziehungen in einer auch für die übrigen Darstellungsarten gültigen Form, die Verwertung allgemeiner Sätze über algebraische Kurven und Flächen und die Entwicklung einiger Sätze und Begriffe der Differentialgeometrie können als Beispiele dafür dienen. Da auf die allgemeinen Flächen 2. Grades, als den Bedürfnissen des Technikers ferner liegend, nicht näher eingegangen wird, so lag auch keine Nötigung vor, die projektive Geometrie zu entwickeln. Einige ihrer Sätze werden gelegentlich abgeleitet; die notwendigen Sätze über Kurven 2. O. ergeben sich aus der Projektion des Kreises, wenn man, wie es die Betrachtung algebraischer Kurven ohnehin fordert, eine Anleihe bei der analytischen Geometrie macht.

Große Sorgfalt wurde auf die Herstellung der Text- und Tafelfiguren verwendet; sie sollen insbesondre das Ablesen des Konstruktionsganges möglichst erleichtern.

Wien. E. Müller.

O. Richter, Professor am König Albert-Gymnasium zu Leipzig, **Kreis und Kugel in senkrechter Projektion.** Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren im Text. [X u. 188 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Angesichts des oft und seit langem beklagten Übelstandes, daß die für die Schulung des Raumanschauungsvermögens so wichtige Darstellung der Kugel und ihrer Kreise nicht nur im stereometrischen Unterrichte hintangesetzt (was ja mit guten Gründen entschuldigt werden kann), sondern sogar in der darstellenden Geometrie wenig gepflegt und selbst schematisiert wird, hat der Verfasser den Versuch gemacht, eine Anzahl der in der Raumlehre häufig auftretenden Körper in allgemeiner Lage gezeichnet darzubieten und die genaue Bildherstellung zu begründen unter Hinweis auf die dabei obwaltenden mathematischen Beziehungen und bei möglichster Beschränkung auf eine einzige Bildtafel, um die Verwendung der Konstruktionen im Unterrichte zu erleichtern. Dabei sind außer der Kugel nicht nur Zylinder und Kegel, sondern auch andere aus Kugel, Zylinder und Kegel ableitbare Raumgebilde berücksichtigt worden, z. B. Prismen und Pyramiden,

Platonische und Archimedische Körper nebst einigen Durchdringungen. Die rechtwinklige Axonometrie, von der Kugel abgeleitet, die Haupt- und Nebenkreise der Kugel nebst ihren Polen werden ausführlich betrachtet, die nichteuklidische Geometrie auf der Kugel wenigstens gestreift. Eine vollständige Begründung der hauptsächlich benutzten Ellipseneigenschaften leitet das Buch ein, Anwendungen auf die Rotationskörper, auf die Schraubenlinien von Zylinder, Kegel, Kugel sowie auf die Erd- und Himmelskunde beschließen es. Vorausgesetzt wird die Kenntnis der elementaren Planimetrie und Stereometrie, einschließlich der harmonischen Eigenschaften des Kreises, an einigen Stellen auch der Trigonometrie und Algebra. O. Richter.

Mathematische-Spiele. Von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. Bd. 170 der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt". Mit einem Titelbild und 69 Figuren im Text. [VI u. 118 S.] 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Das kleine Buch ist eine populäre, stark verkürzte Ausgabe meiner im gleichen Verlage erschienenen „Mathematischen Unterhaltungen und Spiele". Es bespricht von den dort behandelten „Problèmes plaisants", eine Auswahl vornehmlich „Spiele" im engeren Sinne, und umgekehrt sind — mit Ausnahme eines Kapitels — die hier erörterten Fragen auch dort, jedoch eingehender und wissenschaftlicher, behandelt. Von den dort stets in möglichster Ausführlichkeit gemachten historischen und literarischen Angaben sind die letzteren hier ganz fortgelassen, die ersteren auf das Wichtigste beschränkt. Durfte schon die größere Ausgabe sich an ein Leserpublikum mit nur ganz elementaren mathematischen Kenntnissen wenden, so setzt die jetzt vorliegende Ausgabe keinerlei, auch noch so einfache mathematische Vorkenntnisse voraus, da sie der Technik der Mathematik ganz zu entraten sucht; sie darf sich daher als populär im weitesten Sinne des Wortes bezeichnen. W. Ahrens.

---

2. Bücherschau.

Boltzmann, L., Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes. 2 Teile. 2. unveränderter Abdruck. Leipzig 1908. Je *M* 5.—.

Burkhardt, H., Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 3. durchgesehene und vermehrte Auflage. Leipzig 1908. *M* 8.—.

Doehlemann, K., Geometrische Transformationen. II. Teil. Die quadratischen und höheren birationalen Punkttransformationen. Mit 84 Figuren. Leipzig 1908. *M* 10.—.

Duhem, P., Ziel und Struktur der physikalischen Theorien. Übersetzt von F. Adler. Mit einem Vorwort von Ernst Mach. Leipzig 1908. *M* 9.—.

Durège, H., Theorie der elliptischen Funktionen. In 5. Auflage neu bearbeitet von L. Maurer. VIII, 436 S. m. 36 Fig. Leipzig 1908. *M* 11.—.

Günther, S., Geschichte der Mathematik. 1. Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Mit 56 Figuren. Leipzig 1908. *M* 9.60.

Kozák, J., Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. II. Band. 1. Teil. Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie. Wien 1908. *M* 16.—.

Scheibner, W., Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen. Als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. 250 S. Leipzig 1905. *M* 10.—.

Schubert, H., Niedere Analysis. 1. Teil. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. 2. Auflage. Leipzig 1908. *M* 3.60.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe. 13. Band. 1. Heft.

Godt, Über die Entwicklung binärer Formen mit mehreren Variabeln. Eckhardt, Der Brocardsche Kreis des harmonischen Vierecks als Grenzfall von sechs Siebenpunktkreisen. Biermann, Über zweifache Flächenpunkte. Petr, Ein Satz über Vielecke. Fischer, Über den Hadamardschen Determinantensatz. Wiman, Über das Minimum des Integrals $\int\limits_{x_0}^{x_1} y^n \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Bateman, The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line. Rezensionen. Vermischte Mitteilungen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 133. Heft III.

Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Koenigsberger, Über die Elimination von Variabeln zwischen den Lagrangeschen Gleichungen der Dynamik.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Band IV. Heft 8.

Büchel, Die physikalischen Bedeutungen der durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(xy)}{X(xy)}$ definierten Kurvenschar. Busche, Über lineare Kongruenzen. Jaerisch, Zur Theorie der Luftdruckschwankungen.

Monatsheft für Mathematik und Physik. 1., 2. Vierteljahr. XIX. Jahrgang 1908.

Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Lerch, Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. Ernst, Zusammenhang zwischen dem Küpperschen und Plückerschen Konoid. Gmeiner, Einige Bemerkungen zu dem Weierstraßschen Kriterium für unendliche Reihen mit komplexen Gliedern. Nielsen, Über das Produkt zweier Zylinderfunktionen. Schmid, Bemerkung zur Eulerschen Gleichung. — Literaturberichte.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 56. Band. 1. Heft.

Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Heun, die Grundgleichungen der Kinetostatik der Körperketten mit Anwendungen auf die Mechanik der Maschinen. Meidell, Zum Fehlergesetz. Kleinere Mitteilungen. Bücherschau.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38. Jahrgang. 6. Heft.

Reformvorschläge unterbreitet der Naturforscher-Versammlung zu Dresden 1907. Gutzmers Allgemeiner Bericht. Klein, Allgemeine Ausführungen zu den Vorschlägen über die Lehrerausbildung. Bericht über die Einrichtungen für den naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten Preußens. Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften. Nachschrift der Redaktion.

L'Enseignement Mathématique. Xe Année. No. 1.

Gutzmer et Klein, La préparation des candidats à l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles. Laisant, Propriétés d'un système de deux triangles ou de deux tétraèdres. Emch, Théorie des miroirs plans parallèles à une même droite. Richard, Sur la nature des axiomes de la géométrie. Mélanges et correspondance.

L'Enseignement Mathématique. Xe Année. Nr. 2. 1908.

Halsted, La sphérique non-euclidienne. Crelier, Constructions synthétiques relatives à certaines courbes du 3e degré et de la 3e classe. Loria, Sur les projections des droites perpendiculaires. Cailler, Sur le changement de variables dans les dérivées d'ordre supérieur. Claparède, Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. Fehr, Note finale. Chronique. Note et documents. Bibliographie.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième série. Tome VIII, Février 1908.

Deltour, Continuants: applications à la théorie des nombres. Godeaux, Sur une transformation géométrique du sixième ordre. Fontené, Sur les quadrangles de Desboves. Fontené, Symétrie des polyèdres réguliers. Haag, Note sur les surfaces de Monge. Haag, Déformations conservant la direction des plans tangents. Lalesco, Sur une propriété caractéristique des surfaces de révolution. Correspondance.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 2e année. Nr. 11. Janvier 1908.

Sainte-Laguë, La quadrature du cercle. Tresse, A propos du principe de l'homogénéité. Notre enquête sur l'enseignement de la géométrie. Maugey, L'expérience en géométrie. Ducatel et Blutel, Sur l'enseignement des mathématiques dans la classe de philosophie. Perrin, Remarques sur la théorie de la balance. Bloch, Influence du mouvement de la source ou de l'auditeur sur la hauteur du son perçu. Mamy, Travaux pratiques et expériences.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 2e Année, Nr. 12. Février 1908.

Blutel, Une enquête sur l'enseignement des mathématiques dans la classe de philosophie. Petit, L'enseignement de la géométrie aux débutants. Marijon, Construction graphique des racines d'une équation du second degré. Faivre-Dupaigre, Rapport sur l'enseignement des sciences physiques et naturelles. Lemoine, Un exposé simple de l'attraction universelle et du calcul des masses dans le système solaire.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 6. Part. 1.

Forsyth, On partial differential equations of the second order. Western, An extension of Eisenstein's law of reciprocity. Young, On convergence and divergence of a series of continuous functions. Wright, Nodal cubics through eight given points. Bromwich, Various extensions of Abel's lemma. Wedderburn, On hypercomplex numbers.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVII. No. V.

Hermann, Note on quaternion integral theorems. Index.

Proceedings of the Royal Society Edinburgh. Vol. XXVIII. Part. II.

Barrett, A note on the Roman numerals. Sang's logarithmic, trigonometric and astronomical tables.

Annals of Mathematics. Second series. Vol. 9. Nr. 2.

Carmichael, On the classification of plane algebraic curves possessing fourfold symmetry with respect to a point. Stromquist, A second inverse problem of the calculus of variations. Wolff, The continuous plane motion of a liquid bounded by two right lines. Whittemore, A problem in chance. Kennelly, The expression of constant and of alternating, continued fractions in hyperbolic functions.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volume XIV, Number 3.

Manning, The September meeting of the San Francisco Section. Dickson, On quadratic forms in a general field. Gillespie, On the canonical substitution in the Hamilton Jacobi canonical system of differential equations. Sharpe, The

maximum value of a determinant. Miller, Third Report on recent progress in the Theory of groups of finite order. Noble, The Dresden meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Wilson, Bryans Thermodynamics. Shorter notices.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XIV. Nr. 4.

Cole, The October meeting of the American Mathematical Society. Dickson, On triple algebras and ternary cubic forms. Kasner, Isothermal systems in dynamics. Sisam, On the equations of quartic surfaces in terms of quadratic forms. Wilson, Symbolic logic. Shorter Notices. Notes.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XIV. Nr. 5.

Kellogg, The first meeting of the Southwestern Section. Ziwet, Note on the composition of finite rotations about parallel axes. Chessin, On an integral appearing in photometry. Hutchinson, Hermitian forms with zero determinant. White, Two tetraedron theorems. Noble, Singular points of a simple kind of differential equation of the second order. Wilson, The theory of electricity. Notes.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volume XIV. Nr. 6.

Cole, The fourteenth annual meeting of the American Mathematical Society. Slaught, The december meeting of the Chicago Section. Slaught, Joint meetings of mathematicians and engineers at the University of Chicago. Miller, The fifty-eighth meeting of the American Association for the advancement of science. Shorter Notices. Notes.

Transactions of the American Mathematical Society. Volume 8. Number 4.

Mason, The expansion of a function in terms of normal functions. Fréchet, Sur les opérations linéaires (troisième note). Greenhill, The elliptic integral in electromagnetic theory.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 9. No. 1. January 1908.

Griffin, Certain periodic orbits of k finite bodies revolving about a relatively large central mass. Darwin, Further note on Maclaurin's spheroid. Kellogg, Potential functions on the boundary of their regions of definition. Kellogg, Double distribution and the Dirichlet problem. Miller, Groups defined by the orders of two generators and the order of their commutator. Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces. (Second Memoir.)

---

4. Kataloge.

Johann Ambrosius Barth, Leipzig. Neue physikalische, mathematische, elektrotechnische und chemische Werke und Zeitschriften. [Erscheinungen aus den Jahren 1904—1907.]

Victor Eytelhuber, Wien VIII, Alserstr. 19. Antiquariats-Katalog No. 34. Mathematik, Physik, Astronomie, Physikalische Geographie.

Alfred Lorentz, Leipzig, Kurprinzstr. 10. Logik. Katalog 165. Philosophie. Antiquariats-Katalog 176.

Henry Sotheran & Co., London, 140, Strand, W. C. Catalogue of important works, many old and rare, on Mathematics, Astronomy, Physics and Chemistry, and kindred subjects. Part. III. Nr. 676. 1907.

James Thin, Edinburgh, 54 & 55 South Bridge. Catalogue of second-hand and new books on the mathematical, astronomical and physical sciences including transactions of learned societies, journals and scientific periodicals. Nr. 158. 1908.

The Cambridge University Press Bulletin. No. XIII. January 1908.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

F. Amodeo, Albrecht Dürer precursore di Monge. Napoli 1907.

K. Bohlin, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. (S. A. Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik.)

H. Burckhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 3. durchgesehene und vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1908, Veit & Co. ℳ 7.—.

V. v. Dantscher, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 2.80.

K. Doehlemann, Geometrische Transformationen. Zweiter Teil. Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen. Leipzig 1908, G. J. Göschen. ℳ 10.—.

M. Dolinski, Algebra und politische Arithmetik. Wien 1908, Carl Fromme. Kr. 5.—.

Encyklopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I, volume 3. Fascicule 2. [Théorie arithmétique des formes; exposée d'après l'article allemand de K. Th. Vahlen par E. Cahen.] Leipzig 1908, B. G. Teubner.

L. Günther, Geschichte der Mathematik. I. Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Leipzig 1908, G. J. Göschen. ℳ 9.60.

G. Häring, Lehrbuch der Geometrie für die Oberstufe der höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit 97 in den Text gedruckten Abbildungen. München 1908, R. Oldenbourg. ℳ 1.30.

R. Heger, Analytische Geometrie auf der Kugel. Leipzig 1908, G. J. Göschen. ℳ 4.40.

E. Hilb, Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen. Habilitationsschrift, Erlangen. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition. Amsterdam 1908, H. C. Delsman.

G. Junge, Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? Mit 4 Textfiguren. Halle a. S. 1907. Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses.

E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. In 2 Bänden. I. Band. Mit 273 Textfiguren und 3 Tafeln. XIV u. 367 S. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

L. Pfaundler, Das chinesisch-japanische Go-Spiel. Eine systematische Darstellung und Anleitung zum Spielen desselben. Mit einem Deckelbildchen und zahlreichen erklärenden Abbildungen im Texte. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

W. Scheibner, Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen. Als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 10.—.

J. Scheiner, Populäre Astrophysik. Mit 30 Tafeln und 210 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

J. Schick, Barytomik. Leipzig 1907, G. Franzscher Verlag. ℳ 2.—.

F. Gomes Teixeira, Obras sobre Mathematica. Publicadas por ordem do governo portuguès. Volume Quarto. Coimbra 1908.

A. W. Unger, Wie ein Buch entsteht. Mit 7 Tafeln und 26 Abbildungen im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1.—, geb. ℳ 1.25.

Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor de meteoroscopiis libri sex cum prooemio Georgii Joachimi Rhetici. I. De triangulis sphaericis. Herausgegeben von A. A. Björnbo. Mit 211 Figuren im Text. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Einladung zur Jahresversammlung in Cöln. Der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gibt sich die Ehre, die Mitglieder zu der in der Zeit vom 20. bis 26. September gleichzeitig mit der 80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Cöln stattfindenden Jahresversammlung ergebenst einzuladen.

Die allgemeinen Sitzungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte sollen am Montag den 21. und Freitag den 25., vormittags, die Gesamtsitzung der beiden wissenschaftlichen Hauptgruppen am Donnerstag den 24. vormittags, die Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe am gleichen Tage nachmittags stattfinden. Für die gemeinsam mit der 1. Abteilung abzuhaltenden Sitzungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung kommen also insbesondere Montag der 21. nachmittags sowie Dienstag der 22. und Mittwoch der 23., vormittags und nachmittags, in Betracht.

Da späteren Mitteilungen über die Versammlung, die im Juni zur Versendung gelangen, bereits ein vorläufiges Programm der Verhandlungen beigefügt werden soll, so bitten wir Vorträge und Demonstrationen, namentlich solche, welche in Cöln Vorbereitungen erfordern, bis zum 1. Juni bei dem unterzeichneten Schriftführer Professor Dr. A. Krazer in Karlsruhe, Westendstraße 57, anmelden zu wollen. Vorträge, die erst später, insbesondere erst kurz vor oder während der Versammlung angemeldet werden, können nur dann noch auf die Tagesordnung kommen, wenn dafür nach Erledigung der früheren Anmeldungen Zeit bleibt; eine Gewähr hiefür kann daher nicht übernommen werden.

Die Gruppierung der Vorträge wird so stattfinden, daß Zusammengehöriges tunlichst in derselben Sitzung zur Besprechung gelangt; im übrigen ist für die Reihenfolge der Vorträge die Zeit ihrer Anmeldung maßgebend. Für die Dauer eines Vortrages sind 20 Minuten in Aussicht zu nehmen.

Auch in diesem Jahre sind Vorbereitungen getroffen, um für unsere Verhandlungen einen Mittelpunkt zu schaffen. Hiezu ist die Mechanik in Aussicht genommen. Wie wir schon jetzt mitteilen können, wird von sachkundiger Seite über einige neuere Untersuchungen auf diesem Gebiete berichtet werden. Vorträge über den genannten Gegenstand sind uns daher besonders willkommen.

Den Mitgliedern der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wird das Hotel Westminster in Cöln als Absteigequartier empfohlen.

Den 26. April 1908.

Der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung:

F. Klein in Göttingen, Vorsitzender.

A. Krazer in Karlsruhe, Schriftführer.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. April 1908.

Neu eingetreten als Mitglieder:

Herr Dr. Stephan Bochnicek, Universitäts-Dozent in Agram, Duga-ulica 52.
Herr Professor Dr. F. Höck in Perleberg, Pritzwalkerstr. 22.
Herr Dr. A. Kuwaki (aus Japan) in Charlottenburg, Uhlandstr. 194.
Herr Giulio Vivanti, Professor a. d. Universität in Pavia.

Gestorben:

Am 2. III. starb der Professor a. d. Universität Chicago Dr. H. Maschke.

Am 30. III. starb in Rom die Lehrerin a. d. Techn. Schule „Marianna Dionigi“ Dr. Laura Pisati.

Am 8. IV. starb in Leipzig der o. Professor a. d. Universität Geh. Hofrat Dr. Wilhelm Scheibner.

Am 11. IV. starb in Gries der o. Professor a. d. Universität Leipzig Dr. Adolph Mayer.

Adressenänderungen:

Köstlin E. Dr., Oberreallehrer, Schwäbisch-Gmünd, Weißensteinerstr. 24.

London, F., Professor an der Universität, Bonn, Coblenzerstr. 102.

Morgenstern, A., Dr., Oberlehrer am Luisengymnasium, Berlin NW., Stephanstr. 51.

Schmid, Th., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, 1; Karlsgasse 16.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 29. April 1908.* Jonas, Über W-Strahlensysteme, Flächendeformation und äquidistante Kurvenscharen. Loewenheim, Bericht über die Auflösung von Gleichungen und die Elimination in der Algebra der Logik. — *Sitzung am Mittwoch, den 27. Mai 1908.* Loewenheim, Bericht über die Auflösung von Gleichungen und die Elimination in der Algebra der Logik. Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz. Mathematisch-astronomische Sektion. *4. November 1907:* Lorey, Bericht über die Naturforscherversammlung in Dresden und Vortrag über die neuentdeckte Handschrift des Archimedes. — *25. November 1907:* Lorey, Über die Behandlung der Differentialrechnung in der Prima höherer Lehranstalten. (Zur Erläuterung der näherungsweisen Darstellung von Funktionen hatte die Sammlung math. Modelle in Göttingen eine Anzahl von Annäherungskurven zur Verfügung gestellt.) — *30. Januar 1908:* Reichel, Nomographie. — *22. Februar 1908:* Liewald, Photogrammetrie. — *23. März 1908:* Lorey, Kleins Vorlesung über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Wissenschaftliche Begründung der Geometrie und Trugschlüsse infolge rein anschaulicher Behandlung der Geometrie.

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Freitag, den 7. Mai 1908.* Hahn, Die Untersuchungen von M. Fréchet über den Grenzbegriff. — *Freitag, den 22. Mai 1908.* Emil Müller, Beitrag zur konstruktiven Behandlung der allgemeinen Schraubflächen.

American Mathematical Society. Die 137. Versammlung fand am 29. Februar 1908 in New York City unter Vorsitz von Professor White statt. Vorträge: Carmichael, 1. On the numerical factors of certain arithmetical forms. 2. On the remainder term in a certain development of $f(a+x)$. Sharpe, 1. The Lorentzian transformation and the radiation from a moving electron. 2. The inner force of a moving electron. Snyder, Normal curves of genus 6 and their groups of birational transformations. Young, 1. The geometry of chains on a complex line. 2. A fundamental invariant of discontinuous ζ-groups defined by a normal curve of order n in a space of n dimensions. Van Vleck, On non-measurable point sets. Dickson, On higher congruences and modular invariants. Mason, Note on Jacobi's equation in the calculus of variations. Hill, Subjective geometry. Bliss, A method of deriving Euler's equation by means of an invariant integral. Haskins, On the second law of the mean. Kasner, 1. The contact transformations of mechanics. 2. The plane sections of an arbitrary surface. Miller, Note on the periodic decimal fractions. Roever, Brilliant points of curves and surfaces. Irwin, Transformations of the elements $x, y, y' \cdots y^{(k)}$ that carry a union of such elements over into a union.

American Mathematical Society. San Francisco Section. Die 13. ordentliche Sitzung der Section wurde am 29. Februar 1908 in der Stanford Universität unter dem Vorsitz von Professor Hoskins abgehalten. Tagesordnung: Lehmer, A discussion by synthetic methods of the covariant conic of two given conics. Lipke, Ein Fehler im Königschen Beweise des Reziprozitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste. Miller, Generalization of the positive and negative numbers. Hoskins, 1. A general diagrammatic method of representing propositions and inference in the logic of classes. 2. General algebraic solutions in the logic of classes. Mc Donald, On certain types of continued fractions considered from a common point of view. Suter, On the surface $F_1(u) = \frac{u}{1-u^4}$, $F_2(v) = \frac{v}{1-v^4}$. Blichfeldt, On a certain basis of geometry.

Association of Teachers of mathematics in the Middle States and Maryland. Am 14. März 1908 wurde die 10. ordentliche Versammlung der Association zu Baltimore mit folgenden Vorträgen abgehalten: Hulbert, Undergraduate instruction in mathematics; Schwatt, Our duty as teachers; Jackson, Notes on the teaching of mathematics in English preparatory schools and colleges; Morley, A test of elementary text books in geometry; Gminder, The history of mathematical symbolism.

Società italiana di Matematica. Infolge eines im Februar d. J. ergangenen Aufrufs zur Gründung einer italienischen mathematischen Gesellschaft haben sich zahlreiche Fachgenossen Italiens zum Beitritt bereit erklärt. Es sind bereits drei Spezial-Ausschüsse eingesetzt worden, die auf der ersten Versammlung in der zweiten Hälfte des Monats Oktober zu Florenz Bericht erstatten werden; nämlich 1. ein Ausschuß zur Ausarbeitung der Satzungen (Amodeo, Conti und Enriques), 2. ein Ausschuß zur Abfassung eines Berichts über die Reform des mathematischen Schulunterrichts (Berzolari, Bonola, Veneroni) und 3. ein Ausschuß zur Ausarbeitung eines Berichts über die Ausbildung der künftigen Mittelschullehrer (Certo, Pittarelli).

The Manchester Mathematical Society. Die Gesellschaft ist am 19. Februar 1908 mit 60 Mitgliedern begründet worden. Zum Vorsitzenden wurde Professor H. Lamb, zum Schriftführer Professor H. Bateman gewählt. Die Sitzungen sollen alle zwei Monate stattfinden, eine Veröffentlichung der Verhandlungen ist vorläufig nicht geplant.

Schweizerische Naturforscher-Gesellschaft. Die 91. Jahresversammlung wird vom 30. August bis 2. September zu Glarus stattfinden.

Association française pour l'avancement des sciences. Die diesjährige Versammlung findet vom 3. bis 10. August in Clermont-Ferrand statt.

British Association for the advancement of science. Die Jahresversammlung wird zu Dublin vom 2. bis 9. September unter dem Vorsitz von Prof. Fr. Darwin abgehalten werden.

Società italiana per il progresso delle scienze. Die 2. Jahresversammlung wird in der zweiten Hälfte des Monats Oktober zu Florenz stattfinden. Gleichzeitig wird die *Società italiana di Matematica* ihre konstituierende Sitzung daselbst abhalten (s. oben).

Spanische Naturforscher-Gesellschaft. In Spanien ist eine Naturforscher-Gesellschaft in der Bildung begriffen, die ihre erste Versammlung im nächsten September zu Saragossa abhalten wird.

American Association for the advancement of Science. Die nächste Versammlung wird im Dartmouth College zu Hanover, N. H., vom 29. Juni bis 4. Juli d. J. stattfinden.

Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Die XVII. Hauptversammlung fand Pfingsten d. J. in Göttingen statt. Die Hauptverhandlungen waren auf die Tage: Dienstag den 9., Mittwoch den 10. und Donnerstag den 11. Juni anberaumt.

IV. Internationaler Mathematiker-Kongreß.

Vom 5. bis 12. April 1908 hat in Rom der IV. Internationale Mathematiker-Kongreß getagt, an dem etwa 550 Herren und 180 Damen teilnahmen. Das Organisationskomitee, bestehend aus dem Präsidenten Blaserna und den Herren Castelnuovo, Reina, Cerruti, Di Legge, Pittarelli, Tonelli und Volterra, hatte alle Vorbereitungen in ausgezeichneter Weise getroffen, so daß ihnen der wärmste Dank aller Teilnehmer sicher ist. Die Sitzungen fanden im Palazzo Corsini statt, der zugleich Sitz der Accademia dei Lincei ist. Sehr dankenswert war es, daß mit großer Pünktlichkeit täglich früh ein Tageblatt zur Verteilung gelangte, aus dem der Verlauf des verflossenen und das Programm des laufenden Tages zu ersehen war. Wir geben im folgenden nur eine ganz summarische Übersicht über die Vorträge und die wichtigsten sonstigen Beschlüsse und Begebenheiten.

Erste Begrüßung.

Die erste Begrüßung fand *Sonntag, den 5. April 1908* abends in der Aula magna der Universität von Rom statt. Der Rektor Tonelli hieß die Erschienenen mit sympathischen Worten willkommen.

Eröffnungssitzung.

Montag, den 6. April, 10 Uhr fand im Saal der Horazier und Curiatier auf dem Capitol in Anwesenheit des Königs von Italien die feierliche Eröffnung des Kongresses statt. Begrüßungsansprachen hielten der Bürgermeister von Rom, der Präsident Blaserna und der Unterrichtsminister Rava. Daran schloß sich der Vortrag von Volterra: Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.

Gesamtsitzungen.

Erste Gesamtsitzung. Montag, den 6. April 1908.

Konstituierung des Vorstandes.

Segre verliest den Bericht über den als „Medaglia Guccia" bekannten Preis. Von den eingelieferten Bewerbungsschriften erhält keine den Preis; dieser wird vielmehr Professor Francesco Severi für seine Arbeiten über die „Geometria sopra le superficie algebriche" zuerkannt. — Vorträge:

1. Mittag-Leffler, Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.
2. Forsyth, On the present condition of partial differential equations of the second order as regards formal integration.

Zweite Gesamtsitzung. Dienstag, den 7. April. Vorträge:

1. Darboux, Les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale.
2. v. Dyck, Über die mathematische Enzyklopädie.

Dritte Gesamtsitzung. Mittwoch, den 8. April. Vorträge:

1. Newcomb, La théorie du mouvement de la lune; son histoire et son état actuel.
2. Lorentz, Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.

Vierte Gesamtsitzung. Freitag, den 10. April. Vorträge:

1. Poincaré, L'avenir des mathématiques (wegen Erkrankung des Verfassers vorgelesen von Darboux).
2. Picard, L'analyse dans ses rapports avec la physique mathématique.

Fünfte Gesamtsitzung. Samstag, den 11. April.

Der Vortrag von Veronese, Geometria non Archimedea, fiel wegen Unpäßlichkeit des Verfassers fort.

Annahme der folgenden

Resolutionen.

1. „Il congresso, avendo riconosciuto la importanza di un esame accurato dei programmi e dei metodi d'insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie delle varie nazioni, confida ai professori Klein, Greenhill e Fehr l'incarico di costituire un comitato internazionale che studii la questione e ne riferisca al prossimo congresso."
2. „La section III (Mécanique), après un échange de vues dans lequel a été reconnue l'importance d'une unification des notations vectorielles, propose au congrès la nomination d'une commission internationale pour l'étude de cette question."

3. „Il congresso fa voti che all'ordine del giorno del prossimo congresso sia posta la costituzione di un' Associazione internazionale dei matematici."
4. „Il résulte de l'échange de vues, qui a eu lieu dans la section III B, qu'il serait hautement désirable de provoquer une entente de plus en plus étroite entre ceux qui s'occupent de perfectionner les méthodes mathématiques et ceux qui ont besoin de les appliquer à un objet pratique.

   A cet effet la section émet le voeu que les mathématiques appliquées à la science de l'ingénieur fassent, au prochain congrès, l'objet d'une section spéciale.

   En outre, la section III B propose la constitution d'une commission internationale chargée de préparer les travaux de cette nouvelle section. La composition de cette commission internationale sera fixée par le bureau du IVème congrès."
5. „Il IV. congresso internazionale dei matematici in Roma considera come questione di massima importanza per le scienze matematiche pure ed applicate la pubblicazione di tutte le opere di Eulero.

   Il congresso saluta con riconoscenza l'iniziativa presa in proposito dalla Società dei Naturalisti Svizzeri, e fa voti che la grande opera sia eseguita dalla Società stessa colla collaborazione dei matematici delle altre nazioni.

   Il congresso prega l'Associazione internazionale delle Accademie, e specialmente le Accademie di Berlino e di Pietroburgo, delle quali Eulero è stato celeberrimo membro, di aiutare l'impresa di cui è parola."

[Zu dieser Resolution bemerkte Darboux, daß die Frage schon auf anderen Kongressen erörtert wurde, auch auf der letzten Versammlung der internationalen Association der Akademien in Wien, und daß obige Resolution daher wahrscheinlich günstige Aufnahme finden würde.]

Nächster Kongreß.

Der V. Internationale Mathematiker-Kongreß ist durch Forsyth namens der *Cambridge Philosophical Society* und der *London Mathematical Society* für den *Monat August 1912* nach *Cambridge* in England eingeladen worden. Diese Einladung wurde angenommen.

Mittag-Leffler hat gleichzeitig den VI. Internationalen Kongreß für 1916 nach Stockholm eingeladen. Die Entscheidung über die Annahme dieser Einladung steht natürlich dem V. Kongress zu.

Ferner äußert Hadamard den Wunsch, daß in Zukunft die internationalen Kongresse der Mathematiker und der Physiker möglichst gleichzeitig tagen möchten.

Sektionssitzungen.

Sektion 1. Arithmetik, Algebra, Analysis.

Erste Sitzung. Dienstag, den 7. April 1908. Vorträge:

1. Gordan, Die Auflösung der allgemeinen Gleichung 6ten Grades
2. Zermelo, Über die Grundlagen der Arithmetik und Analysis.
3. Borel, Sur les principes de la théorie des ensembles.
4. Riesz, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre.
5. Frizell, Die Mächtigkeit des Kontinuums.

Zweite Sitzung. Mittwoch, den 8. April 1908. Vorträge:

1. Koebe, Über ein allgemeines Uniformisierungsprinzip.
2. Boutroux, Sur l'inversion des fonctions entières.
3. Petrovich, Une classe remarquable de séries entières.
4. Pincherle, Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti.
5. Young, On some applications of semi-continuous functions.

Dritte Sitzung. Donnerstag, den 9. April 1908. Vorträge:

1. Hadamard, Sur l'application d'une méthode de Calcul des Variations.
2. Schlesinger, Sur quelques problèmes paramétriques de la théorie des équations différentielles linéaires.
3. Rémoundos, Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles.
4. Pick, Über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion.
5. Saltykow, Sur l'existence des intégrales complètes de S. Lie et le perfectionnement de la méthode de Jacobi dans la théorie des équations partielles.
6. Lalesco, Sur les solutions analytiques de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
7. Volterra, Sopra il metodo delle immagini nelle equazioni del tipo iperbolico.
8. Zervos, Sur la correspondance entre les théories d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'intégration des systèmes de Monge.

Vierte Sitzung. Freitag, den 10. April. Vorträge:

1. Moore, On a form of general analysis, with application to differential and integral equations.
2. Fredholm, Les intégrales de Fourier et la théorie des équations intégrales linéaires.
3. D'Adhémar, Sur les équations intégrales de M. M. Fredholm et Volterra.
4. Orlando, Sull' integrazione delle equazioni integrali.
5. Pascal, Sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.
6. Stéphanos, Sur une extension de la théorie des covariants et invariants des formes binaires.
7. Moutessus, Sur les relations de recurrence à trois termes.
8. Pucciano, Contributo alla critica di alcune questioni che si riattaccano all' equazione differenziale di Laplace.

Fünfte Sitzung. Samstag, den 11. April. Vorträge:

1. Capelli, Sopra i coefficienti degli sviluppi delle funzioni algebriche.
2. Nicoletti, Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari o quadratiche.
3. Fubini, Sulla teoria dei gruppi discontinui.
4. Dickson, On the last theorem of Fermat.
5. Levi, Sopra la equazione indeterminata del 3^0 grado.
6. Frattini, La nozione d'indice e l'analisi indeterminata dei polinomi interi.
7. Severini, Sulle successioni infinite di funzioni analitiche.
8. Zaremba, Sur le principe de Dirichlet.

9. Boggio, Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finianziaria ed attuariale.
10. Autonne, Sur les fonctions homogènes d'une variable hypercomplexe.

Sektion 2. Geometrie.

Erste Sitzung. Dienstag, den 7. April 1908. Vorträge:

1. Andrade, Le théorème d'Ampère-Stockes et le postulatum d'Euclide.
2. Varicak, Beitrag zur nicht-euklidischen analytischen Geometrie.
3. Zeuthen, Un exemple d'une correspondance sans „Wertigkeit".
4. Montesano, Sui complessi bilineari di coniche nello spazio.

Zweite Sitzung. Mittwoch, den 8. April. Vorträge:

1. Severi, Di alcuni recenti risultati nella geometria algebrica e di qualche problema ad essa collegato.
2. Bagnera, Sopra le equazioni algebriche $f(x, y, z) = 0$ che si possono risolvere con x, y, z funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri.
3. De Franchis, Intorno alle superfice regolari di genere uno che ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti.
4. Bianchi, Sulle trasformazioni di Darboux delle superficie d'area minima
5. Rados, Über Wendetangentenebenen der Raumkurven.

Dritte Sitzung. Donnerstag, den 9. April. Vorträge:

1. Pannelli, Sopra un carattere delle varietà algebriche a tre dimensioni.
2. Dingeldey, Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin.
3. Finsterbusch, Über Erweiterung eines Schließungsproblems von J. Steiner und ihre Beziehung zur Gaußschen Theorie zentrierter Linsensysteme.
4. Gallucci, Sulla configurazione armonica.
5. Brückner, Bemerkungen zur Morphologie der außergewöhnlichen Polyeder erläutert durch die Sechsflache.
6. Brouwer, Une théorie des groupes finis et continus indépendante des axiomes de Lie.

Vierte Sitzung. Freitag, den 10. April. Vorträge:

1. Tritzeika, Sur une nouvelle classe de surfaces.
2. Pfeiffer, Du développement des fonctions algébriques de deux variables indépendantes en séries entières des variables réales.

Sektion 3. A) Mechanik, Mathematische Physik, Geodäsie.

Erste Sitzung. Dienstag, den 7. April 1908. Vorträge:

1. G. H. Darwin, The rigidity of the Earth.
2. Lamb, The flexure of narrow Beams.
3. G. Lauricella, Sull' equazione $\Delta^{2n} V = 0$ e su alcune estensioni delle equazione dell' elasticità.

Zweite Sitzung. Mittwoch, den 8. April. Vorträge.

1. C. Somigliana, Sulle deformazioni elastiche non regolari.
2. M. Abraham, Zur Theorie der Wirbelstrombremsen.
3. J. Andrade, Sur une nouvelle méthode de mesure des frottements.
4. A. Korn, Über die universellen Schwingungen der Materie mit Anwendungen auf die Theorie der Gravitation und der intramolekularen Kräfte.
5. T. Levi-Civita, Sulla espressione asintotica dei potenziali ritardati.

Dritte Sitzung. Donnerstag, den 9. April. Vorträge:

1. Garbasso, Sulla luce bianca.
2. Greenhill, Geometry of motion of a spinning top.
3. Sommerfeld, Beiträge zur Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung.
4. Boggio, Sopra alcuni teoremi di fisica matematica.
5. Boccardi, Sur une nouvelle équation dans les observations des passages.
6. Andrade, La synchronisation par le fer doux.

Vierte Sitzung. Freitag, den 10. April. Vorträge:

1. Genese, The method of reciprocal polars applied to forces in spaces.
2. Tedone, Sopra il problema di Lamè.
3. Bryan, Notes on the steering of automobiles and on the balancing of Ships.
4. Poynting and Barlow, The momentum of a beam of light.

Fünfte Sitzung. Samstag, den 11. April. Vorträge:

1. Kolosoff, Sur le problème plan dans la théorie d'élasticité.
2. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali.
3. Pizzetti, Sulla riduzioni delle latitudini e delle longitudini al livello del mare.
4. Casazza, Nuove deduzioni dalla teoria della composizione dei moti.
5. Beljankin, Exemple d'une force centrale telle qu'un point matériel peut décrire une courbe du 2ème ordre.

Sektion 3. B) Verschiedene Anwendungen der Mathematik.

Erste Sitzung. Dienstag, den 7. April 1908. Vorträge:

1. Toja, Alcune considerazioni sui rapporti tra le matematiche e la scienza attuariale.
2. Quiquet, Sur une nouvelle application des Jacobiens aux probabilités viagères.
3. Poussin, Sur l'application du graphicisme aux calculs d'assurances.
4. Elderton, A comparison of some curves used for graduating.

Zweite Sitzung. Mittwoch, den 8. April. Vorträge:

1. Bohlmann, Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung.
2. Borel, Sur les applications du calcul des probabilités aux sciences biologiques.

3. March, Une nouvelle statistique internationale de la population. Observation sur la comparaison et sur la terminologie des statistiques.
4. De Helguero, Sulla rappresentazione analitica di alcune statistiche.
5. Lembourg, L'actuaire, sa fonction et les deux aspects de celle-ci
6. Gini, La regolarità dei fenomeni rari.
7. Dawson, Necessary cautions in dealing with actuarial problems.
8. Castelli, Sull' insegnamento della matematica attuariale e finanziaria nelle scuole professionali inferiori, medie, e superiori.

Dritte Sitzung. Donnerstag, den 9. April. Vorträge:

1. Luiggi, Considérations sur les rapports entre les sciences mathématiques et l'art de bâtir.
2. Canevazzi, La matematica e l'arte del costruttore in Italia.
3. D'Ocagne, La technique du calcul dans la science de l'ingénieur.
4. D'Ocagne, Sur la rectification approchée des arcs de cercles.
5. Claxton-Fidler, On the applications of mathematics to the theory of construction.
6. Swain, The teaching and use of mathematics in the civil engineering profession.

Sektion 4. Philosophische, historische und didaktische Fragen.

Erste Sitzung. Dienstag, den 7. April 1908. Vorträge:

1. Hessenberg, Zählen und Anschauung.
2. Boutroux, Sur la relation de l'algèbre à l'analyse mathématique.
3. Itelson, Logik und Mathematik.
4. Itelson, Deduktion, Induktion und Perduktion.
5. Simon, Du continu, point et ligne droite, remarques historiques.
6. Bernstein, Nachweis, daß unter allen Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes der Beweis des An-Nairizi (900 n. Chr.) der axiomatisch einfachste ist.
7. Pastore, La natura extralogica delle leggi di tautologia e di assorbimento nella logica matematica.

Zweite Sitzung. Mittwoch, den 8. April. Vorträge:

1. Loria, Le tradizioni matematiche dell' Italia.
2. Zeuthen, Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la géométrie.
3. Smith, The Ganita-Sāra, Sangraha of Mahāvirācārya.
4. Duhem, Sur la découverte de la loi de la chute des graves.
5. Giacomelli, I risultati di alcune ricerche sull' opera meccanica di Galileo.
6. Pittarelli, Luca Pacioli usurpò per sé stesso qualche libro di Piero De Franceschi?

Dritte Sitzung. Donnerstag. den 9. April. Vorträge:

1. Gutzmer, Über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts in Deutschland.
2. Borel, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en France.
3. Godefroy, The teaching of mathematics in English public schools for boys

4. Smith, The teaching of secondary mathematics in the United States.
5. Suppantschitsch, L'application des idées modernes à l'enseignement secondaire des mathématiques en Autriche.
6. Beke, Über den mathematischen Unterricht in Ungarn.
7. Vailati, Su alcuni caratteri degli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.

Vierte Sitzung. Freitag, den 10. April. Vorträge:

1. Marcolongo, Un trattato inedito di meccanica di Vincenzo de Fillippis, anteriore alla „Mecanique analitique" di Lagrange.
2. Fehr, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse.
3. Stéphanos, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Grèce.
4. Archenhold, Über die Bedeutung des mathematischen Unterrichts im Freien in Verbindung mit Reformvorschlägen für den Lehrgang.
5. Andrade, Quelques observations psychologiques recueillies dans les enseignements scientifiques d'initiation.
6. Conti, Sulla iniziazione alle matematiche e sulla preparazione matematica dei maestri in Italia.
7. De Galdeano, Alcune notizie sull' insegnamento matematico in Spagna.

Fünfte Sitzung. Samstag, den 11. April. Vorträge:

1. Gallucci, La questione logica e gnoseologica nei fondamenti della matematica.
2. Broggi, Sui fondamenti del calcolo delle probabilità.
3. Emch, Der Rechenkünstler Winkler und seine Methoden.
4. Loria, Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques.
5. Amodeo, Appunti su Biagio Pelicani da Parma.
6. Pittarelli, Due lettere inedite di Lagrange all'abate di Caluso.
7. Amodeo, Sulla necessità di formare un archivio delle scienze matematiche.
8. De Amicis, L'equivalenza in planimetria indipendentemente dalle proporzioni e dal circolo.
9. Brouwer, Le potenze possibili.
10. Delitala, Le tetraedrometria piana nelle scuole secondarie.

Gesellige Veranstaltungen.

Wir stellen hier kurz das Unterhaltungsprogramm zusammen, das den Teilnehmern seitens der Kongreßleitung dargeboten wurde:

Sonntag, den 5. April abends: Begrüßung der Kongreßmitglieder und deren Damen durch den Rektor der Universität Rom, Prof. Tonelli, in der Aula magna.

Mittwoch, den 8. April 10 Uhr abends: Empfang im Kapitolinischen Museum dargeboten von der Stadtverwaltung Roms.

Donnerstag, den 9. April nachmittags: Besuch des Palatins, veranstaltet vom Unterrichtsministerium.

Freitag, den 10. April abends: Konzert im Anfiteatro Corea zu Ehren der Kongreßteilnehmer.

Sonntag, den 12. April: Ausflug nach Tivoli: Besichtigung der Villa Hadrians; Bankett im „Chalet des cascades“; Besichtigung der Kaskaden, des Sybillentempels und der Villa d'Este.

Für die Damen war außerdem noch ein besonderes Vergnügungs- und Unterhaltungsprogramm während der wissenschaftlichen Sitzungen vorgesehen.

Im ganzen ist der Kongreß glänzend verlaufen, trotz des sehr ungünstigen Wetters; er hat reiche wissenschaftliche Früchte gezeitigt und eine günstige Gelegenheit zur Anknüpfung und Erneuerung persönlicher Beziehungen der Fachgenossen dargeboten: der beste Lohn für die große Arbeitslast, die die italienischen Kollegen mit unermüdlicher Liebenswürdigkeit im Interesse ihrer dankbaren Gäste auf sich genommen und geleistet haben. G.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Guccia-Medaille. In der ersten allgemeinen Sitzung des IV. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Rom erhielt keine der für die Guccia-Medaille eingegangenen Bewerbungsschriften den Preis; vielmehr wurden der Preis und die Medaille Professor Fr. Severi an der Universität Padua für seine Arbeiten über die Geometrie der algebraischen Flächen zuerkannt.

Smith-Preise. Für das Jahr 1908 sind folgende Smith-Preise verteilt worden: W. J. Harrison für seine Arbeit über „Problems in the wave motion of viscous liquids“; J. E. Littlewood für seine Arbeit „On the asymptotic behaviour of integral functions of zero order and allied functions“; J. Mercer für seine Arbeit „On the solution of ordinary linear differential equations having doubly periodic coefficients“.

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Sommersemester 1908 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften. (Schluß.)

Dresden. Krause, Höhere Mathematik III mit Übungen; Theorie der Differentialgleichungen; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Algebra; Seminar. Helm, Höhere Mathematik I mit Übungen; Doppelbrechung und Interferenz des Lichtes; Versicherungstechnisches Seminar. Disteli, Darstellende Geometrie I mit Übungen; Perspektive. Heger, Sphärische Kegelschnitte. Naetsch, Sphärische Trigonometrie; Analytische Geometrie der Kegelschnitte; Übungen. Grübler, Technische Mechanik II mit Übungen; graphostatische Übungen. Toepler, Einleitung in die Theorie der elastischen Schwingungen und der Akustik.

Kiel. Pochhammer, Analytische Geometrie der Ebene (3); Theorie der bestimmten Integrale (4); Seminar. Heffter, Differentialrechnung (4); Übungen dazu (1); Höhere Algebra (4); Seminar. Landsberg, Funktionentheorie (4); Kolloquium dazu (1); Grundlagen der Geometrie (2). Weinnoldt, Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik (2). Kobold, Niedere Geodaesie (2); Übungen dazu (2). Übungen an den Instrumenten der Sternwarte. Harzer, Theorie der Bahnbestimmungen (4); Übungen dazu (1). Dieterici, Physikalisches Kolloquium. Weber, Thermodynamik (4); Theorie physikalischer Meßapparate mit angeschlossenen Übungen (1).

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. M. Abraham, ao. Professor an der Universität Göttingen, wurde als o. Professor der mathematischen Physik an die University of Illinois berufen.

Dr. Bricard, Repetitor an der École Polytechnique, wurde zum Professor der angewandten Geometrie am Conservatoire des Arts et Métiers zu Paris ernannt.

Professor Dr. Georg Cantor an der Universität Halle wurde zum Geheimen Regierungsrat ernannt.

Dr. J. L. Coolidge wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Harvard Universität ernannt.

Dr. P. Epstein, Privatdozent an der Universität Straßburg, wurde zum ao. Professor ernannt.

Dr. E. B. Frost, Direktor des Yerkes Observatoriums in Chicago, wurde zum Mitgliede der National Academy of Science in Washington ernannt.

Dr. L. Graetz, ao. Professor an der Universität München, wurde zum o. Professor der Physik daselbst ernannt.

Dr. Hamy, Astronom an der Sternwarte zu Paris, wurde zum Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu Paris ernannt.

Dr. Herglotz, ao. Professor an der Universität Göttingen, wurde zum o. Professor der Mathematik an der Universität Wien ernannt.

Dr. H. Kobold wurde zum etatmäßigen ao. Professor der Astronomie an der Universität Kiel und zum Herausgeber der „Astronomischen Nachrichten" ernannt..

Professor Dr. A. Krazer wurde für das nächste Studienjahr zum Rektor der Technischen Hochschule in Karlsruhe gewählt.

Professor Dr. J. Larmor an der Universität zu Cambridge wurde zum auswärtigen Mitgliede der National Academy of Science in Washington gewählt.

Dr. Henry Mitchel, ao. Professor der Mathematik an der Columbia-Universität, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Dr. B. F. Morrell wurde zum Professor der Mathematik an der Fort Worth Universität zu Fort Worth, Texas, ernannt.

Professor Dr. E. Pickering, Direktor der Sternwarte des Harvard College, erhielt die goldene Bruce-Medaille von der Astronomical Society of the Pacific.

Hon. Bertrand Russel wurde zum Mitgliede der Royal Society zu London gewählt.

Dr. W. Schlink, ao. Professor für technische Mechanik an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Professor Dr. H. v. Seeliger an der Universität München wurde zum auswärtigen Mitgliede der National Academy of Science in Washington gewählt.

Professor Dr. W. Story an der Clark-Universität wurde zum Mitgliede der National Academy of Science in Washington gewählt.

Privatdozent Dr. Tauber an der Universität Wien wurde zum ao. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Dr. R. H. Tucker vom Lick-Observatorium wurde zum Direktor der vom Carnegie-Institut in Neuseeland, Südamerika oder Südafrika geplanten Sternwarte ernannt.

Dr. M. N. Vanecek, Privatdozent an der böhmischen Technischen Hochschule zu Prag, wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Professor Dr. J. Weinmeister an der Forstakademie Tharandt wurde zum Geheimen Hofrat ernannt.

Gestorben.

General Frolov ist am 2. April 1908 in Genf gestorben.

Professor Dr. Kepinski an der Technischen Hochschule zu Lemberg ist im Alter von 40 Jahren gestorben.

Professor Picciati von der Universität Bologna ist am 11. März d. J. zu Venedig im Alter von 39 Jahren gestorben.

Dr. Laura Pisati, Lehrerin an der Technischen Schule Marianna Dionigi in Rom, ist am 30. März d. J. daselbst gestorben.

5. Vermischtes.

(Vacat.)

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Es sei auch an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, daß die 6. Lieferung als Schlußheft des Berichtes über die „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik" von H. Burkhardt erschienen ist. Damit liegt das 2. Heft des X. Bandes des Jahresberichtes vollständig vor. Des großen Umfangs wegen hat die Verlagsbuchhandlung dieses 2. Heft in zwei Halbbände zerlegt und der Schlußlieferung doppelte Titelbogen beigegeben. Das 1. Heft des X. Bandes wird die Geschichte der Vereinigung und das Gesamtregister zu Band I—X des Jahresberichtes enthalten und einen besonderen Teilband bilden. Dieses Heft befindet sich im Druck. Die Mitglieder der Vereinigung wollen ihre Bestellung direkt an die Firma B. G. Teubner in Leipzig richten, um in den Genuß des Vorzugspreises zu gelangen.

Aus Natur und Geisteswelt. Die wohlbekannte und weitverbreitete Sammlung hat es im Laufe ihres zehnjährigen Bestehens auf 200 Bändchen gebracht. Die Firma B. G. Teubner in Leipzig hat aus diesem Anlaß soeben im Format der Sammlung einen illustrierten Katalog der erschienenen Bändchen herausgegeben, auf den auch an dieser Stelle aufmerksam gemacht sei.

Internationales Archiv für Photogrammetrie. Unter diesem Titel ist soeben das 1. Heft einer neuen Zeitschrift erschienen, die von Professor Eduard Doležal in Verlage von Karl Fromme in Wien herausgegeben wird. Vier bis fünf Hefte zu vier bis fünf Bogen sollen einen Band bilden, und jährlich

soll höchstens ein Band erscheinen. Der Herausgeber hat sich eine große Zahl namhafter Mitarbeiter für sein Unternehmen gesichert, das zugleich Organ der österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie in Wien ist. Aus dem Inhalt des Heftes 1 sei hier angeführt: Ziel und Aufgabe des internationalen Archives für Photogrammetrie. Doležal, Oberst Aimé Laussedat, der Begründer der Photogrammetrie, sein Leben und seine wissenschaftlichen Arbeiten. Herz, Zur Theorie der perspektivischen Abbildung nicht paralleler Bildflächen. Thiele, Métrophotographie aérienne à l'aide de mon Auto-Panoramographe. Doležal, Die Photographie und Photogrammetrie im Dienste der Denkmalpflege und das Denkmälerarchiv. Kleinere Mitteilungen. Literaturbericht. Bibliographische und Vereinsmitteilungen.

Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. IV. Band. Von 1759 bis 1799. Bearbeitet von S. Günther, F. Cajori, E. Netto, V. Bobynin, A. v. Braunmühl, V. Kommerell, G. Loria, G. Vivanti. C. R. Wallner und M. Cantor. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. [VI und 1113 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Wenn der Verfasser der drei ersten Bände seinem Vorsatze, mit dem dritten Bande sein Lebenswerk abzuschließen, nicht vollständig untreu zu werden sich entschließen konnte, so war er ebensowenig imstande, dem von den verschiedensten Seiten erfolgenden Andrängen vollständig zu widerstehen, das eine Fortsetzung unter seiner Leitung, wenn nicht aus seiner Feder verlangte. Die Leitung sollte und mußte sich darauf beschränken, daß bei dem damit Betrauten die Sammelstelle für sämtliche den IV. Band bildenden Beiträge vorhanden sei, daß also sozusagen alle Fäden durch seine Hand gehen, während die einzelnen Mitarbeiter durchaus unabhängig und selbstverantwortlich für die von ihnen übernommenen Abschnitte erscheinen.

P. Stäckel und **W. Ahrens, der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers.** Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. [XII u. 184 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Die zweihundertste Wiederkehr des Geburtstages von L. Euler hat das Interesse für eine Gesamtausgabe seiner Werke erweckt, die Jacobi und Fuß vor 60 Jahren in Angriff genommen hatten. Der Briefwechsel zwischen ihnen gibt aber nicht nur hierüber Aufschluß, sondern enthält auch eine solche Fülle neuen wertvollen Materials zur Bio- und Bibliographie Eulers, daß er jedem, der sich mit der Geschichte der Mathematik im 18. Jahrhundert beschäftigt, unentbehrlich sein wird.

O. Bolza, Professor an der Universität Chicago, **Vorlesungen über Variationsrechnung.** Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations" desselben Verfassers. In 3 Lieferungen. I. Lieferung. Mit 45 Figuren im Text. [300 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das Buch ist eine vollständig umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations" desselben Verfassers. Die Absicht des Verfassers ist, in Form eines Lehrbuchs eine Darstellung der modernen Variationsrechnung — wie sie sich unter der Einwirkung der kritischen Richtung in der Infinitesimalrechnung, vor allem aber unter dem

Einfluß der epochemachenden Entdeckungen von Weierstraß in den letzten dreißig bis vierzig Jahren entwickelt hat — in ihren Hauptzügen zu geben.

Um das Buch einem größeren Leserkreis zugänglich zu machen, ist die Darstellung — wenigstens in den ersten Kapiteln — elementarer gehalten als in der englischen Ausgabe, und die Sätze über reelle Funktionen reeller Variabeln, von denen im Text Gebrauch gemacht ist, sind in einem Anhang zusammengestellt. Aus demselben Grunde ist die Zahl der Beispiele vermehrt worden, und außerdem sind zahlreiche Übungsaufgaben beigefügt worden. Ferner ist die Weierstraßsche Theorie, die in der englischen Ausgabe zum Teil nur in Form eines Referates gegeben ist, jetzt im einzelnen durchgeführt.

Die in den letzten Jahren erschienenen Untersuchungen sind berücksichtigt worden, soweit sie sich in den Rahmen des Buches einfügen ließen. Als gänzlich neu sind zu erwähnen: die Abschnitte über die Hamilton-Jacobische Theorie, über das allgemeinste Variationsproblem für einfache Integrale (das sogenannte „Lagrangesche Problem") und über Doppelintegrale.

Chicago. O. B.

L. Krüger, Professor am Kgl. Geodätischen Institut bei Potsdam. **Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte.** A. u. d. T.: Veröffentlichung des Kgl. Preußischen Geodätischen Instituts. Neue Folge Nr. 34. [IV u. 50 S.] 4. Leipzig 1908. B. G. Teubner.

Zunächst werden die Bedingungsgleichungen für ein aus Zentralsystemen bestehendes Liniennetz entwickelt. Für ein Linienviereck läßt sich die Bedingungsgleichung in zwei verschiedenen Formen aufstellen. Diese werden nun dazu benutzt, um ein von C. F. Gauß herrührendes Kriterium über die physische Möglichkeit der Daten eines Rückwärtseinschnitts nach drei Punkten abzuleiten. Im Anschluß hieran erfolgen für letzteren noch Entwicklungen anderer von Gauß aufgestellter Gleichungen, die aus seinem Nachlaß (Werke Bd. VIII) veröffentlicht sind, und für die noch keine Ableitung bekannt war. Mit Hilfe des Gaußschen Kriteriums werden weiter zwei verschiedene Formen von Bedingungsgleichungen für Rückwärtseinschnitte nach mehr als drei Punkten entwickelt. Da sich beide Arten in mehrfacher Weise ansetzen lassen, so wird noch untersucht, wie unter ihnen zu wählen ist, um bei gleichem Aufwand an Rechnung die größte Schärfe zu erzielen. L. Krüger.

Paul Bachmann, Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Mit 10 Figuren im Texte. [XI u. 270 S.] 8. Leipzig 1907, G. J. Göschen. (Sammlung Schubert LIII.)

Mit diesem von der Verlagshandlung erbetenen Werke beabsichtigt der Verfasser, den Leser in leicht verständlicher Weise in das gegenwärtig aktuelle Gebiet der Zahlentheorie, die Theorie des algebraischen Zahlenkörpers und seiner Formen einzuführen. Er tut dies unter Beschränkung auf das einfachste Beispiel des *quadratischen* Körpers. Nach knapper Herleitung der Hauptsätze über Teilbarkeit und Kongruenz der Zahlen und quadratische Reste, nach einem Abschnitt über die Linearform $ax + by$ und äquivalente Zahlen wird der Versuch gemacht, die Lehren von den binären quadratischen Formen und vom quadratischen Körper *in ein einziges Ganzes* zu verschmelzen. Dies geschieht hauptsächlich, indem in der Weise von F. Klein auf Grund der Deutung der Formen als Zahlengitter die Gitterzahlen als Bindeglied beider Lehren ein-

geführt werden. Nachdem so nebst der Reduktion der Formen ihre Äquivalenz und Verteilung in eine endliche Anzahl Klassen behandelt worden ist, folgt ein Kapitel über Zahlen, Moduln, Ideale und Idealklassen des Körpers und deren Zuordnung zu den Formen und Formklassen gleicher Diskriminante, der Fundamentalsatz der Idealtheorie, dann die Einheiten bzw. automorphen Transformationen, ferner die Teilbarkeitsgesetze, endlich auf Grund der Komposition die Korrespondenz der „idealen" oder Gitterzahlen und der Ideale.

Paul Bachmann.

F. Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von Rud. Schimmack. Teil 1. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. Band I, 1. [IX u. 236 S.] gr. 8. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Der Student der mathematischen Wissenschaften ist meistens nicht geneigt eine pädagogische Vorlesung zu hören. Er wird in der Tat auch oft seine Zeit besser verwerten können; denn Verständnis und Interesse für pädagogische Fragen kommen im allgemeinen erst, wenn man selbst durch den Eintritt in den Vorbereitungsdienst dem Organismus einer höheren Schule angehört. Außerdem wird die Pädagogik an den Universitäten zumeist von solchen Dozenten vertreten, die zu der sprachlich-historischen Sparte der philosophischen Fakultät gehören. Gerade diese Tatsache hat F. Klein mit veranlaßt im Winter 1904—05 eine Vorlesung über den mathematischen Unterricht zu halten, die nunmehr in Buchform bearbeitet durch seinen damaligen Assistenten vorliegt. Indem ich zunächst aus dem oben angeführten Grunde den Zweifel ausspreche, ob die Hörer der Vorlesung rechten Gewinn von ihr gehabt haben, betone ich auf der anderen Seite, daß alle im höheren Schulamt stehenden Mathematiker, Anfänger sowohl wie die Erfahrenen die Kleinschen Vorträge mit großem Gewinn lesen werden. Denn ohne jemals vor einer Klasse als Lehrer gestanden zu haben, hat Klein doch das richtige Augenmaß für das Erreichbare der einzelnen Stufen. Ich halte das um so mehr für meine Pflicht hier ausdrücklich zu betonen, als von Gegnern der Reform des mathematischen Unterrichts im Sinne Kleins er häufig als bloßer Theoretiker hingestellt wird. Mit allen Einzelheiten der Vorträge wird natürlich der Praktiker nicht einverstanden sein. So halte ich z. B. die Kritik an dem Lehrplan des Goethegymnasiums in Frankfurt a. M. auf S. 157 nicht für berechtigt: die Beanstandung des Apollonischen Problems. Gerade dieses Problem läßt sich nach so viel verschiedenen Gesichtspunkten behandeln (Beziehung zu den Kegelschnitten, Abbildung durch reziproke Radien, Veränderlichkeit der Figuren (vgl. S. 124), Ausdehnung auf den Raum usw.), daß ich es für die Rückblicke in Oberprima (S. 131) für besonders geeignet halte. Zudem gibt es vom rein zeichnerischen Standpunkt aus eine bei vielen Schülern recht beliebte Aufgabe. Die auf S. 138 erwähnte empirische Gewinnung des Fallgesetzes geschieht wohl überall in der Physik so, auch wo praktische Schülerübungen noch nicht eingeführt sind. — Aber solche Einzelheiten müssen zurücktreten, wenn man das Ganze der Vorträge betrachtet, die in ihrem roßzügigen Plan Fragen des mathematischen Unterrichts in Verbindung mit allgemeinen kulturellen Fragen bringen. So handelt der erste Abschnitt von den Volksschulen und ihren Lehrern. Es wird die Notwendigkeit der Reform der

Lehrerbildung betont; die Forderung der Volksschullehrer aber, allgemein zur Universität zugelassen zu werden, wird abgelehnt. Sodann wird darauf hingewiesen, wie in Fortbildungsschulen und Volkshochschulkursen die Mathematik herangezogen werden kann nach dem Muster der Perryschen Vorträge.

Der zweite Abschnitt behandelt die sechs unteren Klassen der höheren Knabenschulen. Im Mittelpunkt steht der Funktionsbegriff. Kleins Behauptung, daß dieser Begriff prinzipiell in die mittleren Klassen noch nicht aufgenommen sei, muß ich zustimmen; in den allerletzten Jahren ist allerdings nach meinen Erkundigungen eine wesentliche Besserung eingetreten. Im dritten Abschnitt werden die Mädchenschulen und mittleren Fachschulen besprochen. Sehr beachtenswert erscheint hier die Deutlichkeit mit der auf die Übelstände der vielen privaten technischen Lehranstalten Norddeutschlands hingewiesen wird. Der vierte Abschnitt bringt den historischen Entwicklungsgang des mathematischen Unterrichts unserer höheren Schulen. Der fünfte behandelt die drei oberen Klassen nach den preußischen Lehrplänen von 1901; daran schließen sich im sechsten die Reformvorschläge, in denen wieder der Funktionsbegriff und die Infinitesimalrechnung in bekannter Weise die Hauptrolle spielen. Das Lehrziel in Mathematik soll am Realgymnasium dem am Gymnasium gleich werden, dadurch daß die Mathematik dort sechs Stunden an die Naturwissenschaft abgibt; dafür erhält die Oberrealschule ein wesentlich höheres Lehrziel. Die Zahl der humanistischen Gymnasien ist wesentlich zu beschränken. Bei den Reformschulen wird die sehr bedenkliche Verschiebung der mathematischen Stunden in den Reformgymnasien betont: eine Vermehrung unten gegenüber einer Verkürzung in den oberen Klassen.[1])

Der letzte Abschnitt handelt von den Hochschulen und bringt insbesondere eine Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen. Im Anhang sind zwei frühere Aufsätze Kleins abgedruckt: der Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung und Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. Zwischen diesen finden wir den Meraner Lehrplan für Mathematik, dessen innere Berechtigung zu zeigen die Hauptaufgabe der Vorlesung war, eine Aufgabe, die sehr überzeugend gelöst ist. Wenn ich oben nur von den im Schulamt stehenden Mathematikern als Leser dieser Vorträge gesprochen habe, so möchte ich jetzt hier dem Wunsch Ausdruck geben, daß auch die Mathematiker an den Hochschulen, denen die wissenschaftliche Ausbildung der Oberlehrer obliegt, Einsicht in diese Vorträge nehmen; des weiteren aber können auch die nicht-mathematischen Schulmänner, insbesondere die Leiter der pädagogischen Seminare der höheren Schulen und die in der Schulverwaltung stehenden aus den Vorträgen großen Gewinn ziehen. Schließlich will ich nicht unterlassen dem Herausgeber R. Schimmack, der es verstanden hat, die einzelnen Vorträge in eine so abgerundete durchgearbeitete Form zu bringen, wie Klein selbst im Vorwort dankend hervorhebt, volle Anerkennung zuteil werden zu lassen.

Görlitz. W. Lorey.

---

1) Vgl. die sehr beachtenswerte Schrift von H. Vogt (Breslau), Mathematik und Reformgymnasium. Leipzig 1907, Dürr.

Kambly-Langguth, Arithmetik und Algebra. Nach den preußischen Lehrplänen von 1907 umgearbeitet von A. Thaer. Ausgabe B. Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht. 39. Auflage der Kamblyschen Arithmetik und Algebra. Mit 52 Figuren im Text. Breslau 1908, Ferdinand Hirt.

Obwohl im allgemeinen Schulbücher im Jahresbericht nicht zur Besprechung kommen, sei auf die vorliegende Bearbeitung der Kamblyschen Arithmetik und Algebra ausnahmsweise aufmerksam gemacht. Vor allem geschieht dies deswegen, weil der Bearbeiter der neuen Auflage ernsthaft die von den Reformvorschlägen der Unterrichtskommission der Naturforschergesellschaft ausgehenden Anregungen zu verwirklichen sucht. Erwähnt sei, daß namentlich auch manche Kürzung stattgefunden hat. Im III. Abschnitt des Anhangs ist ferner eine Einführung in die Differentialrechnung dargeboten worden, von der der Bearbeiter meint, daß sie auch den Gymnasien auf die Dauer nicht werde vorenthalten werden können. Nebenbei möchte Referent aber auch die Frage aufwerfen, ob es wirklich bequemer oder dem Verständnis der Schüler angemessener ist, mit Differentialen statt mit Differentialquotienten zu rechnen. Damit wird zugleich die Frage gestellt, ob z. B. die Herleitung des Differentials von $\sin x$ aus dem auf $\sin(x + dx)$ angewendeten Additionstheorem des Sinus für Schulen bzw. Schüler angemessen ist. (S. 229.) Vielleicht könnte diese Frage einmal in der Unterrichtsabteilung der Naturforscherversammlung allseitig beleuchtet werden. G.

Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. Bearbeitet von Professor Dr. H. Zöppritz. In zweiter neubearbeiteter und erweiterter Auflage herausgegeben von Professor Dr. Alois Bludau. In 2 Teilen. Teil II: Kartographie und Kartometrie. Mit 12 Figuren und 2 Tabellen im Text und 2 Tafeln. [VIII u. 109 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Wenn schon der erste Teil, die Projektionslehre, hauptsächlich die Aufgaben der *praktischen* Kartographie behandelt, so hat in noch höherem Grade der zweite Teil sich die Aufgabe gestellt, die Fragen zu behandeln, welche sich dem *ausübenden* Kartographen bei seiner Tätigkeit entgegenstellen. Dementsprechend werden zuerst die Aufgaben der Kartographie und die Quellen der *geographischen* Karte behandelt. Nach einer Einteilung der Karten einerseits nach dem Maßstabe, andrerseits nach dem *Inhalte*, wird der *Kartenentwurf* (Konstruktion des Gradnetzes ein- und mehrblättriger Karten) unter Berücksichtigung der Verjüngungsverhältnisse dargelegt. Daran schließen sich die Darlegungen über die *Situationsdarstellung* und der dabei gebräuchlichen *Signaturen.* Das Kapitel *„Kartenschrift"* hat ganz besonders gegen die erste Auflage eine beträchtliche Erweiterung und zugleich durch die Beigabe von *Schriftproben* eine veranschaulichende Grundlage erhalten. Im Abschnitte *„Terraindarstellung"* sind die neuesten theoretischen Erörterungen wie praktischen Ausführungen und Versuche berücksichtigt, und in einem kurzen Anhange dazu ist das Verhältnis zwischen Kartenzeichnung und -vervielfältigung wenigstens gestreift worden. Ein gänzlich neuer Abschnitt: *Kartometrie* ist zum Schlusse angefügt und erörtert die Verwertung der Karte für geographische Messungen. Neben den Aufgaben, die ohne besondere instrumentelle Hilfsmittel gelöst werden können, wird die Verwertung des *Planimeters* für Flächenmessungen

ausführlicher behandelt und ganz besonders das *relative* Verfahren nicht bloß auf geographischen, sondern auch auf topographischen Karten erläutert. Zwei beigefügte Tabellen für die Meßtischblätter, die Karte des Deutschen Reichs in 1 : 100000 und die österreichische Spezialkarte in 1 : 75000 berechnet, sollen die Anwendung des relativen Verfahrens auf diesen Karten erleichtern.

Koesfeld i. W. A. Bludau.

2. Bücherschau.

Fournier d'Albe, E. E., Die Elektronentheorie. Gemeinverständliche Einführung in die moderne Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Übersetzt von J. Herweg, Leipzig 1908. M 4.80.

Escher, R., Die Theorie der Wasserturbinen. Ein kurzes Lehrbuch. Berlin 1908. M 8.—.

Gray, G. J., A bibliography of the works of Sir Isaac Newton, with notes. 2nd edition. London 1908.

Hammer, E., Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instruments für Studierende und für Praktiker. 4. durchgesehene Auflage. Stuttgart 1908. M 1.—.

Harzer, P., Die Sterne und der Raum. Rektoratsrede. Kiel 1908. M —.60.

Kluge, W., Besondere Systeme. Ein Beitrag zur Bestimmung von Determinanten. Programm. Lissa i. P. M 1.50.

Korn, A., Ein neuer allgemeiner Beweis für die Gültigkeit der Neumann-Robinschen Methoden des arithmetischen Mittels. Leipzig 1908. M 1.50.

Laisant, C. A., Einführung in die Mathematik. Allen Kinderfreunden gewidmet. Deutsch von F. J. Schlicht. Wien 1908. M 2.—.

Lauenstein, R., Die graphische Statik. 10. Auflage. Bearbeitet von P. Bastine, Leipzig 1908. M 6.—.

Mach, E., Die Mechanik, in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt 6. verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig 1908. M 8.—.

Schlesinger, L., Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. X, 334 S. mit 6 Fig. Leipzig 1908. M 10.—.

Sturm, R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 1. Band. Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. XII, 415 S. Leipzig 1908. M 16.—.

Waals, J. D. v. d., Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht von Systemen mit gasförmig-flüssigen Phasen. Nach Vorlesungen bearbeitet von Ph. Kohnstamm. 1. Teil. Leipzig 1908. M 12.—.

Wehner, H., Das Innere der Erde und der Planeten. Mathematisch-physikalische Untersuchung. Mit 27 Originalfiguren im Text. Freiberg 1908. M 2.50.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 8. Band. 3. Heft.

Vailati, Per la preistoria del principio dei momenti virtuali. Stäckel und Ahrens, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Rudio, Eneström, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Anfragen. Rezensionen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 133. Heft IV.

Jahnke, über orthogonale Substitutionen und die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten. Réthy, über Stabilität und Labilität

eines materiellen Punktes im widerstehenden Mittel. Jung, Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung von $x = a$, $y = b$.

Mathematische Annalen. 65. Band. 3. Heft.

Landsberg, Über die Krümmung in der Variationsrechnung. Bromwich, On the limits of certain infinite series and integrals. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Löffler, Zum Noetherschen Fundamentalsatz. Fejér, Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung. Hurwitz, Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen. Hurwitz, Über die diophantische Gleichung $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. Schoenflies, Bemerkung zu meinem zweiten Beitrag zur Theorie der Punktmengen.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 38. Jahrgang. 7. und 8. Heft.

Haacke, Die Maximalaufgabe als Einleitung in die Differentialrechnung. Schmidt, Über einige Kurven höherer Ordnung. Kleinere Mitteilungen. Aufgaben-Repertorium. Literarische Berichte. Pädagogische Zeitung.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 2e année. Nr. 13. 14. Mars 1908. Avril 1908.

Fontené, Rapport sur l'enseignement des mathématiques. Sainte-Laguë, La quadrature du cercle. Ficquet, La géométrie dans les classes primaires. Richard, Sur l'enseignement de la géométrie; sur les mathématiques en philosophie. Lemoine, Marotte, Les mathématiques et la physique dans les sections littéraires du second cycle. Lugol, Étude graphique de la réfraction. Benoist, Stroboscopie simplifiée pour l'étude pratique des mouvements vibratoires. Durand, Sur le déplacement d'une figure dans le plan ou dans l'espace. Méray, Les „Nouveaux éléments de géométrie" de M. Charles Méray.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 6. Part. 2.

Wedderburn, On hypercomplex numbers. Bromwich, On the inversion of a repeated infinite integral. Baker, On the invariants of a binary quintic and the reality of its roots. Barnes, A new development of the theory of the hypergeometric functions.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII. Part. III.

Muir, The theory of compound determinants in the historical order of its development up to 1860. Muir, the product of the primary minors of an $n-by-(n+1)$ array. Dyson, The systematic motions of the stars. Young, On a test for continuity.

Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 9. Nr. 3.

Kellogg, A necessary condition that all the roots of an algebraic equation be real. Wilson, The equilibrium of a heavy homogeneous chain in a uniformly rotating plane. Coolidge, The continuity of the roots of an algebraic equation. Osgood, On the differentiation of definite integrals. Buchanan and Hildebrandt, Note on the convergence of a sequence of functions of a certain type. Bliß, On the inverse problem of the calculus of variations. Haskins, A geometrical interpretation of the generalized law of the mean. Saurel, On the torsion of a curve.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XIV. Nr. 7.

Hill, Subjective geometry. Dickson, On higher congruences and modular invariants. Mason, Note on Jacobi's equation in the calculus of variations. Hedrick, On the distance from a point to a surface. Neikirk, A geometric representation of the Galois field. Fite, Concerning the degree of an irreducible linear homogeneous group. Sharpe, On the Lorentzian transformation and the radiation from a moving electron. Shorter notices. Notes.

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie III. Tomo XIV. Fascicolo 3°, 4°

Levi, Sull' equazione del calore. Nicoletti, Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari. Lovett, On a class of periodic solutions in the problem of four bodies.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXIV. Fascicolo III. 1907.

Mineo, Le antiradiali del cerchio. Keyser, Circle range transversals of circle ranges in a plane: a problem of simple construction. Levi, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Burali-Forti e Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Neumann, Die Randwertaufgaben für den Innen- und Außenraum derselben geschlossenen Fläche in ihren gegenseitigen Beziehungen. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet. Bortolotti, Sulla pubblicazione delle „Opere Matematiche" di Paolo Ruffini e del suo „Carteggio" con gli scienziati del suo tempo.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede Reeks. Deel VIII. Tweede Stuk.

van Raay, Iets over de rechte centrale botsing. Rutgers, Bijdrage tot de theorie der faculteitenreeksen. van Aller, autopolaire Kegelsneden en kwadratische oppervlakken. Kerkhoven-Wythoff, On the equilibrium of a system of n particles of equal mass, placed on the inner surface of a sphere and mutually repelling each other according to the mth power of the distance. van Geer, Hugeniana Geometrica. IV. Kapteyn, Sur quelques intégrales définies. Bibliographie.

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica de Porto. Volume II. No. 4.

Lerch, Sur une application de la théorie de la Fonction $R(w, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(w+r)^s}$. Teixeira, Sobre a construcção do circolo osculador das cubicas circulares e das quarticas bicirculares.

4. Kataloge.

Theodor Ackermann, München, Promenadeplatz. 10. Antiquariats-Katalog Nr. 572. Beschreibende und exakte Naturwissenschaften.

Wilhelm Engelmann, Leipzig. Neuer Verlag aus dem Jahre 1907.

Gauthier-Villars, Paris, 55 Quai des Grands-Augustins. Price-list of books in the French language relating to mathematical sciences. 1908.

Mayer & Müller, Berlin NW., Prinz Louis Ferdinandstr. 2. Katalog 235. Physik, Abteilung I.

Henry Sotheran & Co., London, 140, Strand, W.C. Bibliotheca chemico-mathematica. Part. IV. No. 682. 1908.

B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3. B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange Unterhaltungsliteratur enthaltend. CXXXI, 484 S. gr. 8. 1908.

B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3. Aus Natur und Geisteswelt. Illustrierter Katalog. 1908.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

Annuario della Accademia Pontania pel 1908 (Anno CCCCLXVI della sua fondazione). Pubblicato per cura del segretario generale Prof. Luigi Pinto. Napoli 1908.

A. Basch und **A. Leon,** Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes. [S. A.]

E. Bostolotti, Sul calcolo degli infiniti. [S. A.]

H. Brandes, Über die axiomatische Einfachheit, mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des pythagoreischen Lehrsatzes. Dissertation. Halle a. S. 1908.

Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. Unter Mitwirkung der Herren V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 32.—.

P. Crantz, Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. II. Teil Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Ratenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. Mit 21 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

K. Düsing, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Hannover 1908, Max Jänecke. ℳ 1.—

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I, volume 1, Fascicule 3. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 5.—.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV 1, I. Heft 4. [Inhalt: Stäckel, Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper; Klein, Vorrede zu Band IV]. ℳ 7.80. Band VI, 2. Heft 2. [Cohn, Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler; Bemporad, Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion)]. ℳ 4.—. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Franz Eulenburg, Der „akademische Nachwuchs". Eine Untersuchung über die Lage und die Aufgaben der Extraordinarien und Privatdozenten. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 2.80.

Festschrift beim Einzug in das neue Gebäude der Städtischen Oberrealschule zu Halle a. S. Verfaßt vom Direktor und Lehrern der Schule. Halle a. S. 1908, Max Niemeyer.

H. Friedrichs, Das Feldmessen des Tiefbautechnikers. Methodisches Taschenbuch für den Gebrauch an technischen und verwandten Fachschulen und in der Praxis. I. Teil: Reine Flächenaufnahme. Mit 182 Textabbildungen und einem Plan in mehrfarbiger Lithographie. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 3.20.

M. Gebhardt, Das Geschichtliche im mathematischen Unterrichte, mit besonderer Berücksichtigung des humanistischen Gymnasiums. [S. A.] Dresden 1908.

P. van Geer, Hugeniana Geometrica. IV. [S. A.]

P. van Geer, Christiaan Huygens' laatste lebensjaren. [S. A.]

Goldziher Károly, Reformtörekvések a mathematikai oktatás terén. Budapest 1908.

E. Haentzschel, Über ein orthogonales System von bizirkularen Kurven vierter Ordnung. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin. Ostern 1908. Berlin 1908, Weidmannsche Buchhandlung.

P. Harzer, Die Sterne und der Raum. Rede beim Antritte des Rektorates der Kgl. Christian-Albrechts-Universität am 5. März 1908 gehalten. Kiel 1908.

F. Heiland, Hüllflächen einer Schar von Regelflächen zweiter Ordnung. Dissertation. Jena 1908.

A. Höfler, Drei Vorträge zur Mittelschulreform. I. Die Reformbewegungen des realistischen Unterrichtes in Deutschland und Österreich. II. Der Organisationsentwurf von 1849 als Fundament für den Ausbau der österreichischen Mittelschulen. III. Pädagogik und Philosophie (Akademische Antrittsvorlesung). Wien 1908, Wilhelm Braumüller.

A. Höfler, Epilogisches zur Mittelschulenquete. [S. A.]

International Association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics. March 1908.

Kambly-Langguth, Arithmetik und Algebra. Nach den preußischen Lehrplänen von 1901, umgearbeitet von A. Thaer. Ausgabe B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht. 39. Auflage der Kamblyschen Arithmetik und Algebra. Mit 52 Figuren im Text. Breslau 1908, Ferdinand Hirt. *M* 2.50.

Walter Kluge, Besondere Systeme. Ein Beitrag zur Bestimmung von Determinanten. Beilage zum Jahresbericht des Kgl. Comenius-Gymnasiums. Lissa i. P. 1908.

Carl Kostka, Tafeln für symmetrische Funktionen bis zur elften Dimension. Mit kurzen Erläuterungen. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Kgl. Gymnasiums und Realgymnasiums zu Insterburg. Ostern 1908. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

L. Krüger, Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. Veröffentlichung des Königlich Preußischen geodätischen Instituts. Neue Folge. No. 34. Potsdam 1908. (Leipzig, B. G. Teubner.) *M* 4.—.

A. Kummer, Über eine Gattung von projektiven Transformationsgruppen in sechs Veränderlichen. Dissertation. Bonn 1908.

A. Lanner, Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik. Berlin 1907, Otto Salle.

A. Leon, Über die Störungen der Spannungsverteilung, die in elastischen Körpern durch Bohrungen und Bläschen entstehen. [S. A.]

A. Leon und **A. Basch,** Über die Temperaturspannungen in einer Hohlkugel bei stationärer Wärmeströmung. [S. A.]

W. Lorey, Archimedes und unsere Zeit. Rede gehalten bei der Feier des Geburtstags S. M. des Kaisers in der Aula des Gymnasium Augustum in Görlitz am 27. Januar 1908. [S. A.] Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M* —.80.

F. Pietzker, Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Stufen. Teil II. Lehrgang der Oberstufe. Mit 200 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 4.40.

Otto Richter, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 4.80.

Ludwig Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Mit 6 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 10.—.

P. Stäckel und **W. Ahrens,** Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 8.—.

Rudolf Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Vier Bände. I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 16.—.

G. Vailati, La matematica nell' insegnamento secondario. [S. A.]

R. Vater, Hebezeuge, Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Mit 67 Abbildungen im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. *M* 1.25.

G. Volquardts, Feldmessen und Nivellieren. Leitfaden für den Unterricht an den Hochbauabteilungen bautechnischer Fachschulen. Mit 35 Figuren im Text. Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M* —.80.

H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. Dissertation. Göttingen 1908.

H. Zöllich, Beiträge zur Theorie der ganzen transzendenten Funktion der Ordnung Null. Dissertation. Halle a. S. 1908.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Mai 1908.

Neu eingetreten als Mitglieder:

Herr Dr. J. Grand, Assistent a. d. Techn. Hochschule, Karlsruhe; Ettlingen, Steigehohlstr. 17.
Herr Oberlehrer Dr. Franz Hochheim, Weißenfels, Grüne Gasse 12.
Herr Dr. C. R. Wallner, Hof a. S., Ascherstr. 3.
Herr Dr. Hermann Weyl, Göttingen, Maschmühlenweg 13.
Herr Dr. Hans Zöllich, Halle a. S., Goethestr. 30.

Gestorben:

Am 2. April starb der Oberlehrer Dr. O. Pund zu Charlottenburg.

Adressenänderungen:

Loria, G., Professor an der Universität, Genua (Italien), Piazza Manin 41.
Netto, E. Dr., G. H. R., Professor an der Universität, Gießen, Bismarckstr. 45.
Schimmack R. Dr., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen, Friedländerweg 51.
Zsigmondy K. Dr., Professor a. d. Technischen Hochschule, Wien VII, 2, Lindengasse 1a.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 24. Juni 1908.* Witt, Über Näherungsdarstellung von Funktionen. Lewent, Über einige Ungleichungen.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. Sommer-Semester 1908. *Erste Sitzung am 28. April.* Berichte über die Ereignisse der Ferien, insbesondere den Kongreß in Rom. — *Zweite Sitzung am 5. Mai*: F. Klein berichtet über das im vergangenen Winter von ihm gemeinsam mit Prandtl, Runge, Wiechert abgehaltene Seminar über Hydrodynamik; das Ziel war, praktisch wichtige Probleme graphisch und numerisch vollständig durchzuarbeiten. Behandelt wurden einfache Aufgaben der stetigen und unstetigen reibungslosen Potentialbewegung, ferner Laminarbewegung, Wirbelablösung, Turbulenz und hauptsächlich die Schiffsbewegung. — *Dritte Sitzung am 12. Mai*: L. Prandtl führt einige Experimente über Stabilisierung von Ballons (nach Parseval) sowie einige Modelle von Flugapparaten vor. — C. Runge berichtet über das neue Buch von Lanchester: „Aerodynamics". — *Vierte Sitzung am 19. Mai*: F. Klein gibt den Literaturbericht. — H. Minkowski legt ein von E. Meißner

hergestelltes Modell eines konvexen Körpers konstanter Breite und konstanten Umfanges vor. — O. Birk referiert über astronomische Beobachtungsmethoden im Anschluß an den Enzyklopädieartikel von Cohn (IV_2, 5). — *Fünfte Sitzung am 26. Mai*: F. Klein gibt den Literaturbericht. — H. Zeuthen (Kopenhagen) legt einige Modelle vor, die den Verlauf der developpablen Tangentenfläche einer Raumkurve an singulären Stellen darstellen. — O. Birk berichtet über das Enzyklopädiereferat von Bemporad (VI_2, 6) über den Einfluß der Atmosphäre auf astronomische Beobachtungen. — F. Klein referiert über Stäckels Enzyklopädieartikel „Elementare Dynamik" (IV, 6) und spricht im Anschluß daran über die Versuche der Konstruktion von Kreiselkompassen. — *Sechste Sitzung am 2. Juni:* F. Klein gibt den Literaturbericht. — F. Bernstein trägt über den gegenwärtigen Zustand der Versicherungsmathematik und ihre weiteren Aufgaben vor, insbesondere im Hinblick auf Organisation der Forschung und des Unterrichts.

Mathematische Abteilung des Schlesischen Philologenvereins. Der 34. Hauptversammlung des Schlesischen Philologenvereins, die am 27. Mai in Neisse tagte, ging zum erstenmal eine mathematische Fachsitzung voraus. In dieser hielt Lorey (Görlitz) einen Vortrag über „die Differentialrechnung auf der Schule". Insbesondere wurde die Maclaurinsche Entwicklung durch zahlreiche Schülerzeichnungen erläutert (darunter auch Zeichnungen von Schülern der Königsberger Oberrealschule, die Herr Schülke (Königsberg) zur Verfügung gestellt hatte; des weiteren aber auch durch Lichtbilder, die die Sammlung mathematischer Modelle in Göttingen freundlichst geliehen hatte. In der anschließenden Besprechung des Vortrags ergab sich sehr überwiegend volle Zustimmung zu den bekannten Reformplänen des mathematischen Unterrichts.

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Freitag, den 26. Juni 1908.* Tietze, Eine Anwendung der Lehre der gitterförmigen Lagerung konvexer Körper auf die algebraische Zahlentheorie. (Nach Minkowski, Diophantische Approximationen).

American Mathematical Society. Die 138. Versammlung tagte am 25. April 1908 zu New York City mit folgendem wissenschaftlichen Programm. Slocum, The collapse of tubes under external pressure. Wilson, 1. On the differential equations of the equilibrium of an inextensible string. 2. On the principle of relativity. Swift, Note on the second variation in an isoperimetric problem. Hutchinson, The hypergeometric functions of n variables. Kasner, Note on Meusnier's theorem. Finkel, Determination of the groups of order 2^m which contain selfconjugate cyclic subgroups of order 2^{m-4} and whose generating operations correspond to the partitions $[m-4, 4]$, $[m-4, 3, 1]$. Young, Two-dimensional chains and the classiffication of complex collineations in a plane. Moore, On certain constants analogous to Fourier's constants. Saurel, On the distance from a point to a surface. Lytle, Multiple integrals over iterable fields. Lambert, The fundamental theorem of algebra. Huntington and Forté, On the fluctuations in the speed of a flywheel. Huntington, On the theory of the gyroscope, in the special reference to the Brennan monorail car. Glenn, Studies in the theory of degenerate algebraic curves. — Es wurde beschlossen, die Sommerversammlung des Jahres 1909 mit einem „Colloquium" zu verbinden und in der Princeton Universität abzuhalten.

American Mathematical Society. The Chicago Section. Die 23. ordentliche Sitzung der Sektion fand am 17.—18. April 1908 zu Chicago statt. Das Programm enthielt folgende Mitteilungen: Sisam, On a locus determined by concurrent tangents. Ford, On the integration of the equation $a_0(x)u(x+2)+a_1(x)u(x+1)+a_2(x)u(x)=0$. Curtiss, On the real branches of implicit functions in the neighbourhood of multiple points. Dines, A method of investigating numbers of the forms $6^x \cdot s \pm 1$. Dickson, 1. Criteria for the irreducibility of a reciprocal equation. 2. On reciprocal abelian equations. 3. On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p}$. Westlund, Note on the equation $x^n + y^n = nz^n$. Hodge and Moulton, On certain characteristics of orbits for a general central force. Miller, The central of a group. Young, On the problem of the spherical representation and the characteristic equations of certain classes of surfaces. Lunn, 1. A continuous group related to von Seidel's optical theory. 2. A minimal property of simple harmonic motion. 3. The deduction of the electrostatic equations by the calculus of variations. Schweitzer, 1. Remark on Enriques' review of the foundations of geometry. 2. On the calculi of relations, classes and operations. 3. On the quaternions as an operator in Grassman's extensive algebra. Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces, fourth memoir. Birkhoff, Irregular integrals of ordinary linear differential equations. Carmichael, 1. On the general tangent to plane curves. 2. On plane algebraic curves symmetrical with respect to each of two rectangular axes. Kellogg, Note on the geometry of continuously turning curves. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen. MacMillan, On the character of the solutions of homogeneous linear equations with periodic coefficients.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisaufgaben der Académie royale de Belgique für 1909.

Trouver, en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la noncoïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. — Preis 800 Francs.

On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale de l'espace euclidien réglé, avec le résumé des travaux déjà publiés sur lesquels s'appuient les nouvelles recherches. — Preis 800 Francs.

Resumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. — Preis 800 Francs.

Die Bewerbungsschriften müssen französisch, flämisch oder lateinisch geschrieben und in üblicher Weise mit Motto und verschlossener Adresse des Verfassers vor dem 1. August 1909 an den ständigen Sekretär im Palais des Académies eingeschickt werden.

3. Hochschulnachrichten.

(Vacat.)

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. W. H. Butts wurde zum ao. Professor der Mathematik an der University of Michigan ernannt.

Dr. W. Feußner, ao. Professor der mathematischen Physik an der Universität Marburg, wurde zum o. Honorarprofessor daselbst ernannt.

Professor Dr. R. Fricke in Braunschweig hat einen Ruf als etatmäßiger Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Hannover abgelehnt.

Dr. C. Gundersen wurde zum ao. Professor der Mathematik an dem Michigan Agricultural College ernannt.

Dr. A. G. Hall wurde zum Professor der Mathematik an der University of Michigan ernannt.

Professor Dr. H. A. Lorentz an der Universität Leiden wurde zum auswärtigen Ritter des Ordens pour le mérite für Wissenschaften und Künste ernannt.

Professor Dr. M. Mason an der Yale University wurde zum ao. Professor der Mathematik an der University of Wisconsin ernannt.

Professor Dr. H. Poincaré wurde zum Ehrenmitglied der physikalisch-chemischen Gesellschaft zu Erlangen ernannt.

Professor Dr. F. Schur an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe erhielt einen Ruf an die Universität Straßburg als Nachfolger von Professor Dr. Reye.

Professor Dr. J. W. Young an der Princeton University wurde zum ao. Professor der Mathematik an der University of Illinois ernannt.

Gestorben.

Dr. O. Pund, Oberlehrer in Charlottenburg, ist — im Begriff, zum internationalen Mathematiker-Kongreß nach Rom zu reisen, — am 2. April d. J. plötzlich im Alter von 40 Jahren gestorben.

---

5. Vermischtes.

Ausbildung von Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik an den Technischen Hochschulen. Am 5. Juni 1908 hat in Darmstadt eine Beratung von Delegierten der Technischen Hochschulen zu *Aachen*, *Berlin*, *Braunschweig*, *Darmstadt*, *Dresden*, *Hannover*, *Karlsruhe*, *München* und *Stuttgart* stattgefunden, in der nach eingehender Besprechung folgende *Leitsätze einstimmig* angenommen wurden:

I. Es liegt im Interesse einer allseitigen Entwicklung und Weiterbildung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen, im Interesse der Ausbildung von Lehrern auf diesen Gebieten wie im Interesse der Ausgestaltung des Unterrichtes an den Technischen Hochschulen, wenn neben den Universitäten auch die Technischen Hochschulen mit der Ausbildung von Lehramtskanditaten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen betraut werden.

II. Demgemäß werden, soweit sie noch nicht bestehen, Einrichtungen für eine volle Ausbildung der Lehramtskandidaten an den Technischen Hochschulen zu treffen sein. Diese werden sich naturgemäß dem spezifischen Charakter der Technischen Hochschule anpassen und im besonderen die in den technischen Fächern liegenden Bildungselemente heranziehen.

III. Für das Studium soll volle Freizügigkeit zwischen den deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen bestehen.

IV. Den Technischen Hochschulen ist ein ausreichender Anteil an den staatlichen Prüfungen der Lehramtskandidaten zu gewähren.

V. Die Technischen Hochschulen sollen für *alle* Lehrgebiete, in denen sie die volle Ausbildung gewähren, das Recht der Doktorpromotion erhalten. Hierbei kann die Diplomprüfung der Fachabteilungen durch eine andere gleichwertige Prüfung als Vorbedingung ersetzt werden.

VI. Eine wichtige Aufgabe der Technischen Hochschulen ist es im besonderen, für die Heranbildung der Lehrer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer an den technischen Mittelschulen Sorge zu tragen.

Über die in dem Leitsatz II ausgesprochenen Forderung, daß die Einrichtungen für die Ausbildung von Lehramtskanditaten sich dem spezifischen Charakter der Technischen Hochschulen anpassen, und im besonderen die in den *technischen* Fächern liegenden Bildungselememente herangezogen werden sollen, hatte sich die Abteilung für allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule zu *Karlsruhe* in einem Gutachten vom Nov. 1906 folgendermaßen ausgesprochen:

„Es ist von vornherein klar, daß das Lehrziel, das für die Kandidaten des höheren Lehramts bei ihrer Ausbildung an den Technischen Hochschulen zu stecken ist, nicht das gleiche sein kann wie dasjenige, welches die jetzige Lehramtsprüfung fordert. Zwar werden auch die Technischen Hochschulen auf eine gründliche Durchbildung in der niederen und in der höheren Mathematik großen Wert zu legen haben, weil kein Lehrer ohne eine solche ersprießlichen Unterricht in der Mathematik erteilen kann; sie sollen aber außerdem den bei ihnen studierenden Lehramtskandidaten eine ihrer Eigenart entsprechende Ausbildung, wie sie die Universitäten nicht bieten können, angedeihen lassen. Die Technische Hochschule wird demgemäß der *Lehrbefähigung in angewandter Mathematik*, die neuerdings in einigen Bundestaaten als gleichberechtigt zu den übrigen Lehrbefähigungen hinzugetreten ist, meist aber nur auf dem Papier steht, Leben und Bedeutung zu geben haben.

„Hierzu ist zu verlangen, daß jenen Studierenden, die sich später dem Lehramte in Mathematik und Naturwissenschaften an einer Mittelschule widmen wollen, erlaubt sei, ihre *ganze Studienzeit an einer Technischen Hochschule zu verbringen,* und weiter, daß *an der Allgemeinen Abteilung eine Lehramtsprüfung eingerichtet werde*, deren Bestehen die volle Gleichberechtigung mit dem jetzigen Lehramtsexamen verschafft.

„Die Technische Hochschule legt Gewicht darauf, daß diese Prüfung ebenso gestaltet werde wie die Diplomprüfungen in den anderen Abteilungen und würde auch für sie den Namen *Diplomprüfung* in Vorschlag bringen.

Nach einer Studienzeit von zwei Jahren findet eine *Vorprüfung* statt, die sich im wesentlichen mit der Vorprüfung an den Abteilungen für Ingenieurwesen und Elektrotechnik deckt. Die nun folgenden zwei Studienjahre sind zunächst der Vertiefung in Mathematik und Mechanik zu widmen, wozu als weiteres theoretisches Fach die mathematische Physik tritt. Doch wird für diese Fächer nicht mehr als etwa zwölf Wochenstunden im Semester beansprucht, so daß den Kandidaten noch reichlich Zeit für die Ausbildung in dem von ihm gewählten technischen Fache bleibt. Welche Vorlesungen und Übungen zu dieser Ausbildung heranzuziehen sind, ist im Einvernehmen mit der zuständigen Fachabteilung festzusetzen. Am Schluß der beiden Jahre findet die *Hauptprüfung* statt, bei der Studienarbeiten aus dem technischen Wahlfache und als Diplom-

arbeit eine wissenschaftliche Arbeit aus dem Gebiete der Mathematik, Mechanik oder Physik vorzulegen sind."

Fünfzigjähriges Dozenten-Jubiläum von Carl Neumann. Aus Anlaß der Feier der fünfzigjährigen Dozententätigkeit von Carl Neumann in Leipzig hat die Philosophische Fakultät der Universität Halle, bei der der Jubilar seine akademische Laufbahn begann, diesem eine Tabula gratulatoria gewidmet und durch Herrn Geheimrat A. Wangerin überreichen lassen. Wir bringen diese Tabula gratulatoria hier zum Abdruck und fügen bei dieser Gelegenheit gleich die Ansprache an, die Herr Geheimrat A. Wangerin zur Feier des 70. Geburtstage von Carl Neumann am 7. Mai 1902 an diesen gerichtet hat.

Quod bonum felix faustumque sit. Carolo Godofredo Neumann, Francisci filio, philosophiae doctori, scientiarum mathematicarum in universitate Lipsiensi professori publico ordinario, augustissimo Saxoniae regi a consiliis aulicis intimis, qui postquam ante hoc dimidium saeculi ab ordine philosophorum Halensi veniam docendi rite impetravit, in universitatibus Halensi Basileensi Tubingensi denique per octo lustra in Lipsiensi instituendae iuventuti academicae cum egregia laude laetissimoque successu insignem operam navavit animosque discipulorum ad optima quaeque tendentium, quorum vitam sincero veritatis atque scientiae amore imbuit, disciplina ac comitate in aeternum sibi devinxit, qui longae ac laboriosae vitae universam industriam posthabitis omnibus aliis curis uni mathematicae scientiae promovendae dedit atque sollerti ingenio prudenti constantia acuta inquirendi ratione cum omnibus fere eius scientiae partibus tum physicae doctrinae mathematicis argumentis firmandae saluberrimam lucem attulit et inde a celeberrimo libro, quo emendata Gaußii et Dirichletii argumentatione rationem potentialis quam vocant novis legibus constituit, longam perfecit quaestionum subtilissimarum seriem ea imprimis virtute praestantium, quod non ita singula sequuntur quam viam muniunt ad investigandam unam eamque universalem rationem, qua phaenomena electrica et magnetica cum eis quae a gravitatione et calore proveniunt in unum coniungantur, viro candidissimo doctissimo venerabilissimo, muneris academici cum summo honore prosperrimoque fructu gesti sacra semisaecularia die IV mensis Iunii anni MDCCCCVIII sollemniter celebranda ex animi sententia congratulatur fausta felicia fortunata omnia precatur pro vegeta eius senectute perennique corporis et animi incolumitate pia vota nuncupat academiae regiae Fridericianae Halensis cum Vitebergensi consociatae ordo philosophorum idque hac tabula ordinis sigillo munita publice professus est Franciscus Praetorius, philosophiae doctor, liberalium artium magister, linguarum orientalium professor publicus ordinarius, ordinis philosophorum hoc tempore decanus.

Ansprache an Herrn Geheimrat Carl Neumann, bei der Feier von dessen 70. Geburtstag am 7. Mai 1902 gehalten von A. Wangerin.

Hochverehrter Herr Geheimrat!

Eine große Zahl Ihrer früheren Schüler wollte den Tag, an dem Sie Ihr 70. Lebensjahr vollenden, nicht vorübergehen lassen, ohne Ihnen ihre herzlichsten Glückwünsche auszusprechen und ihrer Dankbarkeit und Verehrung für Sie

Ausdruck zu geben. Gestatten Sie mir, der Dolmetsch dieser Gefühle zu sein, die alle Ihre Schüler heute beseelen.

In voller körperlicher Rüstigkeit und bewunderswerter geistiger Frische blicken Sie, h. H. G., auf eine reiche der Wissenschaft gewidmete Tätigkeit zurück. Vorgebildet in der von Bessel, Jacobi und Ihrem unvergeßlichen Vater gegründeten Königsberger Schule, von letztgenanntem selbst in seine Wissenschaft eingeführt, während andererseits die damals noch lebendigen Jacobischen Traditionen auf Ihre Studien von Einfluß waren, haben Sie Ihr ganzes Leben der wissenschaftlichen Arbeit geweiht, sich durch nichts von der emsigen Tätigkeit in Ihrer ruhigen Studierstube abziehen lassen. Und welche reichen Früchte hat Ihre Arbeit getragen! Alle Zweige der mathematischen Physik und ein großer Teil der rein mathematischen Disziplinen sind durch Ihre Arbeiten wesentlich gefördert und bereichert. Es würde den Rahmen einer kurzen Ansprache weit überschreiten, wollte ich alles, was Sie geleistet, nach Gebühr würdigen. Gestatten Sie mir nur auf einige der markantesten Punkte kurz hinzuweisen.

Ein Gebiet, das Ihnen die größte Bereicherung verdankt, ist die Potentialtheorie. Nachdem Sie Ihre Kraft hier zuerst an speziellen Untersuchungen, an der Lösung bis dahin noch nicht behandelter Probleme erprobt, wandten Sie sich der Erörterung und Aufklärung einer hochbedeutsamen allgemeinen Frage zu, der des sogenannten Dirichletschen Prinzips, das (in etwas modifizierter Form) den Schlußsatz der berühmten Gaußschen Arbeit bildet. Mit anderen Gelehrten erkannten Sie, daß die Gaußsche und Dirichletsche Beweisführung für dieses Prinzip sich auf Annahmen stützen, deren Zulässigkeit nicht über jedem Zweifel erhaben ist. Hatten dies auch andere gleichzeitig mit Ihnen erkannt, so waren Sie doch der erste, der etwas Besseres an die Stelle jenes Prinzips setzte, und der der ganzen Behandlung der Frage neue Bahnen anwies. Durch Ihre Methode des arithmetischen Mittels gelang es Ihnen, für eine umfangreiche Klasse von Flächen die Potentialfunktion wirklich aufzustellen, nicht bloß die Existenz derselben nachzuweisen ohne klare Anschauung über ihren Bau. Und diese Ihre Arbeiten waren über die Potentialtheorie hinaus für die allgemeine Funktionentheorie von der größten Wichtigkeit; ihre Bedeutung erhellt aus der umfangreichen Literatur, die sich seit mehr als 10 Jahren an dieselbe angeschlossen hat, und die sich vorzugsweise auf Ihre Resultate stützt. Diese Forschungen zur Potentialtheorie allein sichern Ihnen einen hervorragenden Platz in der Wissenschaft.

In neuerer Zeit haben Sie dann die Theorie noch nach einer andern Richtung erweitert, indem Sie an Stelle des Newtonschen Gesetzes Ihr Exponentialgesetz setzten und dessen Eigenschaften insbesondere hinsichtlich der Existenz eines elektrostatischen Gleichgewichts untersuchten und damit die Theorie der Fernwirkungen in möglichst großer Allgemeinheit entwickelten. Es sei hier auch einer Ihrer früheren Arbeiten gedacht, die aus der Annahme, daß die Fernwirkung zu ihrer Verbreitung Zeit gebraucht, die weiteren Folgerungen zog. Alle Ihre Untersuchungen über die Frage der Fernwirkung tragen einen entschieden konstruktiven Charakter, indem der jedesmaligen Betrachtung eine geringe Anzahl einfach und deutlich ausgesprochener Prämissen zugrunde gelegt wird, von denen aus die Erscheinungen mit mathematischer Konsequenz konstruiert werden. Diesen konstruktiven Charakter besitzen auch Ihre zahlreichen Arbeiten über Elektrodynamik, die gerade dadurch für uns Mathematiker

in einem erfreulichen Gegensatz stehen zu dem deskriptiven Verfahren in den Arbeiten vieler neuerer Physiker. Und noch ein anderes ist es, was uns in Ihren Arbeiten auf dem genannten Gebiete so klar entgegentritt: das ist, daß es Ihnen nicht sowohl auf die Erlangung einzelner spezieller Resultate ankommt, daß Sie vielmehr Ihre Studien auffassen als Vorbereitung für die Erforschung eines universalen Prinzips, durch welches die elektrischen und magnetischen Erscheinungen mit denen der Gravitation und denen der Wärme zu einem einheitlichen Ganzen sich verbinden. Wird es zur Erreichung dieses Ihnen vorschwebenden Zieles auch einer langen Zeit, vielleicht vieler Menschenalter bedürfen: das Ziel klar ausgesprochen und den Weg zu demselben, soweit es bei unsern heutigen Kenntnissen der Naturvorgänge und unsern heutigen Forschungsmitteln möglich ist, geebnet zu haben, ist ein nicht hoch genug zu veranschlagendes Verdienst.

Es würde mich zu weit führen, wollte ich auch Ihrer vielen Arbeiten in andern Gebieten in derselben Weise gedenken; ich werde mich mit einem Hinweise begnügen und erwähne nur kurz Ihre Studien zur Wärmetheorie, die vorzugsweise die Aufhellung gewisser prinzipieller Schwierigkeiten zum Ziel haben, Ihre optischen Arbeiten (magnetische Drehung der Polarisationsebene, Ätherbewegung in Kristallen unter der Annahme der Inkompressibilität und die kleine weit verbreitete Schrift über die Linsentheorie), Ihre Untersuchungen zur Hydrodynamik sowie Ihre Arbeiten über Mechanik starrer Körper, die teils verschiedene neue Probleme behandelt haben, teils der Klärung, Erläuterung und Erweiterung der allgemeinen Prinzipien gewidmet waren. Auch die Geometrie und die Algebra verdanken Ihnen manche Bereicherung. Vor allem aber ist noch Ihrer Verdienste um die Funktionentheorie zu gedenken. Zum Teil hängen diese ja mit Ihren Untersuchungen über Potentialtheorie zusammen, doch möchte ich noch folgende Einzelheiten hervorheben. Sie haben u. a. zuerst die Entwicklung einer komplexen Funktion nach Kugelfunktionen klargelegt, haben dann weiter als erster die Ringfunktionen (ohne diesen Namen zu benutzen) eingeführt, die Mehlerschen Kegelfunktionen genauer studiert, zur Ausbildung der Theorie der Zylinderfunktionen wesentliche Beiträge geliefert, endlich die Konvergenz der nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen in eigenartiger Weise eingehend untersucht. Und zum Schluß sei Ihrer Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen und der damit zusammenhängenden funktionentheoretischen Arbeiten gedacht.

Nur ein schwaches Bild kann meine Aufzählung von Ihren Verdiensten um unsere Wissenschaft geben. Ich kann mich aber darauf berufen, daß diese Verdienste von allen Fachgenossen anerkannt werden. Auch äußere Ehren sind Ihnen reichlich zuteil geworden. Höher als alles dies steht Ihnen das Bewußtsein, die Wissenschaft erheblich gefördert und andere zu wissenschaftlichen Arbeiten angeregt zu haben. Und eine solche Anregung haben Sie nicht allein durch Ihre Publikationen gegeben. Neben Ihrer Tätigkeit als Gelehrter ging einher die als Dozent. Eine zahlreiche Schar von Jünglingen haben Sie an vier Universitäten in die Wissenschaft eingeführt und zu wissenschaftlichem Arbeiten vorbereitet. Als einer der ältesten Ihrer Schüler kann ich bezeugen, wie gern schon vor 40 Jahren Ihre Collegia von allen Mathematikern gehört wurden, wie alle an Ihnen hingen, welchen Nutzen sie aus jeder Vorlesung nach Hause brachten. Und so ist es bis heute geblieben.

Aus dem größten Teil der jungen Leute, die seit 44 Jahren zu Ihren Füßen gesessen, sind Männer geworden; aber die Verehrung und Dankbarkeit für Sie sind geblieben; und diesen heute Ausdruck zu geben, war uns Bedürfnis.

[An diese Ansprache schloß sich die Überreichung einer Stipendienstiftung sowie eines Albums mit den Photographien vieler früherer Schüler C. Neumanns an.]

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzgebieten. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kraepelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. 101. Ausgabe. Abgeschlossen im April 1908. [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8°.

Die 101. Ausgabe des Teubnerschen Katalogs ist dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom gewidmet und dementsprechend ist ihm in sinniger Weise das Bildnis Galileis als Titelbild beigegeben worden. Es ist ein stattlicher Band, der die 100. Ausgabe, mit der die Teilnehmer des Heidelberger Kongresses 1904 erfreut wurden, durch seinen Umfang und Inhalt weit übertrifft.

Hochinteressant und lehrreich ist, auch vom wissenschaftlichen Standpunkte, eine sehr ausführliche „Einführung", in der die Verlagsbuchhandlung ein Bild davon entwirft, wie sich die mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Seite ihrer Betätigung in steter Bezugnahme zu den Fortschritten in Wissenschaft und Schule entwickelt hat. Diese Einführung liest sich wie ein kurzer Abriß der Geschichte der wissenschaftlichen Forschung und ihres Unterrichts, und man gewinnt dadurch den lebendigen Eindruck, in wie hervorragender Weise die Firma Teubner bestrebt ist, mit dem Fortgange der Wissenschaft in Fühlung zu bleiben und ihn in ihrer Weise zu fördern. „Besonders die Mathematiker haben allen Grund, dieser Verlagsbuchhandlung für das Wohlwollen dankbar zu sein, mit dem sie seit einem halben Jahrhundert alle Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Mathematik fördert. Die Geschichte der deutschen Mathematik wird ihrer Leistungen stets eingedenk bleiben, weil ohne die tatkräftige Unternehmungslust der Firma viele Schriften nicht in die Öffentlichkeit gekommen, viele andere ohne ihre Anregung überhaupt nicht verfaßt worden wären". (E. Lampe in einer Besprechung der 100. Ausgabe, Naturwissenschaftliche Rundschau 1905, Nr. 17.)

An die Einführung schließen sich an eine Übersicht über die unter der Presse und in Vorbereitung befindlichen Werke, ein systematisch geordnetes Verzeichnis, ein Stichwortregister, ein alphabetisch geordnetes Verzeichnis und — mit besonderer Paginierung — auf 52 Seiten ein „Gedenktagebuch für Mathematiker" von Felix Müller. Diese Anordnung ist entschieden angenehmer und übersichtlicher als die der 100. Ausgabe. Ist die 101. Ausgabe des Katalogs schon durch die „Einführung" und das imponierende Bild von der umfassenden

Tätigkeit des Hauses B. G. Teubner weit über die Bedeutung der üblichen Verlagsverzeichnisse emporgehoben, so ist ihr durch das Müllersche Gedenktagebuch noch ein besonderer dauernder Wert verliehen worden. G.

Dr. Ing., Dr. phil. **Heinz Egerer,** Diplomingenieur, **Repetitorium der höheren Mathematik.** (Lehrsätze, Formeln, Tabellen.) [VIII u. 351 S.] München 1908, R. Oldenbourg.

Aus den vom Verfasser geleiteten Vorbereitungskursen für das Ingenieur-Hochschulexamen entstanden, wendet sich das vorliegende Repetitorium vor allem an die, denen die höhere Mathematik eine Hilfswissenschaft ist. Ob und inwieweit es diesem Zwecke zu dienen geeignet ist, mag hier unerörtert bleiben; darüber haben die in Betracht kommenden Kreise zu entscheiden.

Für den Mathematiker kann das Buch jedenfalls nicht in Betracht kommen, dazu müßte es zunächst einer sehr eingehenden Durch- und Überarbeitung unterzogen werden. Es sei zum Beweise hierfür nur z. B. hingewiesen auf die Erklärung der konvergenten Zahlenfolge (S. 32, 1), auf die Erklärung der Stetigkeit einer Funktion (S. 32, 4), auf die Äußerung über die Potenzreihe (S. 40—41), wo der Index n in der Summe der unendlichen Reihe erscheint, und wo es weiter von der Potenzreihe heißt: „Ihr Konvergenzkriterium ist $|x| < \lim_{n=\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$." Ferner sei der Satz S. 41, 9 herausgegriffen: „Eine Funktion von x kann stets in eine Potenzreihe entwickelt werden, aber nur in eine einzige." Der Satz über n homogene lineare Gleichungen mit n Unbekannten S. 60—61, 5 ist in der angegebenen Form direkt irreführend. Mißglückte Ausdrücke kommen nicht selten vor, z. B. wird gelegentlich „Gleichung" gesagt, wo es „Funktion" heißen müßte u. ä. S. 62, 4 steht z. B. der Satz: „Die graphische Darstellung der Gleichung $G(x) = 0$ ist eine Parabel n^{ter} Ordnung". Usf.

Der Stoff ist in 13 Kapitel gegliedert: I. Längen-, Flächen und Volumenberechnungen. II. Elemente der Trigonometrie. III. Elemente der niederen Algebra und Analysis. IV. Elemente der Differentialrechnung. V. Elemente der Integralrechnung. VI. Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. VII. Elemente der Diskussion ebener Kurven. VIII. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung. IX. Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. X. Elemente der Theorie der Flächen und Raumkurven. XI. Differentialgleichungen. XII. Elemente der Vektorenrechnung. XIII. Tafeln. G.

Heinrich Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Dritte, durchgesehene und vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1908. Verlag von Veit & Comp. geh. ℳ 7.—

Fast genau zehn Jahre nach dem Erscheinen der ersten Auflage der Burkhardtschen Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen ist die dritte Auflage zur Ausgabe gelangt, und man darf schon in dieser Tatsache den Beweis dafür erblicken, daß dieses Buch einem lebhaften Bedürfnisse entgegengekommen ist und namentlich auch unter den Studierenden der Mathematik weite Verbreitung gefunden hat.

Im ganzen stimmt die neue Auflage mit der zweiten vom Jahre 1903 überein, auch sind trotz einiger Änderungen die Nummern der Paragraphen

nicht geändert worden. Diese Änderungen bestehen insbesondere in der Vermehrung der Beispiele konformer Abbildungen und in der Diskussion der zyklometrischen Funktionen komplexen Arguments. Der Verfasser hat durch diese Erweiterungen sein Buch in sehr erwünschter Weise bereichert.

G.

M.-Fr. Daniëls, Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives. [Collectanea Friburgensia. Publications de l'Université de Fribourg (Suisse). Nouvelle série, fas. VIII (17me de la collection).] [280 S.] Fribourg 1907, Librairie de l'Université. Fr. 8.—

Vorliegende Schrift bildet eine systematische Anwendung der neuen sphärischen Koordinaten, die der Verfasser in mehreren Aufsätzen, z. B. Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, 5. Band, bekannt gemacht hat, insbesondere auf sphärische Kreise und Kegelschnitte. Anwendungen auf Kurven höherer Ordnung und auf die Kugelteilung sollen später folgen. Da sich das Interesse neuerdings mehrfach der lange vernachlässigten Sphärik wieder zugewandt hat, sei auf das Daniëlssche Buch ganz besonders hingewiesen. G.

Hans Brandes, Über die axiomatische Einfachheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes. Mit einer Figurentafel. [52 S.] 8⁰. I.-D. Halle 1908, Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Die vorliegende Dissertation entstand auf Anregung von Herrn F. Bernstein und unter der Leitung von Herrn A. Gutzmer. Der Autor faßt zunächst die — unleugbaren — Mängel der Lemoineschen geometrographischen Beurteilung der Einfachheit einer Konstruktion in die zwei Sätze zusammen, daß (1) die Maßelemente ungleichartig, (2) die Resultate nicht endgültig sind. Hierauf definiert der Verfasser die „axiomatische Einfachheit" dahin, daß unter einer Gruppe von Beweisen desselben Satzes, die alle mit Benutzung der Axiome $a_1, a_2, \cdots a_n$ geleistet werden, derjenige bezüglich des Axioms a_x der einfachste sei, der bei einer beliebig häufigen Verwendung der übrigen $n-1$ Axiome die geringste Zahl der Anwendungen des Axioms a_x benötigt. Bestimmt man für jedes der n Axiome den „einfachsten" Beweis, so ist es möglich, daß diese n verschiedenen Beweise miteinander identisch sind. Dieser Beweis heißt dann der „absolut einfachste".

Diese Begriffe sind nun einer exakten Behandlung zugänglich, und es wird streng bewiesen, daß bei bloßer Anwendung des ebenen Kongruenzaxioms und bei Ausschluß der Subtraktion, eine Zerlegung des Hypotenusenquadrates in mindestens 7 Dreiecke nötig ist zum Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes für beliebige rechtwinklige Dreiecke. Ein solcher Beweis ist der von An-Nairîzî (um 900 n. Chr.) angegebene, der z. B. in J. Tropfkes *Geschichte der Elementarmathematik*, II. Bd., Leipzig 1903, S. 73 zu finden ist. Ob es noch andere solche Zerlegungen gibt, hat der Verfasser nicht abschließend untersucht. Man kann aber hinzusetzen, daß bis heute keine existiert. Denn die von G. A. Göpel im Archiv Math. **4**, 1844, S. 237 gegebene Beweisanordnung ist ja mit der Zerlegung des An-Nairîzî identisch, nur weniger übersichtlich.

Am Schlusse der Arbeit werden einige singuläre Fälle besprochen, Zerlegungsbeweise, die nur für rechtwinklige Dreiecke mit bestimmtem Kathetenverhältnis gelten. Die Absicht des Verfassers, auch noch andere Beweise bzw.

Konstruktionen auf ihre axiomatische Einfachheit hin untersuchen zu wollen, ist lebhaft zu begrüßen. Wir wollen auch noch anmerken, daß Herr F. Bernstein über denselben Gegenstand in Rom auf dem IV. Int. Math.-Kongreß einen Vortrag hielt.

Speyer. H. WIELEITNER.

M. Stuyvaert, Cinq études de géométrie analytique. [230 S.] 8°. Bruxelles 1907, Hayez.

Für die vorliegenden „Studien", die zuerst in den Mém. Soc. Sc. Liège (3) 7, 1907 erschienen, erhielt der Verfasser, zusammen mit seiner Dissertation „*Études de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre*" (Gand 1902, Hoste) von der Kgl. Belgischen Akademie den Preis François Deruyts für höhere Geometrie zuerteilt. In seinem Vorworte sagt der Verfasser selbst, er hätte, wäre nicht seine Abneigung gegen Neologismen, der Arbeit den Titel „Hyperelimination" geben können. Denn insbesondere die ersten drei Studien befassen sich mit den Bedingungen, daß zwei Gleichungen mehr als eine gemeinsame Wurzel haben, also mit der Untersuchung von verschwindenden Matrizen, soweit die algebraischen Tatsachen eine geometrisch interessante Deutung zulassen.

Ohne auf Einzelheiten der mannigfachen Untersuchungen eingehen zu können, wollen wir doch eine Übersicht des Hauptinhaltes der Studien geben. Die I. Abhandlung erläutert die Theorie und gibt Anwendungen auf eine ganze Reihe algebraischer Raumkurven. Die Resultate sind zwar vielfach nicht neu und wurden insbesondere von G. Z. Giambelli mittels abzählender Methoden, andere auch von Th. Reye, K. Doehlemann, H. E. Timerding u. a. auf synthetischem Wege oder mit Hilfe der Abelschen Funktionen schon früher aufgestellt. Es ist aber gewiß dankenswert, daß die verschiedenartigen Untersuchungen hier unter dem algebraischen Gesichtspunkt vereinigt werden. Auch die Jacobische Kurve eines Netzes von Flächen wird in der Matrixdarstellung behandelt. Sind die Elemente der Matrizen Funktionen mehrerer Reihen von Veränderlichen, so läßt sich eine Theorie der Kongruenzen algebraischer Mannigfaltigkeiten von $d - 3$ Dimensionen in einem Raume von $d - 1$ Dimensionen, insonderheit von Raumkubiken im gewöhnlichen Raume ableiten. Das ist der Gegenstand der II. Studie. Im III. Abschnitt werden die Untersuchungen auf 5 (und n) homogene Variable ausgedehnt und insbesondere die Hyperquadrik des 5-dimensionalen Raumes, d. i. die Theorie des gewöhnlichen Linienraumes, untersucht.

Die IV. und V. Studie schließen nicht direkt an die vorhergehenden an. In der vierten wird eine Form φ betrachtet mit zwei Reihen von je zwei homogenen Veränderlichen, die quadratisch und symmetrisch ist in bezug auf die beiden Reihen. Davon werden Anwendungen gemacht auf das System zweier Kegelschnitte in einer Ebene und auf Flächen vierter Ordnung mit einer Raumkubik als Doppelkurve. Die Theorie der Form φ, die nur jetzt nicht mehr symmetrisch ist, wird in der letzten Studie benutzt, um Steinersche Vierecke auf gewissen Kurven und Flächen zu untersuchen. Die ebenen binodalen Quartiken, denen Vierecke eingeschrieben werden können mit zwei Diagonalpunkten in den beiden Knoten, nennt der Verfasser „karriert" (quadrillées). Die Untersuchungen werden sodann ausgedehnt auf ebene Gebilde vierter Ordnung mit drei und vier Doppelpunkten, auf Raumquartiken und Flächen vierter Ordnung,

im besonderen die Steinersche Fläche, die Fläche vierter Ordnung mit doppelter Raumkubik und die mit zwei Doppelgeraden. Am Schlusse folgt eine Anwendung auf gewisse Aufgaben der graphischen Integration, die wie die Idee zur letzten Abhandlung überhaupt von J. Massau angeregt worden war.

Reichen Inhaltes und beachtenswert durch die angewandte Methode verdienen die im vorstehenden kurz gekennzeichneten Studien auch in Deutschland eingehender gewürdigt zu werden.

Speyer. H. Wieleitner.

Dr. **Karl Doehlemann,** Professor an der Universität München. **Geometrische Transformationen.** II. Teil: Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen. Mit 84 Figuren [VIII u. 328 S.] Leipzig 1908, G. J. Goeschen. Sammlung Schubert Bd. XXVIII.

Im ersten Teile meiner „Geometrischen Transformationen" (Leipzig 1902) habe ich die Kollineation und die Korrelation für die Grundgebilde aller Stufen, also kurz die projektiven Verwandtschaften nebst ihren Anwendungen in den verschiedensten Gebieten behandelt. Im langen Abstande von 6 Jahren folgt hiermit der zweite Band, der die quadratischen und höheren birationalen Punkttransformationen erledigt. Der Haupttitel „Geometrische Transformationen" soll auch hier wieder bedeuten, daß ich die betrachteten Verwandtschaften als ein Mittel geometrischer Untersuchungs-Methode auffasse und sie in erster Linie für geometrische Zwecke ausbeute. Deswegen blieben auch alle jene Verwandtschaften unberücksichtigt, welche wie beispielsweise die Berührungstransformationen im letzten Grunde doch der Lösung analytischer Probleme dienen. Überdies mußte auch mit einem gewissen Umfange des Buches gerechnet werden und aus diesem Grunde manche Betrachtung wegbleiben, so z. B. die der mehrdeutigen Abbildungen von Ebenen und Räumen und der höheren Korrespondenzen und Involutionen auf den rationalen Kurven.

Nächst der kollinearen Beziehung ist die quadratische Transformation die wichtigste und anwendungsreichste Verwandtschaft. Indem man dieselbe durch zwei Paare projektiver Strahlenbüschel geometrisch erzeugt, gewinnt man den Anschluß an die projektive Beziehung der Grundgebilde erster Stufe. Daran schließen sich allgemeinere Erzeugungsweisen der quadratischen Transformation und eine geometrische Betrachtung über die Auflösung von Kurven-Singularitäten. Benutzt man als Fundamentalpunkte die unendlich fernen Kreispunkte, so erhält man aus der allgemeinen quadratischen Transformation die Inversion oder Transformation durch reziproke Radien, welche ausführlich erörtert wird. Ein Beispiel für die Anwendung der Inversion bilden die anallagmatischen Kurven. Auch die Apparate zur mechanischen Herstellung einer Inversion werden kurz beschrieben. Die Einführung komplexer Variabeln gibt dann einen naturgemässen Übergang zu den Kreisverwandschaften und den durch eine Funktion einer komplexen Variabel vermittelten konformen Abbildungen. Eine Theorie der allgemeinen Cremonaschen Transformationen in der Ebene, verbunden mit einem Ausblick auf neuere Untersuchungen, periodische Transformationen und endliche und kontinuierliche Gruppen von Transformationen, beschließt diesen ersten Abschnitt.

Der zweite Abschnitt behandelt die birationalen Punkt-Transformationen im Raume. Die einfachste derartige Verwandschaft nach der Kollineation ist die quadratische, deren inverse wieder vom zweiten Grade ist. Sie führt sofort

zur Abbildung der Fläche zweiter Ordnung auf eine Ebene und liefert spezialisiert die stereographische Projektion sowie die Inversion im Raume. Die allgemeinen Zykliden ergeben sich als anallagmatische Flächen. Weiter wird dann noch die durch drei bilineare Gleichungen bestimmte beiderseits kubische Verwandtschaft untersucht, welche die Abbildung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung liefert. Allgemeinere Betrachtungen beschließen diesen Abschnitt.

München, 15. Juni 1908. KARL DOEHLEMANN.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2., sorgfältig durchgesehene und erweiterte Auflage in 2 Bänden. I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren im Text. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. IX, 1. [X u. 410 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Gelegentlich der zweiten Auflage ist das Buch in zwei Bände geteilt worden, deren erster, Wahrscheinlichkeitstheorie, Ausgleichungsrechnung und Kollektivmaßlehre umfassend, demnächst erscheinen wird. — Bei der Bearbeitung dieser Neuauflage habe ich mancherlei Neuerungen im einzelnen getroffen, die mir förderlich schienen, so die Darstellung der Wahrscheinlichkeitssätze in Form von Funktionalgleichungen, die Heranziehung des Begriffs der relativen Wahrscheinlichkeit, der Mengenlehre. Des weiteren war ich darauf bedacht, die Grundfragen, welche die philosophische Seite des Gegenstandes betreffen, tiefer zu fassen. Ein Kapitel über die Kollektivmaßlehre, die, von G. Th. Fechner begründet, durch die neueren Arbeiten von G. F. Lipps und H. Bruns wesentlich gefördert wurde, durfte nicht mehr fehlen; ich habe die theoretischen Grundlagen dieses jüngsten Zweiges so knapp als möglich dargestellt, hingegen auf die praktische Anwendung durch Vorführung mehrerer, darunter auch größerer Beispiele vorzubereiten gesucht. — Im übrigen glaubte ich an diesem ersten Teile keine weitergreifenden Änderungen vornehmen zu sollen und mich auf sorgfältige Revision von Text und Formeln beschränken zu dürfen.

Wien. E. C.

J. Thomae, Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Mit 10 Textfiguren. [182 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Der Verfasser hat im Jahre 1875 (Halle bei Nebert) eine Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale herausgegeben. Darin beschäftigt er sich eben wesentlich mit der Theorie. In den Vorlesungen kann natürlich die Theorie auch nicht entbehrt werden, aber es sind doch nun mehr die Integrale selbst, die von lange her das Interesse der Mathematiker erregt haben, die zum Vortrag gelangen. Daran schließt sich naturgemäß die Entwicklung in Fouriersche Reihen, die ja mit den bestimmten Integralen so nahe zusammenhängen. — Die einfachen Integrale sind streng arithmetisch behandelt. Bei den Doppelintegralen hingegen verschmäht der Verfasser graphische Darstellung nicht, glaubt aber auch so hinreichend streng zu sein. — In demselben Verlage erschienen Kroneckers Vorlesungen über denselben Gegenstand. Da aber Kronecker das Bolzanosche Schlußverfahren nicht für bindend hält, so

tragen seine Vorlesungen ein andres Gepräge und machen eine Darstellung, die sich auf jenes Verfahren stützt, nicht überflüssig.

Jena. J. THOMAE.

R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. I. Band: Kurventheorie. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. XXVIII, 1. [VI u. 368 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Diese Vorlesungen erstrecken sich über die wichtigeren Teile der Differentialgeometrie der einzelnen ebenen Kurve, der Scharen von Kurven in einer Ebene und der einzelnen Raumkurve. Besonderes Gewicht wird auf die Untersuchung solcher Fragen gelegt, die in den gebräuchlichen Darstellungen stiefmütterlich behandelt zu werden pflegen wie z. B. der Lehre von den sogenannten singulären Punkten einer Kurve, der Berührenden und der Einhüllenden einer Schar sowie der Striktionslinie einer Schar. Durch die Methode der Ableitungen nach Bogenlängen gewinnt die analytische Behandlung der Scharen ebener Kurven an Einfachheit und Übersichtlichkeit, und die Verwendung kinematischer Gesichtspunkte gestattet es, neuere Untersuchungen über solche Scharen zu ergänzen und zu erweitern. In der Theorie der Raumkurven wird die Verwendung der Kinematik ausführlich dargelegt. Eingehend durchgeführte Beispiele sind den theoretischen Erörterungen hinzugefügt.

München. R. v. LILIENTHAL.

W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. Band III. Mit 75 Figuren im Text. [XIV u. 396 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das Werk ist entstanden durch Zusammenarbeitung mehrerer vor einigen Jahren an der Göttinger Universität gehaltenen Vorlesungen. Es geht über diesen Bereich aber noch hinaus, einmal durch ausführliche theoretische Darstellung einiger seinerzeit nur andeutungsweise behandelter Kapitel (wie z. B. des magnetischen Kerr-Effektes und der elektrischen Doppelbrechung in azentrischen Kristallen); sodann durch Einfügung aller der schönen seit jenen Vorlesungen gemachten Entdeckungen (z. B. des von J. Becquerel aufgefundenen Zeeman-Effektes an Kristallen). Durch das Entgegenkommen mehrerer auswärtigen Forscher ist es möglich gewesen, eine große Zahl von charakteristischen Erscheinungen durch Reproduktionen nach Orignalphotogrammen zu veranschaulichen. Die zur Darstellung theoretischer Resultate dienenden Kurven sind sämtlich mit Hilfe berechneter Zahlen konstruiert, nicht nur schematisch gezeichnet.

Inhalt und Anordnung des Buches erhellt aus den Überschriften der zehn Kapitel: Der Faraday-Effekt; Der Zeeman-Effekt; Die Theorie der magnetooptischen Effekte für isotrope Körper; Versuch einer Theorie der komplizierteren Zeeman-Effekte; Magnetooptische Effekte an absorbierenden Kristallen; Der magnetooptische Kerr-Effekt; Die Elektronentheorie des magnetischen Kerr-Effektes; Elektrooptische Wirkungen in isotropen und kristallinischen Körpern; Die Schwingungen gebundener Elektronen bei Einwirkung eines elektrischen Feldes; Die Elektronentheorie der elektrooptischen Effekte.

Göttingen. W. VOIGT.

K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen. I. Halbband [ca. 25 Bogen.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Die in diesem Werke gegebene neue Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen beruht auf der Tatsache, daß es möglich ist, alle rationalen und alle algebraischen Zahlen in konvergente Potenzreihen zu entwickeln, welche genau wie die entsprechenden Reihen der Funktionentheorie nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen einer beliebigen Primzahl p fortschreiten. Diese eindeutig bestimmten Reihen sind nun so beschaffen, daß jede zwischen solchen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ bestehende rationale Gleichung

$$f(\alpha, \beta, \ldots \gamma) = 0$$

mit rationalen Koeffizienten dann und nur dann ihrer Größe nach gilt, wenn sie auch „für den Bereich dieser Primzahl p erfüllt ist", d. h. wenn ihre linke Seite durch jede noch so hohe Potenz von p teilbar ist, sobald man für α, $\beta, \ldots \gamma$ genügend hohe Näherungswerte der ihnen gleichen Potenzreihen einsetzt. Jede rationale Gleichung zwischen bestimmten algebraischen Zahlen oder jedes System von solchen Gleichungen liefert einen *algebraischen* Satz, und umgekehrt kann fast jeder derartige Satz als die Interpretation eines solchen Gleichungssystemes ausgesprochen werden. Ebenso ergibt jedes Gleichungssystem für den Bereich einer reellen Primzahl eine *arithmetische* Wahrheit, und die ganze Arithmetik der algebraischen Zahlen ist nichts anderes als die Interpretation aller zwischen jenen Zahlen für den Bereich aller reellen Primzahlen bestehenden Gleichungen. Aus der oben angegebenen Tatsache folgt nun, daß jedem algebraischen Satze auch eine arithmetische Wahrheit entspricht und umgekehrt. — Auf dieser Grundlage ergibt sich eine völlig einheitliche Theorie der algebraischen Zahlen, welche genau in derselben Weise einfach und ausnahmslos dieses Gebiet beherrschen lehrt, wie dies bei der Theorie der algebraischen Funktionen durch die Vermittelung der dieselben charakterisierenden Potenzreihen geschieht. Jede algebraische Zahl n^{ter} Ordnung besitzt für den Bereich einer jeden Primzahl p genau n und nur n solche konvergente Entwickelungen, welche sich entsprechend der Natur von p von selbst in Zyklen konjugierter Reihen genau ebenso anordnen, wie dies für die algebraischen Funktionen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes der Fall ist. — Bei dieser Darstellung erledigen sich alle, auch die kompliziertesten Fragen der Teilbarkeit genau ebenso einfach, wie bei den algebraischen Funktionen, ohne daß jemals Ausnahmefälle der Theorie Schwierigkeiten bereiten. Wörtlich dieselben Untersuchungen führen endlich zur Erkenntnis der zwischen den algebraischen Zahlen ihrer Größe nach bestehenden Beziehungen und damit zu der Theorie der algebraischen Einheiten.

Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende. Herausgegeben von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin. In Bändchen zu je 8—9 Bogen. 8. geh. und in Leinwand geb. Leipzig, B. G. Teubner.

Die Entwicklung der modernen Technik drängt auf stärkere Heranziehung der mathematischen Methoden. Der Ingenieur indessen, welcher bereit ist, sich mit dem nötigen Rüstzeug zu versehen, sieht sich vergeblich nach kurzen Darstellungen um, die geeignet wären, ihn schnell in das besondere Gebiet, das ihn gerade interessiert, einzuführen. — Diese Lücke will vorliegende

Sammlung ausfüllen. Sie setzt sich zum Ziel, dem Ingenieur Schriften zu bieten, welche auf etwa 100 Seiten für ein eng begrenztes Gebiet die mathematischen Methoden einfach und leichtfaßlich ableiten und deren Verwendbarkeit in den einzelnen Teilen von Physik und Technik aufdecken. Dabei kann Vollständigkeit der Beweisführung, die vom Standpunkte wissenschaftlicher Strenge erstrebenswert wäre, hier nicht erwartet werden. Vielmehr wird besonderer Wert darauf gelegt, Dinge, die für die Anwendungen von Wichtigkeit sind, nicht zugunsten wissenschaftlicher Strenge zurücktreten zu lassen. Die Darstellung der einzelnen Gebiete wird so gehalten sein, daß jede ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet.

Bisher erschienen:

I. **Einführung in die Theorie des Magnetismus.** Von Dr. E. Gans, Privatdozenten an der Universität Tübingen. Mit 40 Textfig. [VI u. 110 S.] 1908.

Die Maxwellsche Theorie findet in den Kreisen der Physiker und Techniker immer weitere Verbreitung. Will man die Theorie des Magnetismus, ein Spezialgebiet der Maxwellschen Theorie, übersehen, so muß man heutzutage mehr als die Maxwell-Faradayschen Grundbegriffe kennen.

Die hierzu nötigen Kenntnisse zu vermitteln, ist die Aufgabe des vorliegenden Buches. Es ist Wert darauf gelegt worden, die theoretischen Ableitungen so einfach wie irgend möglich zu gestalten, durch Literaturangaben in Fußnoten den Leser zum Studium der Originalarbeiten anzuregen, durch Hinweis auf Experimente und Messungen den praktischen Nutzen der Theorie anzudeuten.

Vor allen Dingen ist darauf geachtet worden, die Theorie des permanenten Magnetismus als Spezialfall der Theorie des Ferromagnetismus darzustellen, wie der moderne Elektrotechniker es verlangt. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, die Bedingungen der Permanenz genauer zu formulieren und diesem Teile der Lehre vom Magnetismus die Stelle in der Theorie anzuweisen, die ihm tatsächlich gebührt. R. Gans.

II. **Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln.** Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Textfiguren. [IV u 109 S.] 1908.

Der Gegenstand dieser Abhandlung ist die Untersuchung der für den Techniker wichtigen nichtstationären elektromagnetischen Vorgänge in Freileitungen und Kabeln, wie sie z. B. durch Schaltmanipulationen oder durch atmosphärische Vorgänge hervorgerufen werden. Die Leitung wird als ein Gebilde mit gleichmäßig über die Länge verteilten Leitungskonstanten (Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand) betrachtet, und der zeitliche Ablauf und die räumliche Verteilung der Ausgleichsströme und Ausgleichsspannungen untersucht, unter deren Vermittlung ein gegebener Anfangszustand in den stationären Zustand übergeht, der den Nebenbedingungen des Problems entspricht. Die allgemeinen Entwicklungen werden auf eine Reihe besonderer Fälle angewendet, die für die Praxis elektrischer Kraftübertragungen von Interesse sind. Dadurch ergeben sich schließlich Gesichtspunkte für die zweckmäßige Ausführung und Anordnung von Schutzapparaten gegen die während des Ausgleichsvorgangs auftretenden Überspannungen. Besondere Sorgfalt wurde auf die Veranschaulichung der auf mathematischem Wege entwickelten Ergebnisse durch Abbildungen und Kurven verwendet. K. W. Wagner.

III. **Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdozenten an der Universität Breslau. Mit einem Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] 1908.

Der Aufforderung des Herausgebers dieser Sammlung, eine Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus zu schreiben, bin ich zunächst nicht ohne Bedenken, schließlich aber doch guten Mutes gefolgt. Denn ich bin in der Tat der Überzeugung, daß trotz der großen

Anzahl hervorragender Lehrbücher über diese Theorie ein Buch, welches eine möglichst einfache Einführung in die Grundlagen derselben gibt, nicht überflüssig ist; das ist wenigstens die Erfahrung, die mich meine akademische Lehrtätigkeit hat machen lassen.

Demgemäß habe ich mich bemüht, mit den einfachsten Mitteln eine möglichst durchsichtige Darstellung des Faraday-Maxwellschen Gedankenkreises zu geben; die zum Verständnis notwendigen mathematischen Vorkenntnisse sind auf ein Minimum reduziert. So habe ich auf die Benutzung der Symbole der Vektoranalysis verzichtet, weil ich deren Kenntnis in dem Kreise, an den sich diese Schrift wendet, nicht allgemein voraussetzen durfte; ebenso habe ich die Greenschen Sätze und Stokes' Theorem unterdrückt und die Eindeutigkeitsbeweise fortgelassen. Was dadurch an Strenge etwa verloren ging, hoffe ich an Anschaulichkeit gewonnen zu haben.

Die Darstellung zerfällt in 5 Kapitel. Das erste behandelt die elektrostatischen Phänomene, das zweite die Gesetze der Magnetostatik. In den Kapiteln 3 und 4 (Elektromagnetismus und Induktion) dringt die Darstellung zu den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen vor; im fünften Kapitel endlich werden sie auf die für die Maxwellsche Theorie charakteristischen Phänomene, die elektrischen Wellen in Isolatoren und Leitern angewendet, unter besonderer Berücksichtigung der elektromagnetischen Lichttheorie.

Für die Wahl dieser Reihenfolge, die einigermaßen mit der historischen Entwicklung übereinstimmt, waren mir lediglich Gründe didaktischer und pädagogischer Natur maßgebend; sie bestimmten mich insbesondere, die Herleitung der magnetischen Feldgrößen an das Feld permanenter Magnete, statt an das Feld elektrischer Ströme anzuschließen. Wenn es auch keinem Zweifel unterliegt, daß für den Systematiker der zweite Weg der empfehlenswertere ist, so habe ich doch andererseits die Überzeugung, daß die hier gewählte Darstellung, die ja früher allgemein üblich war, anschaulicher ist. Ich konnte mich dabei um so kürzer fassen, als ich einerseits auf der von Hertz und Heaviside hervorgehobenen Analogie zwischen elektrostatischen und magnetostatischen Größen fußte, andererseits aber die Theorie des Magnetismus einem besondern Bande dieser Sammlung vorbehalten ist.

Cl. Schaefer.

Unter der Presse befinden sich für diese Sammlung:

Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, und F. Emde, Ingenieur in Berlin.

Die Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin.

In Vorbereitung:

Grundlagen des Schiffbaues. Von O. Alt, Diplom-Ingenieur in Kiel.

Gastheorie. Von Dr. A. Byk, Privatdozenten an der Universität und Technischen Hochschule zu Berlin.

Die mathematischen Instrumente. Von Dr. A. Galle, Professor am geodätischen Institut bei Potsdam.

Potentialtheorie. Von Privatdozenten Dr. R. Gans in Tübingen.

Schwingungsprobleme. Von Dr. E. Grüneisen, Privatdozenten an der Universität Berlin.

Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik. Von Dr. W. v. Ignatowsky in Gießen.

Akustik. Von Dr. A. Kalähne, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig.

Thermoelektrizität. Von Dr. F. Krüger, Privatdozenten an der Universität Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Oberlehrer in Berlin.

Technische Hydromechanik. Von R. Edler von Mises, Ingenieur, Assistenten an der Kais. Kgl. Technischen Hochschule zu Brünn.

Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, Professor der Mathematik an der Universität Gießen.

Die Grundlagen der Wechselstromtechnik. Von Professor Dr. E. Orlich, Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Berlin.

Die Fourierschen Reihen. Von Dr. R. Rothe, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von Dr. R. Rothe, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal.

Elektromagnetische Schwingungen. Von Dr. Jng. R. Rüdenberg, Assistenten in Göttingen.

Die Theorie der Ionisation der Gase. Von Dr. G. Rümelin, Privatdozenten an der Universität Freiburg i. B.

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen der Technik. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin.

Die Wechselstrommotoren. Von J. Sumec, Professor an der Technischen Hochschule zu Brünn.

Temperaturmessungen. Von Dr. S. Valentiner, Dozenten an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

J. Sachs, Tafeln zum mathematischen Unterricht. [120 S.] 4. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Tafel I enthält die Dezimalbruchverwandlung aller echten Brüche mit Nennern 1—250 und die natürliche Reihe dieser Brüche, Tafel II ganzzahlige Lösungen der pythagoreischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ für alle z von 1—2000, für die Hypotenusen von 2000—5000 nebst Faktorenzerlegung der Zahlen von 1—5000, für alle x von 1—500; Tafel III, eine Vervollständigung und zugleich Erweiterung des in Gauß' Werken hinterlassenen Entwurfes, bringt die Quadrate aller Zahlen von 0—10500 und unterscheidet sich von sonstigen Quadrattafeln dadurch, daß alle diejenigen Quadratzahlen zusammengedruckt erscheinen, bei denen die 3 letzten Stellen gleichlautend sind. Dadurch entsteht einerseits eine außerordentliche Raumersparnis, indem nur etwa der fünfte Teil an Ziffern-typen verbraucht wird, und andererseits wird ein gründlicher Einblick in das Bildungsgesetz der Reihe gewährleistet.

Die Tafel (IV) aller ganzzahligen (rationalen) schiefwinkligen Primdreiecke liefert a) spitz- und stumpfwinklige mit Höhen 1—100, b) spitzwinklige mit Höhen 100—500. Aus diesen beiden Tafeln sind dann noch besonders herausgehoben c) die rationalen Dreiecke, geordnet nach der kleinsten Seite 1—100 und d) geordnet nach der größten Seite 1—100. Von den 121 rationalen Dreiecken mit drei Seitenzahlen unter 100 gibt z. B. diese letzte Tafel zugleich die Angabe, ob der größte Winkel stumpf oder spitz, ferner die Flächenzahl, und auch, wo sie etwa gleich wird der Umfangszahl, ferner ob von den drei Höhen überhaupt eine ganzzahlig ist, und wann die 3 Seiten in arithmetischer Progression aufeinanderfolgen.

So bietet diese Tafelsammlung nach dem Urteil des † Geh. Schulrats Schlömilch, dem das Manuskript s. Z. vorgelegen hat, eine unerschöpfliche Fundgrube von Beispielen und Aufgaben zum mathematischen Unterricht.

Baden-Baden. J. Sachs.

2. Bücherschau.

Bolza, O., Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the calculus of variations" desselben Verfassers. In 3 Lieferungen. 1. Lieferung. Mit 45 Figuren. [IV u. 300 S.] Leipzig 1908. ℳ 8.—.

Crantz, P., Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. 2. Teil. Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, komplexe Zahlen, binomischer Lehrsatz. Mit 21 Figuren im Text. [IV u. 128 S.] Leipzig 1908. Geh. ℳ 1.—, geb. ℳ 1.25.

Düsing, K., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode dargestellt. Ausgabe B: Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Beispielen aus der technischen Mechanik von E. Preger sowie vielen Übungen und 67 Figuren. [XI u. 101 S.] Hannover 1908. ℳ 1.50.

Egerer, H., Repetitorium der höheren Mathematik. (Lehrsätze, Formeln, Tabellen). [VIII u. 351 S.] München 1908. ℳ 6.—.

Lesser, O., Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der höheren Schulen. Eine Sammlung von Materialien für die Hand des Lehrers. Mit Tafeln. [108 S.] Leipzig 1908. ℳ 5.—.

Mayer, J. E., Das mechanische Rechnen des Ingenieurs (Rechenschieber, Rechenmaschinen, Planimeter, Integrator, Integraph). Mit 31 Abbildungen im Text und auf 1 Tafel. [118 S.] Hannover 1908. ℳ 2.20.

Richter, O., Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren. [X u. 188 S.] Leipzig 1908. Geh. ℳ 4.40, geb. ℳ 4.80.

Weber, H., Lehrbuch der Algebra. 2. Auflage. 3. Band. Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Mit 2 Abbildungen. [XVI u. 733 S.] Braunschweig 1908. ℳ 20.—

Ausländische Literatur. (Januar—Mai 1908.)

Gemäß dem Beschluß der Dresdner Jahresversammlung (s. Jahresbericht **16**. 571) sind der Schatzmeister der Vereinigung, Hofrat Dr. A. Ackermann, und der Herausgeber des Jahresberichts wegen der regelmäßigen Anzeige der ausländischen mathematischen Literatur mit der Firma K. F. Koehlers Antiquarium in Leipzig, Kurprinzstr. 6, in Verhandlung getreten. Diese Firma hat sich bereit erklärt, dem Herausgeber regelmäßig eine Zusammenstellung dieser Literatur zur Verfügung zu stellen; auch ist sie bereit, die angekündigten Werke nach Möglichkeit den Mitgliedern der Vereinigung zur Ansicht zu senden bzw. zu beschaffen. Die Umrechnung der Beträge erfolgt dabei nach dem Satze: 1 Fr. (Lire) = 80 Pf.; 1 sh. = 1 ℳ; 1 $ = 4 ℳ. Gesuche um Ansichtssendungen bzw. Kaufaufträge wolle man direkt richten an: K. F. Koehlers Antiquarium, Leipzig, Kurprinzstraße 6.

Bocher, M., Introduction to higher algebra. London 1908. Lwd. 2 $.

Bonneau, J. A., Instruments de pesage à systèmes articulés. Partie 1: Balances Roberval. Av. 27 fig. Paris 1908. 4 Fr.

Briggs, W., Tutorial trigonometry. London 1908. Geb. 3 sh. 6 d.

Essayie, R., Tables de multiplication et de division. 12. Paris 1908. Cart. 6 Fr.

Fubini, G., Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe. Pisa 1908. 15 Lire.

Galois, E., Manuscrits, publ. p. J. Tannery. Paris 1908. 2 Fr. 75 c.

Garbieri, G., Geometria analitica. Vol. 2: Luoghi di 2° grado in coordinate cartesiane, c. esercizi. Torino 1908. 4 Lire.

Gunther, C. A., Integration by trigonometric and imaginary substitution. London 1908. Geb. 5 sh.

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. 2 vols. Vol. 1: La naissance de la mécanique. Avec 85 fig. Paris 1908. 7 Fr. 50 c. Vol. 2: L'organisation de la mécanique. (Im Druck.)

Laurent, H., Statistique mathématique. Avec fig. Paris 1908. Cart. 5 Fr.

Lebon, E., Géométrie élémentaire. Avec 177 fig. 12. Paris 1908. 5 Fr.

Martini-Zuccagni, A., Fondamenti di aritmetica razionale ad uso degli istituti tecnici. Livorno 1907. 2 Lire.

Montessus, R. de, Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités. Avec 17 fig. Paris 1908. 7 Fr.

Nielsen, N., Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel. Copenhague 1908. 1.50 Kr.

Papers, mathematical. For admission into the royal military academy and the royal military college for the years 1898—1907. Ed. by E. J. Brooksmith and R. M. Milne. London 1908. Geb. 6 sh.

Popovici, C., Thèse de mathématiques. Sur les surfaces intégrales communes aux équations différentielles. 4. Paris 1908. 3 Fr. 50 c.

Reclus, L., et H. Fuzet, Arithmétique. (Écoles pratiques de commerce et sections commerciales.) 12. Paris 1908. Cart. 3 Fr. 50 c.

Richard, P. J., et E. Petit, Théorie mathématique des assurances. Paris 1908. 5 Fr.

Sarrette, H., Précis arithmétique des calculs d'emprunts à long terme et de valeurs mobilières. Paris 1908. 10 Fr.

Schultze, A., Graphic Algebra. London 1908. Geb. 4 sh. 6 d.

Seaver, E. P., Mathematical handbook. London 1908. Geb. 10 sh. 6 d. n.

Serret, J. A., Traité de trigonométrie. 9. éd. Avec fig. Paris 1908. 4 Fr.

Sibiriani, F., Formulario di matematiche ad uso degli studenti universitari. 12. Bologna 1908. 5 Lire.

Stuyvaert, M., Deux études de géométrie analytique. Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination. (Gand) 1908. 6 Fr.

Sylvester, J. J., Collected mathematical papers. Vol. 2. (1854—73). London 1908. Lwd. 18 sh.

Turner, G. C., Graphics applied to arithmetic, mensuration and statics. London 1908. 6 sh.

White, W. F., A scrap book of elementary mathematics. London 1908. Geb. 5 sh.

Workman, W. P., and A. G. Cracknell, Geometry, theoretical and practical. Pt. 2. Diagrams. London 1908. 2 sh.

Workman, W. P., and A. G. Cracknell, Geometry, theoretical and practical. Sect. 5. London 1908. 1 sh. 6 d.

Zeuner, G., Technical thermodynamics. 2. vols. First English edition. London 1908. 36 sh.

---

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe. 13. Band. 2. Heft.

Eberhard, Über die Verteilung der reellen Wurzeln dreier rational abhängigen algebraischen Gleichungen. Heger, Zur Geometrie auf der Kugel. Kokott, Über sternförmige Polygone, welche mit der Teilung der elliptischen Funktionen im Zusammenhange stehen. Vogt, Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen. Majcen, Einige Sätze über die räumliche Hyperbel. Meyer, Die involutorischen konformen Punkttransformationen des Raumes. Kürschak, Über Formen, die vollständige Potenzen sind. Godeaux, Sur un mode de génération de la cubique gauche. Rezensionen.

L'Enseignement Mathématique. Xe Année. Nr. 3.

Audrade, Le premier livre de la géométrie naturelle. Introduction aux mathématiques de l'ingénieur. Pleskot, Généralisation du théorème sur la droite de Simson. Lebesgue, Sur la définition de l'aire des surfaces. Laisant, Un nouveau théorème d'arithmétique. Fehr, Le 4me congrès international des mathématiciens, Rome, avril 1908. Chronique.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième Série. Tome VIII. Mars. Avril 1908.

Fréchet, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées. Fouché, Sur le problème d'Apollonius. Boulad, Construction des centres de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane sur son plan. Godeaux, Un théorème sur les congruences de courbes. Charbonnier, Sur la théorie des perturbations du pendule. Fouché, Sur le problème d'Apollonius. Deltour, Continuants: applications à la théorie des nombres.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4me Série. Tome VIII. Mai 1908.

Fontené, Sur les modules de la forme p^m, p premier (impair ou pair). Cervera, Généralisation d'une question de Wolstenholme. Charbonnier, Sur la théorie des perturbations du pendule.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 2e Année. Nr. 15. Mai 1908.

Courcot, Résolution graphique de l'équation du 3e degré. Blutel, La réforme des programmes d'admission aux grandes écoles en 1904. Bérard, Sur la construction graphique des racines d'une équation du second degré. Lamirand, Mesure de l'indice d'un liquide. Blein, Le pouvoir séparateur dans les instruments d'optique. Démousseau, La crise de l'agrégation des sciences naturelles.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 6. Part 3.

Barnes, A new development of the theory of the hypergeometric functions. Campbell, On the problem of the infinitesimal deformation of a surface. Littlewood, A general theorem on integral functions of finite order. Love, Note on Weierstraß' E-function in the calculus of variations. Young, On the uniform approach of a continuous function to its limit. Elliot, On the projective geometry of some covariants of a binary quintic. Young, On the inequalities connecting the double and repeated upper and lower integrals of a function of two variables.

Proceedings of the Royal Society of Edingburgh. Vol. XXVIII. Part IV.

Kelvin, The problem of a spherical gaseous nebula. Muir, The theory of skew determinants in the historical order of development up to 1865. Sommerville, Sunset and twilight curves, and related phenomena.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XIV. Nr. 8.

Cob, The February meeting of the American Mathematical Society. Manning, The February meeting of the San Francisco Section. Young, A fundamental invariant of the discontinuous ζ-groups defined by the normal curves of order n in a space of n dimensions. Moore, On certain constant analogous to Fourier's constants. Swift, Note on the second variation in an isoperimetric problem. Carmichael, Note on a certain equation involving the function $E(x)$. Sharpe, The inner force of a moving electron. Slichter, The recently discovered manuscript of Archimedes. Shorter notices.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 9. Nr. 2.

Dickson, Representations of the general symmetric group as linear groups in finite and infinite fields. Eisenhart, Surfaces with isothermal representation of their lines of curvature and their transformations. Coolidge, The equilong transformations of space. Ranum, Concerning linear substitutions of finite period with rational coefficients. Allen, On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality. Birkhoff, On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Miller, On the holomorph of the cyclic group of order p^m. Van Vleck, On non-measurable sets of points, with an example.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXV. Fasc. I, II. Anno 1908.

Cecioni, Sulla rappresentazione conforme delle arce piane pluriconnesse su un piano in cui siano esiguiti dei tagli paralleli. Sinigallia, Una estensione dei numeri bernoulliani. Carathéodory, Sur une méthode directe du calcul des variations. Rémoundos, Sur quelques configurations formées par un ensemble de points du plan. Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Brusotti, Sui gruppi di $n+1$ quadriche ad invariante $(n+1)$-lineare nullo in uno spazio ad n dimensioni. Poincaré, Nouvelles remarques sur les groupes continus. Giambelli, Introduzione alla teoria del massimo comune divisore e del minimo comune multiplo di più funzioni algebriche intere di una sola variabile. Cisotti, Vene fluenti. Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces. v. Brill, Über die Raumkurven dritter Ordnung. Scorza, Determinazione delle varietà a tre dimensioni di S_r $(r > 7)$ i cui S_3 tangenti si tagliano a due a due. Vivanti, Sopra alcune recenti obiezioni alla teoria dei numeri trasfiniti. Viterbi, Sulla determinazione degli elementi intrinseci, fondamentali, della superficie terrestre, mediante misure locali. Lindelöf, Sur un théorème de M. Hadamard dans la théorie des fonctions entières. Veblen, On the well-ordred sub-sets of the continuum. Knopp, Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung. Korn, Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXV. Fascicolo III.

Korn, Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten. Pisati, Sulle corrispondenze funzionali non analitiche originate da integrali definiti. Sannia, Linee isocline rispetto alle linee di curvatura. Bianchi, Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie. Hadamard, Sur les séries de Dirichlet. Severini, Studio sul primo teorema fondamentale di Lie. Landau, Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion. Fredholm, Sur l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants. Burali-Forti e Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Marletta, Alcuni teoremi sulle curve razionali degli iperspazi. Somigliana, Sui potenziali ritardati. Hadamard, Rectification à la Note „Sur les séries de Dirichlet". Veblen, On the well-ordered subsets of the continuum.

---

4. Kataloge.

Eduard Beyers Nachfolger, G. m. b. H., Wien I., Schottengasse 7. 48. Lager-Katalog. Exakte Wissenschaften.

J. Schweitzer Sortiment (Arthur Sellier), München, Lenbachplatz 1. Antiquariats-Katalog Nr. 45. Versicherungswesen, Bank- und Börsenwesen. Mathematik. Statistik.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kraepelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. 101. Ausgabe. Abgeschlossen im April 1908. Dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom 6.—11. April 1908.

B. G. Teubner, Leipzig. Mitteilungen. 41. Jahrgang, 1908. Nr. 1. Nr. 1[1].

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Schulbücher werden nur ausnahmsweise besprochen. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

S. Arrhenius, Die Vorstellung vom Weltgebäude. Das Werden der Welten. Neue Folge. Leipzig 1908, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the calculus of variations" desselben Verfassers. In drei Lieferungen. Erste Lieferung. Mit 45 Figuren im Text. [IV u. 300 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 8.—

A. Börsch, Bericht über Lotabweichungen (1906). [Abhandlungen der XV. allgemeinen Konferenz der Erdmessung in Budapest 1906. Band II.]

H. Egerer, Repetitorium der höheren Mathematik. (Lehrsätze, Formeln, Tabellen). [351 S.] München 1908, R. Oldenbourg. ℳ 6.—

F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. Deutsche Ausgabe von H. Fleischer. II. Teil. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Mit 135 Figuren im Text. [XII u. 348 S.] Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 9.—

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Herausgegeben vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Mit 2 Bildnissen Eulers. [VI u. 137 S.] Leipzig 1907, B. G. Teubner. Geh. ℳ 5.—, geb. ℳ 5.80.

P. Haß, Zur Definition des Begriffs der eindeutigen analytischen Funktion. Dissertation. Kiel 1908.

F. Hochheim, Elementare Theorie der Wechselströme, ein Beitrag zur Behandlung der Wechselströme in der Oberstufe der Realanstalten. I. Teil. Beilage zum Programm XXXVII der Oberrealschule zu Weißenfels. [Progr. Nr. 356]. Weißenfels 1908.

B. Kagan, Die Grundlagen der Geometrie. Zwei Bände. I. Ein Versuch, die euklidische Geometrie zu begründen. [793 S.] Odessa 1905. II. Historische Übersicht der Entwicklung der Lehre von den Grundlagen der Geometrie. Mit 3 Tafeln. [558 S.] Odessa 1907. *[Russisch.]*

K. Kübel, Anwendungen einer anschaulichen Darstellung des Imaginären. Dissertation. Gießen. 1907.

G. de Laplanche, Étude sur les angles imaginaires. Paris 1908, A. Hermann. Fr. 3.—

F. Pietzker, Kegelschnittslehre im Zusammenhang mit den Anfangsgründen der analytischen Geometrie. (Teil III des Lehrganges der Elementar-Mathematik). Mit 54 in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 96 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

R. Rinkel, Einführung in die Elektrotechnik. Physikalische Grundlagen und technische Ausführungen. Mit 445 Abbildungen im Text. [VI u. 464 S.] [Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 11.20, geb. ℳ 12.—

Chr. Schmehl, Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. II. Teil, Ausgabe A. Für die Obersekunda und Prima der Gymnasien. ℳ 1.60. II. Teil, Ausgabe B Für die Obersekunda der realistischen Anstalten. ℳ 1.60. Gießen 1908, Emil Roth.

W. Schnee, Über irreguläre Potenzreihen und Dirichletsche Reihen. I. Teil. Dissertation. Berlin 1908.

M. Simon, Über Mathematik. Erweiterung der Einleitung in die Didaktik. Gießen 1908, A. Töpelmann. ℳ 0.80.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Tagesordnung für die Mitgliederversammlung in Cöln vom 20. bis 25. September 1908.

Auf Grund der geschehenen Anmeldungen und des allgemeinen Programms der Naturforscherversammlung bringen wir für unsere heurige Jahresversammlung nachstehende Tagesordnung in Vorschlag.

Sonntag, den 20. September, abends 8 Uhr: Begrüßung in der Bürgergesellschaft.

Montag, den 21. September, vormittags $9^1/_4$ Uhr: erste allgemeine Versammlung der Naturforschergesellschaft, nachmittags 3 Uhr: Konstituierung der Abteilung für Mathematik und erste Abteilungssitzung:

1. H. Minkowski-Göttingen: Raum und Zeit.
2. G. Hamel-Brünn: Über die Grundlagen der Mechanik.
3. E. Timerding-Straßburg: Die historische Entwicklung des Kraftbegriffs.

Dienstag, den 22. September, vormittags 9 Uhr: zweite Abteilungssitzung:

1. P. Stäckel-Karlsruhe: Ausgezeichnete Kreiselbewegungen.
2. R. v. Mises-Brünn: Probleme der technischen Hydromechanik.
3. H. Reißner-Aachen: Wissenschaftliche Probleme der Flugmechanik.
4. R. Mehmke-Stuttgart: Vorführung einiger neuer Mechanismen.
5. R. Mehmke-Stuttgart: Über die graphische Ermittlung gezwungener Bewegungen.

Nachmittags $3^1/_2$ Uhr: Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Tagesordnung:

1. Bericht über den Stand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und die Tätigkeit des Vorstandes im ablaufenden Jahre.
2. Bericht über die literarischen Unternehmungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
3. Bericht der Kommissionen.
4. Antrag des Vorstandes auf Unterstützung der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers.
5. Antrag des Vorstandes auf Wahl von Delegierten in die internationale Unterrichtskommission nebst Frage der Bereitstellung von Geldmitteln.
6. Neuwahlen in den Vorstand. Wahl der Kasserevisoren.

Mittwoch, den 23. September, vormittags 9 Uhr: dritte Abteilungssitzung:

1. H. Wiener-Darmstadt: Zur Geometrie der binären Formen.
2. F. Müller-Dresden: Plan zur Herausgabe von Werken Leonhard Eulers.
3. H. Jung-Marburg: Über algebraische Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.

Nachmittags 4 Uhr: Einladung der pädagogischen Sektion zur Debatte über die Dresdener Vorschläge, betreffend die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften. (Ref. F. Klein.)

Donnerstag, den 24. September, vormittags 10 Uhr: Sitzung der beiden Hauptgruppen der Naturforschergesellschaft, nachmittags 3 Uhr: Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe, und

Freitag, den 25. September, vormittags $9\frac{1}{4}$ Uhr: zweite allgemeine Versammlung.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Juni—Juli 1908.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Herr Dr. phil. Wilhelm Blaschke in Bonn, Rheinwerft 22.

Der Mathematische Verein an der Universität Leipzig. Grimmaischer Steinweg 15.

Herr Dr. Arthur Ranum, Instruktor an der Cornell-Universität in Ithaca N.Y (U. S. A.), Wait Avenue 91.

Herr Dr. W. Schnee in Friedenau-Berlin, Rheinstr. 52 A.

Mathematische Sektion der Gesellschaft Isis in Dresden. In der Zeit vom 1. Juli 1907 bis zum 30. Juni 1908 wurden folgende Vorträge gehalten: — *4. Juli 1907.* Grübler: Zur Elastizitätstheorie. — *10. Oktober 1907.* Naetsch: Über Lichtgrenzkurven und geodätische Linien. — *12. Dezember 1907.* Helm: Über die Beziehungen der Sammelbegriffe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. — *16. Januar 1908.* Krause: Zur Theorie der Gelenkmechanismen. — *13. Februar 1908.* Witting: Über angenäherte Lösung numerischer Gleichungen. Heger: Die Rohnsche Konstruktion der ebenen Kurve III. Ordnung. — *12. März 1908.* P. Schreiber: Theorie und Praxis der Wagemanometer. — *14. Mai 1908.* A. Schreiber: Zur Theorie des Prytzschen Stangenplanimeters. — Vorsitzender der Sektion ist z. Z. Rektor Prof. Dr. R. Henke in Dresden, Schriftführer Prof. Dr. E. Naetsch in Dresden-Blasewitz.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *Siebente Sitzung am 16. Juni 1908*: F. Klein berichtet über die hiesigen Tagungen des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts und des Deutschen Ausschusses in den Pfingstferien. — A. Haar gibt einen Überblick über die bisherigen Lösungen der ersten Randwertaufgabe elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung und teilt die allgemeine Lösung dieser Aufgabe sowie Verallgemeinerungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung mit. — *Achte Sitzung am 23. Juni:* F. Klein gibt den Literaturbericht. — J. Hjelmslew (Kopenhagen) spricht über das Verhältnis der Axiomatik der projektiven und metrischen Geometrie sowie über einen Versuch einer geometrischen Axiomatik des unendlichvieldimensionalen Raumes. — P. Koebe referiert über Fubinis Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle

funzioni automorfe. — *Neunte Sitzung am 30. Juni:* C. H. Müller berichtet über die wissenschaftlichen Kataloge der Royal Society, insbesondere den neuen Subjektindex, Bd. I (Mathem.). — P. Koebe setzt das vorige Referat fort und teilt sodann ein neues allgemeines Uniformisierungstheorem mit (vgl. eine Note in den Gött. Nachr.). — *Zehnte Sitzung am 7. Juli:* D. E. Smith (New York) berichtet über die Plimpton-library seltener elementarmathematischer Werke und die Neuerwerbungen auf seiner Weltreise. Ferner gibt er einen Überblick über die Organisation des mathematischen Unterrichts in Amerika. — Th. v. Kármán berichtet über den Unterricht der Ingenieure in England. — *Elfte Sitzung am 14. Juli:* F. Klein spricht über die Zusammensetzung und die Aufgaben der in Rom in Aussicht genommenen internationalen Unterrichtskommission; als Beispiel dieser Aufgaben vergleicht er den deutschen und den ausländischen mathematischen Unterricht. — *Zwölfte Sitzung am 21. Juli:* H. Weyl referiert über Bd. III von Webers Algebra. — E. Bunitzky teilt einige Sätze über allgemeine Typen von Randbedingungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen *n*. Ordnung mit. — T. Lalescu berichtet über die Untersuchungen seiner Pariser Dissertation über die Volterrasche Integralgleichung. — *Dreizehnte Sitzung am 28. Juli:* H. Minkowski entwickelt eine neue Form der elektrodynamischen Elementargesetze auf Grund des Relativitätsprinzips; weiterhin sucht er mit Hilfe dieses Prinzipes spezielle Fälle von Elektronenbewegungen auf, die sich mathematisch vollständig behandeln lassen, und verwendet schließlich als Hilfsmittel die Projektion in einen höherdimensionalen Raum und die Theorie der Zykliden. — *Vierzehnte Sitzung am 4. Juli*: Nach dem Literaturbericht von F. Klein spricht E. Zermelo über die Entwicklung und die Aufgaben der mathematischen Logik und trägt insbesondere den in seiner Vorlesung entwickelten Aussagen- und Klassenkalkul vor, der eine Verbindung der Peanoschen und Schröderschen Zeichensprache benutzt.

---

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Wolfskehlsche Preisstiftung. Bekanntmachung. Auf Grund des von dem verstorbenen Herrn Dr. Paul Wolfskehl in Darmstadt uns zugewendeten Vermächtnisses wird hiermit ein Preis von 100000 *M*, in Worten: „einhunderttausend Mark", für denjenigen ausgesetzt, dem es zuerst gelingt, den Beweis des großen Fermatschen Satzes zu führen. Herr Dr. Wolfskehl bemerkt in seinem Testamente, daß Fermat (siehe z. B. Œuvres de Fermat Paris 1891 t. I pg. 291 observ. II) mutatis mutandis die Behauptung aufgestellt hat, daß die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist für alle diejenigen Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind. Dieser Fermatsche Satz ist entweder im Sinne Fermats allgemein oder in Ergänzung der Untersuchungen von Kummer (Crelles Journal 40, S. 130 ff., Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1857) für alle die Exponenten λ zu beweisen, in denen er überhaupt Geltung hat. Über weitere Literatur vergleiche man: Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894—95) § 172—173 und Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil 2 Arithmetik und Algebra (1900—1904) I C 4 b, S. 713.

Die Aussetzung des Preises erfolgt unter folgenden näheren Bedingungen:

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen entscheidet frei darüber, wem der Preis zuzuerkennen ist. Sie lehnt die Annahme jeder Manuskriptsendung ab, die auf die Bewerbung um den Preis für den Fermatschen Satz Bezug hat; sie berücksichtigt für die Preiszuteilung lediglich solche mathematische Abhandlungen, die in periodischen Zeitschriften, als Monographien oder in Buchform im Buchhandel käuflich erschienen sind. Die Gesellschaft stellt dem Verfasser solcher Abhandlungen anheim, etwa 5 gedruckte Exemplare davon an sie einzusenden.

Außer Betracht bleiben für die Verleihung des Preises solche Arbeiten, die in einer Sprache gedruckt sind, welche den zur Beurteilung der Arbeit berufenen Fachgelehrten unverständlich ist. An die Stelle solcher Arbeiten können vom Verfasser als richtig anerkannte Übersetzungen treten.

Die Gesellschaft lehnt alle Verantwortlichkeit für eine Nichtberücksichtigung von Arbeiten ab, die nicht zu ihrer Kenntnis gelangt sind, desgleichen für alle Irrtümer, die daraus entspringen könnten, daß der wirkliche Verfasser der Arbeit oder eines Teiles derselben als solcher der Gesellschaft unbekannt geblieben ist.

Sie behält sich für den Fall, daß an der Lösung der Aufgabe mehrere Personen beteiligt sind oder die Lösung durch die Arbeiten mehrerer Gelehrter herbeigeführt worden ist, freieste Entscheidung, insbesondere auch die Teilung des Preises nach ihrem Ermessen vor.

Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft erfolgt frühestens zwei Jahre nach der Veröffentlichung der zu krönenden Abhandlung. Es soll innerhalb dieses Zeitraumes deutschen und ausländischen Mathematikern Gelegenheit geboten werden, über die Richtigkeit der durch die Veröffentlichung bekannt gewordenen Lösung sich zu äußern.

Ist der Preis durch die Gesellschaft zuerkannt, so wird davon den Berechtigten durch den vorsitzenden Sekretär im Namen der Gesellschaft Mitteilung gemacht und solches öffentlich an allen denjenigen Orten bekannt gegeben werden, an denen der Preis im letzten Jahre ausgeschrieben war. Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft ist unanfechtbar.

Die Auszahlung des Preises erfolgt an den Berechtigten innerhalb dreier Monate nach seiner Zuerkennung durch die Königliche Universitätskasse in Göttingen oder auf Gefahr und Kosten des Empfängers an einem anderen von ihm zu bezeichnenden Orte, und zwar wird das vermachte Kapital je nach der Wahl der Gesellschaft bar oder in den hierfür hinterlegten Papieren gegen rechtsgültige Quittung zur Auszahlung gebracht. Die Auszahlung des Preises kann durch Aushändigung der hinterlegten Wertpapiere auch dann erfolgen, wenn deren Kurswert die Summe von 100000 Mark nicht mehr erreichen sollte.

Falls der Preis bis zum 13. September 2007 nicht zuerkannt ist, können Ansprüche auf ihn nicht mehr erhoben werden.

Mit dem heutigen Tage tritt die Wolfskehlsche Preisstiftung unter den vorstehend angegebenen Bedingungen in Kraft.

Göttingen, den 27. Juni 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Bemerkungen zu dem vorstehenden Preisausschreiben. Seit dem Bekanntwerden des Wolfskehlschen Vermächtnisses sind der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften bereits mehrere Hundert sogenannte Beweise des Fermatschen Satzes zugegangen, und es steht zu erwarten, daß nach der nunmehr erfolgten offiziellen Bekanntmachung des Preisausschreibens diese Menge noch beträchtlich anwachsen wird. Dabei ist die Zahl der eigentlichen Mathematiker, die sich an dem Wettlauf beteiligen, relativ gering: Ingenieure, Bankdirektoren, Studierende beiderlei Geschlechts, Gymnasiasten, Pastoren und Lehrer senden die Mehrzahl der Lösungen ein. Auch ist charakteristisch, daß der mühevolle Weg eingehender zahlentheoretischer Studien zum Zwecke des Beweises, den Wolfskehl jedenfalls im Sinne hatte, als er sein Vermächtnis traf, und auf den die Gesellschaft der Wissenschaften in ihrem Preisausschreiben ausdrücklich hinweist, bisher von keinem einzigen der Konkurrenten eingeschlagen worden ist. Und doch liegt die ganze Bedeutung des Fermatschen Satzes in seinem Zusammenhange mit der Lehre von der Faktorenzerlegung algebraischer Zahlen. Offenbar ist der Wunsch, 100000 *M* zu gewinnen, sehr viel verbreiteter als ein Verständnis für die tieferliegenden Beziehungen im Gebiete der modernen Mathematik.

Bei der hiermit gekennzeichneten Sachlage ist es ersichtlich unmöglich, und es würde auch in der Mehrzahl der Fälle gänzlich nutzlos sein, daß die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften mit dem einzelnen Einsender korrespondiert, ihn vielleicht gar auf Unrichtigkeiten seiner Überlegungen aufmerksam macht. Die Gesellschaft kann nicht anders, als sich auf den im Preisausschreiben bezeichneten Standpunkt zurückziehen: daß sie nur hervortritt, wenn ihr der gewünschte Beweis des Fermatschen Satzes wirklich erbracht scheint. Solange die Gesellschaft schweigt, besagt dies, daß nach ihrem Dafürhalten der Beweis noch nicht vorliegt. Die Kontrolle aber für die Richtigkeit ihres Verhaltens den vorliegenden Arbeiten gegenüber beruht auf der im Preisausschreiben verlangten Drucklegung und Veröffentlichung sämtlicher in Betracht zu ziehender Konkurrenzschriften, durch die es in der Tat dem wissenschaftlichen Publikum der Jetztzeit wie der kommenden Jahre ermöglicht ist, sich in jedem einzelnen Falle ein selbständiges Urteil zu bilden.

Inzwischen sind die Einsender von Lösungen der Preisaufgabe mit der so geschilderten Stellungnahme der Gesellschaft zum Teil, wie es scheint, nicht zufrieden. Bei der nahen Personalbeziehung, die zwischen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften und der Redaktion der mathematischen Annalen besteht, wenden sie sich mit der Bitte um Wiederabdruck ihrer Arbeit an letztere. Auf solche Weise muß doch die von der Gesellschaft verweigerte Begutachtung der einzelnen Arbeit sich erzwingen lassen! Aber die Redaktion der Annalen *kann* dem solchergestalt an sie herantretenden Wunsche gar nicht willfahren. Denn selbst wenn sie die Zeit aufwenden wollte, die für die Arbeit der Auskunftserteilung in den sich immer mehr häufenden Fällen erforderlich wäre, so vermag sie aus den angedeuteten persönlichen Gründen in der vorliegenden Frage nicht eine besondere Instanz neben der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften zu bilden. Die Redaktion der mathematischen Annalen hat also zu erklären, *daß sie jede selbständige Begutachtung auf den Fermatschen Satz bezüglicher Einsendungen ablehnt.*

Wangerooge, den 18. August 1908.

F. KLEIN (Göttingen).

Preisaufgabe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen für das Jahr 1909. Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften wünscht eine neue exakte Bestimmung der spezifischen Elektronenladung und ihrer Veränderung mit der Geschwindigkeit; sie wünscht, daß das gesamte vorhandene Beobachtungsmaterial einer kritischen Sichtung unterzogen und auf Grund davon eine Prüfung der verschiedenen Elektronentheorien ausgeführt werde.

Die Bewerbungsschriften sind in üblicher Weise vor dem 1. Februar 1909 an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften einzuliefern. Der Preis beträgt 1000 *M.*

Preisaufgabe des Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere in Mailand für das Jahr 1908: La teoria dei gruppi di trasformazione fondata spezialmente da Lie e sviluppata nell' ultimo trentennio, si è mostrata feconda delle più svariate applicazioni alla geometria e alla analisi matematica. Il lavoro dovrà portare un contributo od un perfezionamento notevole ed originale a questa importanta teoria.

Die Bewerbungsschriften sind italienisch, französich oder lateinisch abzufassen, mit Motto und verschlossener Angabe des Verfassers an das Sekretariat des Instituts, Mailand, Palazzo di Brera, einzusenden.

Preis der Berliner Akademie der Wissenschaften. Die Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften hat ihren Philosophie-Preis von 5000 *M*, für den eine Darstellung des Systems von Leibniz gewünscht worden war, der aber keine Bewerbung gefunden hatte, zu gleichen Teilen Dr. W. Kabitz in Breslau und Dr. P. Ritter in Berlin zuerkannt, und zwar für ihre Arbeit an dem Kritischen Katalog der Leibniz-Handschriften, der für die interakademische Leibniz-Ausgabe hergestellt worden ist.

Preisaufgabe der Phylosophischen Fakultät der Universität Berlin. Für die Bearbeitung der von der Fakultät gestellten Aufgabe: „Das Newtonsche Potential eines nicht homogenen Polyeders ist in solchen Fällen zu bestimmen, wo die Dichtigkeit des Körpers als ganze Funktion der cartesischen Koordinaten gegeben ist," hat stud. phil. H. Claussen in Berlin den Preis erhalten.

Haidinger-Preis. Die Akademie der Wissenschaften in Wien verlieh den Haidinger-Preis dem Professor M. Smoluchowski von Smolau in Lemberg für seine Arbeiten über die kinetische Theorie der Molekularbewegung in Flüssigkeiten und Gasen.

Preis für Physik der Accademia dei Lincei. Die Accademia dei Lincei in Rom hat den Preis für Physik in Höhe von 10000 Lire dem Professor Batelli verliehen.

---

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Wintersemester 1908/9 angekündigten Vorlesungen aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.

Berlin. Schwarz, Differentialrechnung (4); Übungen dazu; Synthetische Geometrie (4); Theorie der komplexen Zahlgrößen (1); Seminar; Kolloquien. Frobenius, Algebra (4); analytische Geometrie (4); Seminar. Schottky, Allgemeine Funktionen-

theorie (4); Thetareihen (2); Seminar. Hettner, Potentialtheorie (2). Knoblauch, Theorie und Anwendung der Determinanten (4); Theorie der Raumkurven und der krummen Flächen (4); Übungen für jüngere Semester. Lehmann-Filhés, Analytische Mechanik (4). Landau, Integralrechnung (4); Mengenlehre mit Anwendungen auf die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen (4). Schur, Zahlentheorie (4); Theorie der elliptischen Funktionen (4). Bauschinger, Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Figur und Rotation der Himmelskörper; Seminar für wissenschaftliches Rechnen. Foerster, Fundamentale Ausgleichung der Zeit- und Raummessung (2); Geschichte der neueren Astronomie (2). Helmert, Gradmessungen (1); Methode der kleinsten Quadrate (1). Struve, Sphärische Astronomie (3); Praktische Übungen. Schmidt, Allgemeine Geophysik (2); Kollektivmaßlehre (1); Übungen in der rechnerischen Behandlung geophysikalischer Probleme. Scheiner, Spektralanalyse der Gestirne (2); Astrophysikalisches Kolloquium (1). Marcuse, Theorie und Praxis der geographisch- und nautisch-astronomischen Ortsbestimmung, mit Übungen (2); Allgemeinverständliche Himmelskunde. Ristenpart, Theorie der Mikrometermessungen (1); Übungen dazu; Kosmogonie. Hellmann, Allgemeine Klimatologie; Meteorologisches Kolloquium. Planck, Theorie der Wärme (4); Übungen. Rubens: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik; Physikalisches Kolloquium. Wehnelt, Angewandte Elektrizitätslehre (1). Slaby, Elektromechanik (4); Drahtlose Telegraphie und Telephonie (2). Warburg, Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik (2). v. Bortkiewicz, Allgemeine Theorie der Statistik (2 ; Versicherungsrechnung, mit Übungen (2). Meyer, Einführung in die moderne Maschinentechnik (2); Technische Exkursionen. Neesen, Elektrische Schwingungen und drahtloseTelegraphie, Theorie (1). Aschkinaß, Elemente der höheren Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung in den Naturwissenschaften (2). Börnstein, Übungen in Herstellung und Gebrauch physikalischer Unterrichtsapparate. Gehrcke, Theorie der Wechselströme und elektromagnetischen Wellen. Grüneisen, Differentialgleichungen schwingender Systeme (1). Hahn, Die Radioaktivität. Henning, Ausgewählte Kapitel aus der Potentialtheorie (1) Kiebitz, Elektrische Wellen und ihre Anwendung in der drahtlosen Telegraphie. Krigar-Menzel, Theoretische Physik III (4). Laue, Elektronentheorie (2). Martens, Die wichtigsten Kapitel aus der Mechanik, Akustik, Wärmelehre. Valentiner, Vektoranalysis mit Anwendung auf die mathematische Physik und auf technische Probleme (2). v. Wartenberg, Kinetische Theorie der Aggregatzustände (1). Weinstein, Einleitung in die mathematische Physik, Mechanik, Akustik, Wärme (3).

Bonn. Study, Elliptische Funktionen (3); Anwendungen komplexer Größen in der Geometrie (3); Seminar. London, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes (4); Übungen dazu; Darstellende Geometrie II mit Übungen (3); Seminar. Kowalewski, Differential- und Integralrechnung II (4); Übungen dazu; Fouriersche Reihen und ihre Anwendungen (2); Grundzüge der Mengenlehre (2); Seminar. Carathéodory, Maxima und Minima (1); Technische Mechanik (2). Schmidt, Einführung in die Algebra (4). Küstner, Theorie der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten (3); Theorie des Sonnensystems. Mönnichmeyer, Himmelsmechanik (2); Praktische Übungen in der Sternwarte (mit Küstner). Kayser, Physikalisches Kolloquium. Bucherer, Mathematische Physik (2). Eversheim, Angewandte Elektrizitätslehre mit Übungen (2). Pflüger, Theorie der Elektrizität (4); Übungen.

Breslau. Rosanes, Analytische Geometrie der Ebene (4); Elemente der Determinantentheorie (1); Seminar. Sturm, Zahlentheorie (3); Kurven und Flächen 3. Ordnung (3); Seminar. Kneser, Differentialgleichungen und Fouriersche Reihen (3); Elliptische Funktionen (3); Seminar. Franz, Mechanik des Himmels (4); Astronomisches Seminar. Lummer, Physikalisches Kolloquium. Pringsheim, Allgemeine Mechanik (4); Seminar; Physikalisches Kolloquium. Schaefer, Theorie

der Wärme (4). Meyer, Thermochemie und Thermodynamik; Übungen dazu; Sackur, Radioaktivität mit Experimenten. von dem Borne, Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Meteorologie (2); Physik der Erdfeste (1); Geophysikalische Übungen. Waetzmann, Physikalische Grundbegriffe (1); Übungen im Demonstrieren physikalischer Apparate.

Erlangen. Gordan, Analytische Geometrie der Ebene (4); Zahlentheorie (4); Seminar. Noether, Differential- und Integralrechnung I (4); Theorie der algebraischen und Abelschen Funktionen (4); Analytische Übungen. Hilb, Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu; Analytische Übungen (mit Noether); Einführung in die Theorie der Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen (2). Reiger, Mechanik (2); Elektrizität mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis (2); Übungen zur theoretischen Physik.

Freiburg. Lüroth, Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe (4); Populäre Astronomie (2); Seminar. Stickelberger, Analytische Geometrie der Ebene und Differentialrechnung (5); Bestimmte Integrale (3). Loewy, Differentialgleichungen (4); Die Technik der Lebens-, Invaliden- und Krankenversicherung (4); Seminar. Weingarten, Einleitung in die Theorie der Elastizität fester Körper (2) Seith, Darstellende Geometrie (2); Übungen dazu (1). Himstedt, Übungen aus der theoretischen Physik (1); Physikalisches Kolloquium. Koenigsberger, Theoretische Physik mit Seminar (3); Besprechung theoretischer Untersuchungen (1); Elektrizitätsleitung in Gasen und Elektronik (1). Meyer, Mechanische Wärmetheorie (2). Reingamm, Hydrodynamik, Elastizität, Akustik (3).

Göttingen. Klein, Mechanik (4); Seminar. Hilbert, Funktionentheorie (4); Prinzipien der Mathematik (2); Seminar. Minkowski, Algebra (4); Wahrscheinlichkeitsrechnung (2); Seminar. Runge, Differential- und Integralrechnung II mit Übungen (5); Seminar. Prandtl, Statik der Baukonstruktionen (3); Seminar; Praktikum. Wiechert, Vermessungswesen II mit Übungen (4); Erdmagnetismus (2); Ebbe und Flut (1); Kinetische Theorie der Gase (2); Kolloquium (1). Bernstein, Geschichte der neueren Mathematik (2); Versicherungsmathematik (2). Koebe, Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu (4). Zermelo, Variationsrechnung (4); Übungen zur mathematischen Logik (1). Toeplitz, Gruppentheorie (2); Übungen für mittlere Semester (2). Krüger, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften (3); Theorie der elektromotorischen Kräfte (1); Übungen in der Selbstanfertigung und Handhabung von Demonstrationsapparaten. Riecke, Seminar. Voigt, Partielle Differentialgleichungen der Physik (4); Interferenz und Beugung des Lichts (2). Simon, Elektrische, dielektrische und magnetische Kreise (2); Einführung in die Elektrotechnik (1); Strahlungsgesetze und Beleuchtungswesen (1); Elektrotechnisches Praktikum (3); Kolloquium über Fragen der angewandten Elektrizität. Abraham, Über Stabilität und Instabilität (1). Gerdien, Einführung in die Elektrodynamik (2). Bestelmeyer, Elektrizität in Gasen (2). Schwarzschild, Klassische Himmelsmechanik (3); Behandlung astronomischer Fragen (2). Ambronn, Geschichte der Astronomie (2); Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf Astronomie und Geodäsie (1); Astronomische Übungen. Herglotz, Bahnbestimmung der Planeten und Kometen (2); Übungen dazu (1).

Greifswald. Thomé, Differential- und Integralrechnung I (4); Synthetische Geometrie (2); Seminar. Engel, Funktionentheorie II (4); Projektive Geometrie und homogene Koordinaten (4); Theorie der Differentialgleichungen (2); Seminar. Vahlen, Analytische Mechanik I (4); Übungen dazu, mit Berücksichtigung der technischen Mechanik (1). Mie, Elementarmathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik (1); Besprechungen neuerer physikalischer Arbeiten (mit Starke) (2). Holtz, Mechanik und Molekularphysik (1); Physik der Gestirne (1). Starke, Theoretische Optik (4); Übungen dazu (1). Schreber, Übungen im Zusammenbauen und Demonstrieren physikalischer Apparate (1). Herweg, Einführung in

die theoretische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme und ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik (2). Roth, Einführung in die mathematische Behandlung chemischer Probleme (1).

Halle. Cantor, Theorie der analytischen Funktionen (5); Seminar. Wangerin, Synthetische Geometrie (4); Analytische Geometrie des Raumes (2); Sphärische Trigonometrie und mathematische Geographie (2); Seminar. Gutzmer, Variationsrechnung (4); Theorie und Anwendung der Determinanten (2); Einführung in die Theorie der höheren ebenen Kurven (2); Seminar. Eberhard, Integralrechnung (4); Übungen dazu (1). Dorn, Theorie der Elastizität (2). Schmidt, Theorie der Elektrizität und des Magnettismus (4); Physikalisches Kolloquium, im Anschluß an Übungen (2). Berndt, Vektoranalysis (2). Buchholz, Grundlagen der theoretischen Astronomie (2); Sphärische Astronomie und Theorie der astronomischenInstrumente (2).

Heidelberg. Koenigsberger, Höhere Algebra (4); Differential-Integralrechnung II (3); Elemente der Zahlentheorie (1); Seminar. Cantor, Differential- und Integralrechnung (4); Übungen dazu (1); Elementare Arithmetik, Zahlentheorie und Algebra (2). Koehler, Synthetische Geometrie (4). Boehm, Vektoranalysis und Einführung in die analytische Mechanik (4); Übungen (1). Bopp, Potentialtheorie (1); Theorie und Geschichte spezieller höherer Kurven (1). Valentiner, Ausgewählte Kapitel aus der Fixsternastronomie (2). Wolf, Elemente der Astronomie (astronomische Geographie) (2). Kopff, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung (1). Lenard, Physikalisches Kolloquium und Seminar. Pockels, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (4); Übungen dazu (1). Becker, Kathodenstrahlen mit Demonstrationen (1); Die geschichtliche Entwicklung der Elektrizitätstheorien (1). Müller, Einleitung in die theoretische Physik (2).

Jena. Thomae, Elliptische Funktionen (4); Seminar. Haußner, Elemente der Zahlentheorie (4); Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen (4); Analytische Geometrie des Raumes (4); Seminar; Proseminar. Frege, Analytische Mechanik (4); Begriffsschrift (1). Rau, Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu (2); Einführung in die Elektrotechnik (2); Elektrotechnisches Praktikum (3); Anleitung zu selbständigen Arbeiten. Knopf, Berechnung des scheinbaren Laufes der Planeten und Kometen (2); Mathematische Geographie (3). Winkelmann, Physikalisches Praktikum für Physiker (6). Auerbach, Theoretische Optik (3); Einführung in die theoretische Physik (2); Physikalisches Kolloquium. Straubel, Lichtbewegung in stetig veränderlichen Medien (1). Ambronn, Einleitung in die Theorie des Mikroskops (2). Baedeker, Elektrische Wellen (1).

Kiel. Pochhammer, Analytische Geometrie des Raumes (3); Partielle Differentialgleichungen (4); Seminar. Heffter, Integralrechnung (4); Übungen dazu; Zahlentheorie (4); Seminar. Landsberg, Theorie der elliptischen Funktionen (4); Kolloquium darüber; Theorie der unendlichen Reihen (2). Harzer, Sphärische Astronomie (3); Differenzenrechnung (1). Kobold, Theorie der speziellen Störungen (2); Übungen dazu; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte. Weber, Einleitung in die theoretische Physik (4); Die Methode der Lichtmessung (1); Theorie physikalischer Messungsapparate mit Übungen (1); Physikalisches Kolloquium. Dieterici, Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler; Physikalisches Kolloquium.

Königsberg. Meyer, Analytische Geometrie des Raumes (3); Übungen dazu; Einleitung in die höhere Geometrie (4); Seminar. Schoenflies, Differentialgleichungen (4); Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie (2); Seminar. Saalschütz, Integralrechnung (4); Übungen dazu (1); Algebraische Untersuchungen (1). Battermann, Sphärische Astronomie (2); Interpolation und numerische Integration (1). Cohn, Ausgleichungsrechnung (3); Übungen dazu (2). Kaufmann, Ergänzungen zur Experimentalphysik II; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Physiker. Volkmann, Theorie der Wärme (4); Seminar.

Leipzig. Neumann, Differential- und Integralrechnung (4). Hölder, Mechanik (5); Algebraische Gleichungen (2); Seminar. Rohn, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen (4); Flächen 3. Ordnung (1); Seminar. Hausdorff, Reihen und bestimmte Integrale (4). Liebmann, Analytische Geometrie des Raumes (4); Übungen dazu. Bruns, Himmlische Mechanik (4); Praktische Analysis; Praktische Übungen auf der Sternwarte. Peter, Theorie der geographischen Ortsbestimmungen (1); Übungen im Ephemeridenrechnen und Bahnbestimmen; Praktische Übungen auf der Sternwarte. Fischer, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften (3). Wiener, Physikalisches Kolloquium. Des Coudres, Elektrizität und Magnetismus (4); Thermodynamische Übungen (1). Physikalisches Kolloquium. v. Oettingen, Elemente der geometrischen Optik (1). Marx, Gasentladung (2). Dahms, Akustik (2). Scholl, Ausgewählte Kapitel aus der höheren Optik (1). Fredenhagen, Experimentelle Ergänzungen zur Maxwellschen Theorie (1); Thermodynamische Übungen.

Marburg. Hensel, Integralrechnung (4); Allgemeine Theorie der ebenen Kurven (3); Proseminar; Seminar. Neumann, Theorie der linearen Differentialgleichungen (3); Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik (4); Seminar. v. Dalwigk, Elliptische Funktionen (4); Analytische Geometrie des Raumes, bes. Theorie der Flächen 2. Ordnung (4); Übungen aus der darstellenden Geometrie für Vorgerückte (2). Richarz, Ergänzungen zur Experimentalphysik (1); Physikalisches Kolloquium. Feußner, Theoretische Physik (Wärme) (4); theoretisch-physikalisches Seminar. Schulze, Kinetische Gastheorie (2); Interferenz und Polarisation (1); Repetitorium der Experimentalphysik mit elementarmathematischen Übungen.

München. Lindemann, Analytische Geometrie der Ebene (4); Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (4); Über die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens (2); Seminar. Voß, Differentialrechnung (4); Übungen dazu (2); Differentialgeometrie der Kurven und Flächen I (4); Seminar. Pringsheim, Algebra (4); Elliptische Funktionen (4). Doehlemann, Darstellende Geometrie I (5); Übungen dazu (3); Liniengeometrie in synthetisch-analytischer Darstellung (4); Die Raumdarstellung in der bildenden Kunst (2). Brunn, Mengenlehre (4). Hartogs, Algebraische Analysis (4). Perron, Theorie und Anwendung der Determinanten (4); Über divergente Reihen (2). v. Seeliger, Mechanische, physikalische und mathematische Grundlagen der Astronomie (4); Astronomisches Kolloquium. Großmann, Allgemeine Astronomie (2). Röntgen, Physikalisches Kolloquium. Sommerfeld, Elektrodynamik, insbesondere Elektronentheorie (4); Seminar über elektrodynamische Fragen; Anleitung zu selbstständigen Arbeiten; Über die Bedeutung der Kreiseltheorie für die allgemeine Mechanik und Physik (2). Graetz, Analytische Mechanik (4); Physikalisches Kolloquium. Donle, Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichts (2). Koch, Geometrische Optik mit besonderer Berücksichtigung der Wirkungsweise optischer Instrumente (1).

Rostock. Staude, Algebra (4); Theorie der analytischen Funktionen (4); Seminar. Heydweiller, Physikalische Übungen für Mathematiker; Physikalisches Seminar. Weber, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (3); Hydrodynamik und Kapillarität (3); Übungen zur theoretischen Physik (1); Vektoranalysis (1).

Tharandt. Kunze, Forstmathematik (3); Waldwegebau (3); Planzeichnen (4). Weinmeister, Experimentalphysik (4); Infinitesimalrechnung, II (4); Mathematisches Repetitorium (2).

Tübingen. v. Brill, Einführung in die höhere Mathematik (4); Über nichtstarre Systeme und die Mechanik von Hertz (3); Seminar. v. Stahl, Höhere Algebra (2); Anwendungen der Funktionentheorie (3); Seminar. Maurer, Höhere

Analysis II (3); Übungen dazu (1); Zahlentheorie (2). Waitz, Theoretische Physik I (3); Übungen dazu (2); Meteorologie und Klimatologie (1). Gans, Theorie des Magnetismus (2). Happel, Geometrische Optik (1).

Würzburg. Prym, Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (4); Proseminar; Seminar. Rost, Analytische Mechanik I (4); Ausgleichung der Beobachtungsfehler (2); Proseminar; Seminar. v. Weber, Algebra (4); Darstellende Geometrie I (4); Übungen dazu (4); Abbildung und Biegung der Flächen (2). Cantor, Theorie der Wärme (4). Harms, Geometrische Optik (1). Füchtbauer, Elektrische Erscheinungen in Gasen und Verwandtes (2).

4. Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. A. Antoniazzi habilitierte sich an der Universität Padua als Privatdozent der Astronomie.

Dr. F. Contarino habilitierte sich an der Universität Neapel als Privatdozent der Astronomie.

Dr. E. Hilb habilitierte sich an der Universität Erlangen als Privatdozent der Mathematik.

Dr. G Sannia habilitierte sich an der Universität Turin als Privatdozent der Algebra und analytischen Geometrie.

Dr. G. Scorza habilitierte sich an der Universität Bologna als Privatdozent der projektiven und darstellenden Geometrie.

Dr. K. Uller habilierte sich an der Universität Gießen als Privatdozent der Physik.

Dr. B. Viaro habilitierte sich in Florenz als Privatdozent der Astronomie.

Ernennungen, Auszeichnungen.

Dr. G. Boggio, Privatdozent an der Universität Turin, wurde zum ao. Professor der rationellen Mechanik an der Universität Messina ernannt.

Dr. L. Bricard an der École Polytechnique zu Paris wurde zum Professor der Mathematik am Conservatoir des arts et métiers daselbst ernannt.

Professor Dr. P. Burgatti an der Universität Messina wurde als Professor der rationellen Mechanik an die Universität Bologna berufen.

Professor Dr. H. Burkhardt an der Universität Zürich wurde zum etatmäßigen Professor an der Technischen Hochschule zu München ernannt als Nachfolger von v. Braunmühl.

Dr. E. H. Comstock wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota ernannt.

Professor Dr. Cosserat, Direktor der Sternwarte zn Toulouse, wurde zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst ernannt.

Dr. J. H. Mc Donald wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Kalifornien ernannt.

Professor Dr. Drach an der Universität zu Poitiers wurde zum Professor der Infinitesimalrechnung an der Universität Toulouse ernannt.

Dr. Dullac, Privatdozent an der Universität zu Grenoble, erhielt einen Lehrauftrag für Infinitesimalrechnung an der Universität Poitiers.

Dr. de Franchis und Dr. Pieri, Professoren der projektiven und darstellenden Geometrie an der Universität Parma bzw. Catanea, werden vom nächsten Semester ab ihre Stellungen miteinander tauschen.

Professor Dr. F. Gerbaldi an der Universität Palermo wurde zum o. Professor der Algebra und analytischen Geometrie an der Universität Pavia ernannt.

Professor Dr. G. L. Hale, Direktor der Sonnenwarte auf Mount Wilson, wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu Paris gewählt.

Professor Dr. K. Hensel an der Universität Marburg hat die Berufung an die Universität Leipzig abgelehnt.

Professor Dr. A. Kneser an der Universität Breslau hat einen Ruf als o. Professor der Mathematik an die Universität Leipzig abgelehnt.

Dr. J. W. Miller an der Lehigh Universität wurde zum ao. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Dr. Petr, ao. Professor an der tschechischen Universität in Prag, wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Professor Dr. E. Picard wurde zum Vizepräsidenten der Akademie der Wissenschaften zu Paris gewählt.

Professor Dr. F. Prohazka an der tschechischen technischen Hochschule in Brünn wurde zum o. Professor der darstellenden Geometrie an der tschechischen technischen Hochschule in Prag ernannt.

Professor Dr. Ristenpart, Privatdozent der Astronomie an der Universität Berlin, wurde zum o. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte an der Universität in Santiago de Chile ernannt.

Professor Dr. A. de Saint-Germain wurde zum Honorarprofessor an der Universität zu Caen ernannt.

Professor Dr. H. v. Seeliger, Direktor der Sternwarte in München, erhielt einen Ruf in gleicher Eigenschaft an die Universität Wien als Nachfolger von E. Weiß.

Dr. H. H. Turner, Direktor der Sternwarte zu Oxford, wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu Paris ernannt.

Professor J. W. Young an der Universität von Princeton wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Illinois ernannt.

Dr. Zoretti, Professor am Lyzeum zu Rochefort, wurde zum „Maître de conférences“ der Mathematik an der Universität Grenoble ernannt.

Ruhestand.

Professor Dr. E. Weiß, Direktor der Universitäts-Sternwarte zu Wien, tritt mit Schluß des gegenwärtigen Semesters nach Erreichung der Altersgrenze und Absolvierung des Ehrenjahres von der Lehrtätigkeit zurück.

Professor Dr. Th. Reye an der Universität Straßburg i. E. tritt mit Schluß des gegenwärtigen Semesters in den Ruhestand.

Gestorben:

Dr. L. Cruls, Direktor der Sternwarte zu Rio de Janeiro, ist zu Paris im Alter von 60 Jahren gestorben.

Professor Dr. H. Joly, Professor der Mathematik an der Universität Lausanne, ist daselbst im Alter von 48 Jahren gestorben.

Dr. E. Ladenburg, Privatdozent der Physik an der Universität Berlin, ist am 14. Juni d. J. im Alter von 29 Jahren bei einer Segelfahrt auf dem Müggelsee verunglückt.

5. Vermischtes.

Ein Gauß-Turm. Auf dem Hohenhagen bei Dransfeld, dem höchsten Berge Südhannovers, will man, wie die Tageszeitungen melden, zu Ehren von Gauß einen Turm errichten, der den Namen „Gauß-Turm" erhalten soll. Auf der höchsten Spitze des Berges befand sich das trigonometrische Signal, das einen Punkt des von Gauß bei der Triangulierung zwischen den Städten Göttingen und Altona zugrunde gelegten geodätischen Dreiecks bildete. Der bei diesen Messungen von Gauß benutzte Steinblock ist noch erhalten und als Gauß-Stein, hoch aufgerichtet, auf dem Hohenhagen zu sehen. Am 30. April u. J., dem Geburtstage Gauß', soll der Grundstein zu dem Turme gelegt werden. Der durch freiwillige Beiträge begründete Turmbau-Fonds ist bereits auf 8000 Mark angewachsen.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Von der **Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften** erschien kürzlich in der deutschen Ausgabe Band IV 2 I, Heft 4, enthaltend:

Theorie der hydraulischen Motoren und Pumpen. Mit 20 Textfiguren. Von M. Grübler in Dresden.

Theorie des Schiffes. (Mit einem Anhange: Hydrodynamik des Schiffes von C. H. Müller in Göttingen.) Von A. Kriloff in St. Petersburg.

Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band IV_2 I = IV, 3. Teilband.

Mit diesem Hefte ist der 3. Teilband des IV. Bandes vollständig.

Einbanddecken liefert der Verlag zu wohlfeilem Preise.

G. H. Chandler, Elements of the infinitesimal calculus. Third edition, rewritten. First thousand. New York 1907, John Wiley & Sons.

Mit dem vorliegenden Buche wünscht der Verfasser, der als Professor der angewandten Mathematik an der Mc Gill Universität zu Montreal wirkt, den Anfängern, und besonders den Studierenden der Ingenieurwissenschaft und anderer Zweige der angewandten exakten Wissenschaften, eine Einführung in die Infinitesimalrechnung darzubieten. Der Erfolg des Werkes in seiner Heimat gibt Zeugnis davon, daß es seine Absicht in vorzüglichem Maße erreicht hat.

In der Tat verdient das Chandlersche Buch aber darüber hinaus die Aufmerksamkeit aller derer, die sich mit den Anwendungen der Infinitesimalrechnung als Lehrer oder Lernende zu beschäftigen haben. Nach Entwicklung der Lehre von den Grenzwerten wird alsbald fortgesetzt den bei den praktischen Anwendungen üblichen Prozessen Beachtung geschenkt, wie auch viele Beispiele behandelt und Aufgaben zur eigenen Übung des Lesers angegeben sind. Dementsprechend ist von graphischen Darstellungen reichlich Gebrauch gemacht worden. Es finden ferner im Hinblick auf die Anwendungen die Fourierschen Reihen, die angenäherte Integration und die elliptischen Integrale eine kurze auf die praktischen Bedürfnisse zugeschnittene Behandlung. In vier Anhängen werden die Partialbrüche, die Konstruktion von Kurven, die hyperbolischen Funktionen und die mechanische Integration behandelt, und zum Schluß sind acht Tabellen angefügt. Diese kurzen dreistelligen Tafeln enthalten: 1. Potenzen und natürliche Logarithmen; 2. und 3. Kreisfunktionen;

4. Hyperbolische Funktionen; 5. Lambdafunktion; 6. Gammafunktion; 7. Erstes und 8. Zweites elliptisches Integral. Auch diese Tabellen sollen natürlich der rechnerischen Praxis dienen.

Einige Eigenheiten sind z. B. folgende: der Verfasser schreibt $x \doteq 2$, um anzudeuten, daß sich x dem Werte 2 als Grenze nähert; er benutzt — dem Vorgange von Echols folgend — das Symbol $\mathcal{L}$, um den Grenzwert von einer Größe zu bezeichnen, schreibt also z. B. $\mathcal{L}_{\theta \doteq 0}\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = 1$. Daß die Funktionen sec, cosec, sech, cosech eine besondere Behandlung finden, daß ferner arcsin x als $\sin^{-1} x$ geschrieben wird usf., sind anscheinend festgewurzelte Eigentümlichkeiten aller englisch schreibenden Mathematiker. G.

H. Burkhardt, Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. 2. Heft. In zwei Halbbänden. I. Halbband [XII u. 894 S.] II. Halbband [III, S. 895—1804.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Als ich vor Jahren die Aufgabe übernahm, für die Enzyklopädie die Artikel über trigonometrische Reihen usw. beizusteuern, schien es mir erforderlich, die verschiedenen naturwissenschaftlichen Fragestellungen zu besprechen, die auf solche Reihen geführt haben. Das erwies sich als viel weiter greifend als irgend jemand voraussehen konnte.

Vor allem: die traditionelle Auffassung, daß die Lehre von diesen Reihen aus dem Problem der Saitenschwingungen entsprungen sei, ist nur halb richtig: daneben hat auf Entwicklungen analytischer Funktionen einerseits die astronomische Störungstheorie, andererseits die Ersetzung der Variabeln in einer Potenzreihe durch eine Größe vom absoluten Betrag 1 geführt. Weiter stellte sich heraus, daß über die wirkliche Verwendung endlicher trigonometrischer Reihen eine ungemein ausgebreitete und zerstreute Literatur von astronomischer, physikalischer, geophysikalischer, physiologischer Seite vorliegt. Über alle diese Dinge ist hier zum erstenmal einiger Überblick zu erreichen gesucht. Weiter sind dann physikalische Untersuchungen besprochen, zuletzt Elektrizitätsleitung, soweit sie ohne Berücksichtigung der allgemeinen elektrodynamischen Gleichungen behandelt werden kann. Bei dieser ist mit dem Jahre 1890 abgebrochen, nicht als ob damit irgendwie ein bestimmter Einschnitt charakterisirt werden sollte. Aber der ursprüngliche Plan, diesen Bericht erst fertig zu machen, ehe an die Enzyklopädieartikel gegangen würde, erwies sich als unausführbar: die Abonnenten der Enzyklopädie haben ein Recht auf Abschluß des Halbbandes, für den ich noch verantwortlich bin.

So übergebe ich einstweilen, was bis jetzt vorliegt, der Öffentlichkeit, in der Hoffnung, daß es auch so sich nützlich erweisen wird.

Zürich. H. Burkhardt.

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band I. Mit 27 Textfiguren. [XII u. 381 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Unter „Geometrie der Kräfte“ wird eine Disziplin verstanden, welche als Seitenstück zu der Geometrie der Bewegung und der Geometrie der Massen

den Begriff der Kraft, losgelöst von allen physiologischen, physikalischen und metaphysischen Merkmalen, in einer rein mathematischen Darstellung zu erfassen strebt. Diese Darstellung bezieht sich zunächst auf den starren Körper und folgt dem historischen Entwicklungsgang, der von Varignon ausgehend über Poinsot, Chasles und Moebius zu Balls Schraubentheorie hinführt. Der Schraubentheorie ist ein großer Teil des Buches gewidmet. Es handelte sich auf der einen Seite darum, die prinzipielle Bedeutung der Schraubentheorie für die Mechanik klarzulegen, auf der anderen Seite aber auch darum, die höchst interessanten Beziehungen zu verfolgen, die jene Theorie mit der Liniengeometrie verknüpfen. Der Verfasser hat sich hierbei bemüht, mit möglichst einfachen Hilfsmitteln auszukommen und nur die Vorkenntnisse vorauszusetzen, die etwa nach zwei Semestern mathematischen Studiums erworben sind. So wendet sich das Buch zunächst an den Lernenden und sucht diesem zu zeigen, wie das, was er in den Vorlesungen über analytische Geometrie gelernt hat, den Weg ebnet einerseits zu weitergehenden geometrischen Untersuchungen, andererseits aber auch zur Grundlegung der Mechanik. Nach dieser letzteren Seite hin wäre die Darstellung unvollständig geblieben ohne die Berücksichtigung der deformierbaren Körper, soweit sie in den geometrischen Rahmen des Ganzen hineinpassen. Auch für deren Theorie galt es, die Grundlagen in einer Form zu geben, die einen leitenden mathematischen Gedanken festhält und sich den Methoden der gewöhnlichen analytischen Geometrie anschmiegt. In seinem Gesamtgehalt darf sich, glaube ich, das Buch, auch wenn die Abgrenzung seines Gegenstandes nicht einer herkömmlichen Festsetzung entspricht, als ein Lehrbuch bezeichnen, das sich dem Studierenden nützlich und förderlich erweisen kann.

Straßburg i. E. H. E. Timerding.

C. Runge, analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Figuren im Text. [IV u. 198 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das Buch ist entstanden aus den Vorlesungen, die der Verfasser 18 Jahre lang an der Technischen Hochschule zu Hannover gehalten hat. Der Stoff mußte so gewählt werden, daß er den Bedürfnissen der Ingenieure entsprach, und dadurch ergab sich einerseits eine Beschränkung, andrerseits aber eine Ausdehnung der Themata, die sich andere Lehrbücher der analytischen Geometrie stellen. Der Verfasser hielt es z. B. für wünschenswert, den Begriff des Vektors einzuführen und zu gebrauchen, ferner die rechnerische Ausführung von Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal gemacht werden können, ausführlich zu behandeln. Ausführlich werden auch die Abbildungen der Ebene, Verschiebung, Drehung, ähnliche, affine, perspektivische Abbildungen analytisch formuliert und dabei die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises abgeleitet.

Göttingen. C. Runge.

O. Behrendsen und **E. Götting,** Professoren am Kgl. Gymnasium zu Göttingen, **Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen.** In 2 Stufen. A. Unterstufe. Mit 280 Figuren im Text. [VII u. 254 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Die modernen Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts auf höheren Schulen, die in den sogenannten „Meraner Lehrplänen" einen an-

genäherten Ausdruck gefunden haben, können ohne geeignete Lehrbücher nicht zu einer gedeihlichen Weiterentwicklung gelangen.

Die Verfasser, die in der Lage waren, ihren Unterricht im Sinne der Kleinschen Reformideen seit einer Reihe von Jahren zu gestalten, haben sich entschlossen, ihre dabei gesammelten Erfahrungen in Form eines Lehrbuches zu veröffentlichen. Unter sehr wesentlicher Verkürzung des bisherigen dogmatischen Lehrgebäudes suchen sie alle mathematische Erkenntnis tunlichst auf Anschauung zu basieren. Der Funktionsbegriff wird schon frühzeitig entwickelt und benutzt, graphische Darstellungen werden sehr bald eingeführt und ausgiebig verwendet, wie überhaupt die geometrische Interpretation in allen Entwicklungen die Hauptrolle spielt. Das Buch wird auf diesem Wege allmählich und völlig organisch in die Anfänge der analytischen Geometrie und in die Infinitesimalrechnung hineinwachsen und nicht die Differential- und Integralrechnung dem in alter Form erteilten Unterricht unvermittelt aufsetzen.

Göttingen. BEHRENDSEN. GÖTTING.

---

2. Bücherschau.

Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt von P. Stäckel und W. Ahrens. Mit 1 Bildnis. [XII u. 184 S.] Leipzig 1908, ℳ 8.—.

Gans, R., Einführung in die Theorie des Magnetismus. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] Leipzig 1908. ℳ 2.40.

Graf, J. H., Einleitung in den Gebrauch des freien Integrationsweges bei bestimmten Integralen. Bern 1908. ℳ 1.20.

Leibniz, Über die Analysis des Unendlichen. Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G. Kowalewski. Leipzig 1908. ℳ 1.60.

Lilienthal, R. v., Vorlesungen über Differentialgeometrie. 1. Band. Kurventheorie. Mit 26 Figuren im Texte. [VI u. 368 S.] Leipzig 1908. ℳ 12.—.

Müller, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. 1. Band. Mit 273 Figuren und 3 Tafeln. [XIV u. 368 S.] Leipzig 1908. ℳ 12.—.

Prüsmann, R., Über lineare Gravitationsprozesse. Programm. Berlin 1908. ℳ 1.—.

Righi, A., Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Jonen, Elektronen). Aus dem Italienischen von B. Dessau. 2. Auflage. Leipzig 1908. ℳ 4.80.

Schaefer, Cl., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Mit 1 Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] Leipzig 1908. ℳ 3.40.

Voigt, W., Magneto- und Elektrooptik. Mit 75 Figuren im Text. [XIV u. 396 S.] Leipzig 1908. ℳ 14.—

Wagner, K. W., Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Mit 23 Textfiguren. [IV u. 109 S.] Leipzig 1908. ℳ 2.40.

---

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Archiv der Mathematik und Physik. 3. Reihe. 13. Band. 3. Heft.

Heger, Zur Geometrie auf der Kugel. Vogt, Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen. Safford, The potential equation and p-function curves. Kölmel, Über gewisse Transformationen von ebenen Kurven dritter Ordnung. Jung, Über die Lage der Hauptträgheitsachsen von Punktsystemen in der Ebene. Rezensionen.

Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 8. Band. 4. Heft.

Segre, Monge e le congruenze generali di rette. Rudio, Friedrich Hultsch. Amodeo, Sul corso di storia delle matematiche fatto nell' università di Napoli nel biennio 1905/6—1906/7. Eneström, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Anfragen. Rezensionen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 134. Heft 1.

Jolles, Primäre und sekundäre Räume einer linearen Strahlenkongruenz. Bauer, Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen. Noether, Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 134. Heft 2.

Furtwängler, Über die Klassenzahlen Abelscher Körper. Perron, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Thomé, Über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten. Thomé, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Frank, Über die Bahnkurven der Mechanik.

Mathematische Annalen. 65. Band. 4. Heft.

Von der Mühll, Zum Andenken an Adolph Mayer. Hausdorff, Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. Jourdain, On the multiplication of alephs. Jourdain, On those principles of mechanics which depend upon processes of variation. Kowalewski, Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Stäckel, Ausgezeichnete Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels. Bohl, Zur Theorie der trinomischen Gleichungen. Pasch, Über binäre bilineare Formen. Mason, On the linear differential equation of hyperbolic type.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 56. Band. 2. Heft.

Tolle, Zur Keplerschen Bewegung. Wieghardt, Über Spannungsverteilungen in Balken aus Eisenbeton. Jatho, Untersuchungen zur Statik des Stabpolygons, insbesondere die Gestaltbestimmung betreffend. Schilling, Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive. Bücherschau. Technisches Abhandlungsregister.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39. Jahrgang. 1.—3. Heft.

Hagge, Ein merkwürdiger Kreis des Dreiecks. Pfaff, Extreme Kegelschnittssehnen. Janisch, Ableitung der Mollweideschen Formeln oder des Gaußschen Doppelsatzes und des Tangentensatzes. Dörrie, Über das Ausziehen der Quadratwurzel. Glauer, Stetige Teilung und quadratische Gleichungen. Koppe, Zur Erklärung der Gezeiten. Lorey, Freiere Gestaltung und Privatstudien im mathematischen Unterricht der oberen Klassen. Großmann, Bericht über eine in Basel veranstaltete Besprechung der Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Norrenberg, Erster mathematisch-naturwissenschaftlicher Ferienkursus zu Münster am 13.—19. Oktober 1907. Stübler,

Über Brennlinien durch Reflexion. Urban, Die Verwendung von e im mathematischen Unterrichte. Janisch, Zur Anwendung der Napierschen Regel und des Kotangentensatzes. Schröder, Einige geometrische Herleitungen von goniometrischen Formeln. Aufgaben-Repertorium. Literarische Berichte.

L'Enseignement Mathématique. Xe Année. Nr. 4.

Smith, L'enseignement mathématique dans les écoles secondaires aux États-Unis. Fehr, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse. Andrade, Le premier livre de la géométrie naturelle. Barbette, Sur l'équivalence des équations. Mélanges et Correspondance.

Nouvelles Annales de Mathématique. 4me Série. Tome VIII. Juin 1908.

Baire, Étude sur les coniques polaires des cubiques planes. Juhel-Rénoy, Sur l'application des déterminants à la géométrie. Deltour, Continuants: applications à la théorie des nombres. Bibliographie.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 2e Année. N° 16. N° 17. Juin, Juillet 1908.

Marty, Châtelet, Sur les axes de symétrie du cube. Marotte, Les mathématiques et la physique dans les sections littéraires du second cycle. Junge, Les logarithmes des base 1,01. Blutel, Sur une démonstration de la règle de l'Hospital. Lefèvre, L'enseignement de la géométrie dans les lycées de jeunes filles.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 6. Part 4.

Young, On the inequalities connecting the double and repeated upper and lower integrals of a function of two variables. Hardy, Generalisation of a theorem in the theory of divergent series. Western, An extension of Eisenstein's law of reciprocity. Young, Oscillating successions of continuous functions.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volume XIV. Nr. 9.

Cole, The April meeting of the American Mathematical Society. Slaught, The April meeting of the Chicago Section. Heinrich Maschke. Dickson, Criteria for the irreducibility of a reciprocal equation. Shaw, A new graphical method for quaternions. Wilson, Logic and the continuum. Notices.

Bulletin of the American Mathematical Society. vol. XIV, Nr. 10.

Kasner, The inverse of Meusnier's theorem. Saurel, On the distance from a point to a surface. Lambert, On the solution of algebraic equations in infinite series. Lunn, The deduction of the electrostatic equations by the calculus of variations. Moore, The fourth international congres of mathematicians. Notices.

Annali di Matematica. Serie III. Tomo XV. Fasc. 1.

Cerruti, Le matematiche pure e miste nei primi dodici congressi della Società Italiana per il progresso delle scienze. Lauricella, Sulle equazioni integrali. Tonelli, I polinomi d'approssimazione di Tchebychev.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXVI. Fasc. 1. 2.

Loria, L'opera geometrica di A. Mannheim. Stuyvaert, Deuxième congruence linéaire de cubiques gauches. Koenigsberger, Zur Konvergenz der Potenzreihen algebraischer Funktionen. Jung, Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen. Medici, Sui gruppi conformi. Noether, Poincaré, Segre, Relazione del concorso internazionale per la „Medaglia Guccia". Poincaré, L'avenir des mathématiques. Landau, Beiträge zur analytischen Zahlentheorie.

Supplemento al Periodico di Matematica. Anno XI. 1807/08.

Finzi, Una identità goniometrica. Candido, Sulla equazione $\sqrt[3]{f_1}+\sqrt[3]{f_2}+\sqrt[3]{f_3}=0$. Matteotti, Un teorema per calcolare i prodotti di certi numeri. Nannel, Di

alcune notevoli curve piane. Ferrari, Sui numeri perfetti. A proposito dell' articolo sui numeri perfetti. Finzi, Sulle espressioni di sen $n\alpha$ e di cos $n\alpha$ in funzione di cos α o di sen α. Calvitti, Una lezione sui numeri decimali. Pesci, I due casi ambigui della trigonometria. Morale, Un metodo elementare di divisibilità per 7. Candido, Sul numero π. Ferrari, Risoluzione dell' equazione $x_0^2 + A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = x_{n+1}^2$. Pesci, Sui metodi per dedurre le formule di trigonometria piana da quelle della trigonometria sferica.

4. Kataloge.

J. Eckard Müller, Halle a. S., Barfüßerstr. 11. Katalog Nr. 131. Naturwissenschaft, Mathematik, Physik usw.

The Cambridge University Press, London. Bulletin Nr. XIV. June 1908.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Schulbücher werden nur ausnahmsweise besprochen. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

F. Amodeo, Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nel rinascimento (XIII—XVI secolo). Napoli 1908.

S. Arrhenius, Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten. Das Werden der Welten. Neue Folge. Aus dem Schwedischen übersetzt von L. Bamberger. Mit 28 Abbildungen. Leipzig 1908, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

M. Bôcher, Introduction to higher algebra. Prepared for publication with the cooperation of E. P. R. Duval. New York 1907, The Macmillan Company. $ 1.90.

L. Caffaratti, Sui campi elettromagnetici puri. Pisa 1908.

E. Dintzl, Einführung in die Funktionenlehre. Für Schüler der oberen Klassen an Mittelschulen dargestellt. Sonderabdruck aus dem Jahresberichte des K. K. Erzherzog Rainer-Gymnasiums in Wien. Wien 1908, Selbstverlag des Erzherzog Rainer-Gymnasiums.

A. Emch, Kinematische Gelenksysteme und die durch sie erzeugten geometrischen Transformationen. Mit Anwendungen. Solothurn 1906/07.

A. Emch, Mathematik in Natur und Kunst. Solothurn 1906.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV, 2, I. Heft 4. [Inhalt: Grübler, Theorie der hydraulischen Motoren und Pumpen. Kriloff, Theorie des Schiffes; mit einem Anhange: C. Müller, Hydrodynamik des Schiffes.] [XI u. S. 473—593.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 4.20.

R. Flatt, Der Unterricht im Freien auf der höheren Schulstufe mit durchgeführten Beispielen aus verschiedenen Unterrichtsgebieten (Naturwissenschaften und Geographie, Zeichnen und Mathematik, Geschichte und Sprachen, körperliche Erziehung). In Verbindung mit Lehrern der obern Realschule zu Basel herausgegeben. Frauenfeld 1908, Huber & Co.

R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. [Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, herausgeg. von E. Jahnke. Bd. 1.] Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.

Chr. Gruber, Wirtschaftsgeographie mit eingehender Berücksichtigung Deutschlands. Neu bearbeitet von H. Reinlein. Zweite Auflage. Mit 12 Diagrammen und 5 Karten. [XII u. 242 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 2.40.

G. Häring, Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene für die Oberstufe der höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit 48 in den Text gedruckten Abbildungen. München 1908, R. Oldenbourg. ℳ 0.90.

E. Hilb, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Erlangen 1908.

Fr. Junker, Höhere Analysis. II. Teil. Integralrechnung. Dritte, verbesserte Auflage. [Sammlung Göschen.] Leipzig 1908, G. J. Göschen. M. 0.80.

W. Kreft, Beiträge zur Goursatschen Transformation der Minimalflächen. Dissertation. Münster 1908.

Die Kultur der Gegenwart. Teil II. Abteilung V, 1. Staat und Gesellschaft der neueren Zeit (bis zur französischen Revolution). Von Fr. v. Bezold, E. Gothein, R. Koser. [VI u. 349 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 9.—, geb. ℳ 12.—.

J. G. Leathem, The elementary theory of the symmetrical optical instrument. London 1908, Cambridge University Press. 2s.6d.

O. Lesser, Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der höheren Schulen. Eine Sammlung von Materialien für die Hand des Lehrers. Wien 1908, F. Tempsky. M. 5.—.

T. Levi-Civita, Sui campi ellettromagnetici puri dovuti a moti piani permanenti. Venezia 1908.

Oliver Lodge, Leben und Materie. Berlin 1908, Karl Curtius.

G. Loria, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione accrescinta di uno sguardo allo sviluppo della geometria in quest' ultimo decennio. Torino 1907, Carlo Clausen Hans Rinck Succ.

Emil Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. 2 Bände. I. Band. Mit 273 Figuren im Text und 3 Tafeln. [XIV u. 368 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. M. 12.—.

M. Noether, Geschichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen im ersten Jahrhundert ihres Bestehens. 1808—1908. Erlangen 1908, Max Mencke.

Emmy Noether, Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form. Dissertation. Erlangen 1908.

E. D. Perry, Die amerikanische Universität. [Aus Natur und Geisteswelt, Band 206.] Mit 22 Abbildungen im Text. [IV u. 96 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1.—, geb. ℳ 1.25.

C. Prang, Determinanten. I. Hauptsätze über Determinanten. II. Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes unter Anwendung der Determinanten. Zweite Auflage. Berlin 1908, Mayer & Müller. ℳ 2.—.

J. B. Shaw, Synopsis of linear associative algebra. A report on its natural development and results reached up to the present time. Washington 1907, Published by the Carnegie Institution of Washington.

Cl. Schaefer, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. [Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, herausgeg. von E. Jahnke. Bd. 3.] Mit 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. M. 3.40.

J. Thomae, Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 182 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 7.80.

K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. [Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, herausgeg. von E. Jahnke. Bd. 2.] Mit 23 Textfiguren. [IV u. 109 S.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.

Cölner Versammlung vom 20. bis zum 23. September 1908.

Sonntag, den 20. September, nachmittags 4 Uhr: Vorstandssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; abends 8 Uhr: Begrüßung in der Bürgergesellschaft.

Montag, den 21. September, vormittags $9\frac{1}{4}$ Uhr: Erste allgemeine Versammlung der Naturforschergesellschaft; nachmittags 3 Uhr: Konstituierung der Abteilung und erste Abteilungssitzung.

Dienstag, den 22. September, vormittags $9\frac{1}{2}$ Uhr: Zweite Abteilungssitzung; nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr: Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Mittwoch, den 23. September, vormittags 9 Uhr: Dritte Abteilungssitzung; nachmittags 4 Uhr: Debatte über die Dresdener Vorschläge, betreffend die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften.

Protokoll der Vorstandssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Cöln am 20. September 1908.

Vorsitzender: Klein.

Es wird die Tagesordnung der am folgenden Tage beginnenden Jahresversammlung und insbesondere der auf den 22. einberufenen Geschäftssitzung beraten.

Protokoll der Mitgliederversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Cöln vom 21. bis zum 23. September 1908.

Erste Sitzung: Montag, den 21. September, nachmittags 3 Uhr.

Schwering begrüßt die Versammlung im Namen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte und Klein als Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Namen dieser. Es wird Schwering zum Vorsitzenden dieser, Klein zum Vorsitzenden der zweiten Sitzung gewählt.

Vorsitzender Schwering.

1. H. Minkowski-Göttingen: Raum und Zeit.
2. G. Hamel-Brünn: Über die Grundlagen der Mechanik.
3. E. Timerding-Straßburg: Die historische Entwicklung des Kraftbegriffs.

Zweite Sitzung: Dienstag, den 22. September, vormittags $9\frac{1}{2}$ Uhr.

Vorsitzender Klein:

1. P. Stäckel-Karlsruhe: Ausgezeichnete Kreiselbewegungen.
2. R. v. Mises-Brünn: Probleme der technischen Hydromechanik.
3. F. Müller-Dresden: Über Pläne zur Herausgabe von Werken Leonhard Eulers.

Es wird Study und, da dieser die Annahme der Wahl ablehnt, Rudio zum Vorsitzenden der dritten Sitzung gewählt.

Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 22. September 1908, nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr.

Vorsitzender Klein.

Der Vorsitzende spricht zunächst sein Bedauern aus, daß es ihm durch eine unvorhergesehene Häufung der Geschäfte in den Osterferien d. J., insbesondere durch seinen Eintritt in das preußische Herrenhaus, unmöglich geworden ist, den in der vorjährigen Versammlung an ihn ergangenen Auftrag, die Deutsche Mathematiker Vereinigung auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom zu vertreten, auszuführen.

Sodann erhält der Schriftführer das Wort und erstattet:

a. Bericht über den Stand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und die Tätigkeit des Vorstandes im ablaufenden Jahre.*

1. Am Schlusse des Jahres 1907 zählte die Deutsche Mathematiker-Vereinigung 712 Mitglieder; davon verstarben im Laufe dieses Jahres 7 (v. Braunmühl, Greiner, Maschke, A. Mayer, Pisati, Pund, Scheibner), 5 Mitglieder traten aus; zu den 700 verbleibenden Mitgliedern kamen 27 neue hinzu. Die Mitgliederzahl beträgt sohin heute 727.

2. Nach einem Kassenbericht unseres Herrn Schatzmeisters vom 14. September 1908 betrug an diesem Tage das Vermögen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ℳ 20063.32, wovon ℳ 16573.55 in nom. ℳ 18000.— 3% D. Reichsanleihe, ℳ 1928.75 in nom. ℳ 2000.— $3\frac{1}{2}$% Leipz. Stadtanl. und ℳ 994.70 in nom. ℳ 1000.— 4% Dresdener Stadtanl. angelegt sind, so daß der Vereinigung jährlich ℳ 650.— an Zinsen aus ihren Wertpapieren zufließen.

3. Unserem Mitgliede Königsberger wurden am 15. Oktober 1907 anläßlich seines 70. Geburtstages die Glückwünsche der Vereinigung durch den Schriftführer persönlich ausgesprochen; der Jubilar hat diesen beauftragt, den Dank dafür der Vereinigung zu entrichten. Reye, der

am 20. Juni 1908 seinen 70. Geburtstag feierte, erklärte sich, da er den Tag nicht in Straßburg zubringe, außerstande, eine Abordnung zu empfangen und wurde daher von dem Vorsitzenden telegraphisch begrüßt.

4. Vorsitzender und Schriftführer haben zu Beginn des Jahres in Cöln mit den dortigen Vertretern der Naturforschergesellschaft persönlich Rücksprache wegen der heurigen Jahresversammlung genommen. Durch ein Mißverständnis wurde jedoch die erste Einladung von Seite der Naturforschergesellschaft ohne nochmaliges Einvernehmen mit der Vereinigung versendet, und es war diese daher genötigt eine besondere Einladung zu erlassen, die im Maihefte des Jahresberichtes veröffentlicht wurde, und von der Abdrücke allen Mitgliedern zugingen. Auf Grund der eingegangenen Anmeldungen und des allgemeinen Programms der Naturforscherversammlung hat sodann der Schriftführer Ende Juli eine Tagesordnung für unsere heurige Versammlung entworfen, die im Juli-Augustheft des Jahresberichtes zur Veröffentlichung kam und gleichfalls allen Mitgliedern der Vereinigung in Sonderabdrücken zugesandt wurde. Infolge einer Anregung des Schriftführers hat der Vorstand der Naturforschergesellschaft in seiner Sitzung vom 20. ds. beschlossen, um der Wiederkehr ähnlicher Mißverständnisse, wie sie eben geschildert, vorzubeugen, in seine Geschäftsordnung einen Zusatz aufzunehmen, dahin lautend, daß gewohnheitsgemäß mit der 1. Abteilung die Deutsche Mathematiker-Vereinigung tagt, und daß die Vorbereitungen der Sitzungen dementsprechend von vornherein gemeinsam zu pflegen seien. Es haben sodann andere wissenschaftliche Gesellschaften z. B. die physikalische den gleichen Zusatz für sich beantragt, und der Vorstand hat seiner lebhaften Genugtuung über diese Kooperation der wissenschaftlichen Gesellschaften mit der Naturforschergesellschaft Ausdruck gegeben.

b. Bericht über die literarischen Unternehmungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

1. Jahresbericht. Gemäß dem im vorigen Jahre gefaßten Beschlusse wurden für den 17. Band zwei besondere Paginierungen eingerichtet, eine für die wissenschaftlichen Aufsätze, die andere für die Mitteilungen und Nachrichten. Solange keine gegenteiligen Wünsche laut werden, wird diese Neuerung auch für die folgenden Bände beibehalten werden.

Als 2. Ergänzungsband ist in diesem Frühjahr der 2. Teil des Schoenfliesschen Berichtes über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten erschienen. Weiter kann, nachdem der Burkhardtsche Bericht über Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen,

der das 2. Heft von Band 10 der Jahresberichte bildet, mit seiner 6. Lieferung einen vorläufigen Abschluß gefunden hatte, jetzt auch das 1. Heft dieses Bandes, das neben der Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Gutzmer ein Generalregister der ersten 10 Bände von Wölffing enthält, ausgegeben und damit der 10. Band endlich fertig gestellt werden. Das Manuskript des Schlesingerschen Referates über die Entwicklung der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865 ist bei der Druckerei eingelaufen.

2. Enzyklopädie: Dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom wurde der damals soeben fertig gewordene 1. Teilband des IV. Bandes (Mechanik) überreicht; der 3. Teilband ist noch im Laufe dieses Sommers fertig gestellt worden. Außerdem erschienen seit der letzten Jahresversammlung Hefte des III., IV. und VI. Bandes.

3. Schröderscher Nachlaß: Eugen Müller legt das erste Heft des „Abriß der Algebra der Logik" vor, teilt mit, daß das 2. Heft in einigen Monaten erscheinen werde, und spricht die Hoffnung aus, das 3. (Schluß-) Heft der nächsten Versammlung überreichen zu können.

c. Bericht der statistischen Kommission.

Von Seite der statistischen Kommission wird auf den ausführlichen Artikel zur Statistik des mathematischen Studiums von Schoenflies hingewiesen, der im ersten Hefte des heurigen Jahresberichtes erschienen ist. Gutzmer beklagt die Ungleichmäßigkeit der Angaben in den Personalverzeichnissen der Universitäten, welche derartige statistische Arbeiten ungemein erschweren und bittet den Vorstand, Anträge an die Behörden, welche die statistische Kommission zur Hebung dieser Mißstände etwa für nötig erachtet, nachdrücklich zu unterstützen.

d. Bericht der bibliographischen Kommission.

Von Seite der bibliographischen Kommission wird auf die Veröffentlichungen von Felix Müller im Jahresberichte: „Über eine Bibliographie L. Eulers vom Jahre 1780 und Zusätze zur Euler-Literatur" und „Umfang der einzelnen Abhandlungen Leonhard Eulers" hingewiesen. Auf Vorschlag Gutzmers wird die Bibliographische Kommission aufgelöst und Felix Müller von der Euler-Kommission als Beirat kooptiert.

e. Riemanns Grabstätte in Biganzolo.

In der Geschäftssitzung zu Stuttgart am 20. September 1906 hat der Schriftführer über seinen Besuch des Grabes Riemanns auf dem Friedhofe in Biganzolo berichtet und mitgeteilt, daß die Gemeinde Biganzolo beabsichtige, diesen Friedhof durch Anfügung einer Arkadenreihe an

der Westseite zu vergrößern, auch bereit sei, eine der dort entstehenden Kapellen gegen Erstattung der Kosten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zur Errichtung eines Denkmals Riemanns zu überlassen. Die Versammlung beauftragte damals den Schriftführer, die Angelegenheit in diesem Sinne weiter zu verfolgen, und reservierte zu dem Ende den sich auf ℳ 933.80 beziffernden Aktivrest des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses. Der Schriftführer hat sich durch Vermittlung von Prof. Geiser in Zürich an die Familie Züst in Intra mit der Bitte um Unterstützung bei den Verhandlungen mit der Gemeinde Biganzolo gewendet. Inzwischen hatte unser Mitglied Diestel die Freundlichkeit gehabt, sich gelegentlich eines Aufenthaltes in Pallanza gleichfalls mit der Angelegenheit zu beschäftigen; er hat mehrere photographische Aufnahmen gemacht, von denen eine ein ziemlich deutliches Bild des jetzigen Zustandes gibt, und hat einen Bekannten in Pallanza veranlaßt, in diesem Frühjahre über den Stand der Erweiterungsarbeiten zu berichten. Danach waren diese Arbeiten damals noch nicht in Angriff genommen. Der Schriftführer bittet daher die Versammlung, ihre Zustimmung dazu zu geben, daß er die Angelegenheit in der bisherigen Weise im Auge behalte und erst, wenn die Erweiterungsarbeiten vorgenommen sind, Schritte tue. Da er es aber nicht für ausgeschlossen hält, daß bis dahin noch längere Zeit verstreicht, so stellt er weiter den Antrag, daß der reservierte Betrag, der inzwischen mit Zinsen auf ℳ 1020.65 angewachsen ist, nicht weiter besonders verwaltet, sondern dem Vermögen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, die ja doch später die Kosten zu tragen hat, einverleibt werde. Die Versammlung beschließt demgemäß.

f. Mathematiker-Archiv.

Klein berichtet, daß die Göttinger Universitätsbibliothek sich bereit erklärt hat, wissenschaftlich interessante Manuskripte und Briefe, welche ihr von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung übergeben werden, gesondert aufzubewahren, und daß bereits die Niederlegung eines Briefes Steiners an Jacobi geschehen ist.

g. Beschaffung ausländischer mathematischer Literatur.

Gemäß dem Beschlusse der Dresdener Jahresversammlung sind der Schatzmeister der Vereinigung und der Herausgeber des Jahresberichtes wegen der regelmäßigen Anzeige der ausländischen mathematischen Literatur mit der Firma K. F. Koehlers Antiquarium in Leipzig in Verhandlung getreten. Diese Firma hat sich bereit erklärt, dem Herausgeber regelmäßig eine Zusammenstellung dieser Literatur zur Verfügung zu stellen; auch ist sie bereit, die angekündigten Werke

nach Möglichkeit den Mitgliedern der Vereinigung zur Ansicht zu senden bzw. zu beschaffen. Die Umrechnung der Beträge erfolgt dabei nach dem Satze: 1 Fr. (Lire) = 80 Pf., 1 sh = 1 *M*, 1 $ = 4 *M*. Gesuche um Ansichtssendungen bzw. Kaufaufträge wolle man direkt richten an: K. F. Koehlers Antiquarium, Leipzig, Kurprinzstraße 6. Ein erstes Verzeichnis ist im Junihefte des Jahresberichtes (S. 104) erschienen. Die Versammlung spricht den Wunsch aus, daß das Unternehmen in der begonnenen Weise fortgesetzt werde.

h. Deutscher Unterrichtsausschuß.

In der Dresdener Geschäftssitzung waren Klein und Stäckel als Vertreter der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in den Deutschen Ausschuß für naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht gewählt worden. Dieser Ausschuß hat sich am 3. Januar 1908 in Cöln konstituiert und als sein Ziel die Durchführung der Reformvorschläge der früheren Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in allen deutschen Bundesstaaten sowie die weitere Bearbeitung aller damit zusammenhängenden Fragen bezeichnet. Ferner wurde ein Unterausschuß für die Weiterführung der Frage der Lehrerbildung eingesetzt, dem unsere beiden Vertreter angehören, und der am 11. und 12. Juni in Göttingen eine Sitzung abhielt. Eine zweite Sitzung des Gesamtausschusses fand am 19. ds. in Cöln statt, und im Anschlusse daran findet am 23. nachmittags eine Diskussion über Lehrerbildung statt. Der Ausschuß wird einen genauen Bericht über seine Tätigkeit demnächst veröffentlichen. Da Stäckel die Vertretung einer andern Vereinigung übernehmen soll, so wird für diesen Fall als zweites Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Treutlein in den Ausschuß gewählt.

i. Internationaler Unterrichtsausschuß.

Auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom wurde die Einsetzung eines internationalen Unterrichtsausschusses beschlossen, dem die Aufgabe zugeteilt wurde, einen zusammenfassenden Bericht über den bestehenden mathematischen Unterricht in allen Kulturstaaten und über die Ziele der zu erstrebenden Reformen zu verfassen und dem Kongreß in Cambridge vorzulegen; es wurden Klein, Greenhill und Fehr mit der Bildung dieses Ausschusses beauftragt. Es ist in Aussicht genommen, daß neben den eigentlichen Delegierten der einzelnen Länder in diesen ein nationaler Beirat und jüngere Mitarbeiter in Tätigkeit treten. Da die Wahl der Delegierten von den mathematischen Gesellschaften geschehen soll, so ersucht der Vorsitzende, diese Wahl vorzunehmen. Es werden Klein und Treutlein als Beauftragte der Deutschen

Mathematiker-Vereinigung gewählt mit der Vollmacht, gegebenenfalls ein drittes Mitglied zu kooptieren, als nationalen Beirat die Mitglieder des Deutschen Unterrichtsausschusses, soweit sie Mathematiker sind, und jüngere Mitarbeiter nach ihrer Wahl zuzuziehen.

k. Bericht der Euler-Kommission.

Stäckel als Vorsitzender der Euler-Kommission erstattet Bericht über die Tätigkeit der Kommission und stellt im Anschlusse daran den Antrag:

In Anbetracht der großen Bedeutung, die Eulers nie veraltende Werke für den gesamten Umfang der mathematischen Wissenschaft besitzen, erklärt sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung bereit, die von der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft inaugurierte Herausgabe der Werke Eulers wirksam zu unterstützen und stellt aus ihrem Vermögen der genannten Gesellschaft als Beitrag zu den Kosten die Summe von 5000 Frs. zur Verfügung.

Der Antrag wird mit lebhaftem Beifall begrüßt und einstimmig angenommen, worauf Rudio im Namen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft seinen Dank ausspricht.

l. Neuwahlen in den Vorstand. Wahl der Kasserevisoren.

Mit dem 30. September 1908 läuft die Amtsdauer der Vorstandsmitglieder v. Brill und Study ab; an ihrer Stelle werden:

Engel-Greifswald und Schur-Karlsruhe (Straßburg)

für die Zeit vom 1. Oktober 1908 bis zum 30. September 1911 in den Vorstand gewählt.

Als Kasserevisoren werden für dieses Jahr Bruns und Hölder wiedergewählt.

Die nächste Mitgliederversammlung findet im September 1909 in Verbindung mit der Naturforscherversammlung zu Salzburg statt.

Dritte Sitzung: Mittwoch, den 23. September, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzender: Rudio.

1. H. Wiener-Darmstadt: Zur Geometrie der binären Formen.
2. H. Reißner-Aachen: Wissenschaftliche Probleme aus der Flugtechnik.
3. H. Jung-Marburg, Über algebraische Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.

Nachmittags 4 Uhr fand die in Aussicht genommene Debatte über die Dresdener Vorschläge, betreffend die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften statt, wobei Klein referierte.

Protokoll der Vorstandssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Cöln am 22. September 1908.

Vorsitzender: Klein.

Es wird Krause zum Vorsitzenden für die Zeit vom 1. Oktober 1908 bis zum 30. September 1909 gewählt.

Cöln, den 23. September 1908.

Klein, Vorsitzender. Krazer, Schriftführer.

Bericht der Euler-Kommission an den Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hatte in der Geschäftssitzung zu Dresden am 18. September 1907 (vgl. diese Jahresberichte Bd. 16, S. 570) eine *Euler-Kommission*, bestehend aus Krazer, Pringsheim und Stäckel, eingesetzt und diese beauftragt, sich mit Rudio als dem Vorsitzenden der Schweizerischen Euler-Kommission in Verbindung zu setzen, um wenn möglich schon dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom Vorschläge für eine Gesamtausgabe der Werke Eulers unterbreiten zu können.

Die Euler-Kommission ist diesem Auftrage sofort nachgekommen, und zwar hat sich nach längeren schriftlichen und mündlichen Verhandlungen mit Rudio ergeben, daß man es in der Schweiz für wünschenswert hielt, es möchte in einer Tagesordnung des Kongresses eine Gesamtausgabe der Werke Eulers empfohlen und die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft zur Leitung des Unternehmens aufgefordert werden. Hierdurch veranlaßt hat Krazer im Namen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 8. April 1908 in der vierten Sektion des römischen Kongresses den Antrag gestellt, dem Kongresse selbst folgende Tagesordnung vorzuschlagen:

> Der vierte Internationale Mathematiker-Kongreß in Rom betrachtet eine Gesamtausgabe der Werke Eulers als ein Unternehmen, das für die reine und angewandte Mathematik von der größten Bedeutung ist. Der Kongreß begrüßt mit Dank die Initiative, welche die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in dieser Angelegenheit ergriffen hat, und spricht den Wunsch aus, daß das große Unternehmen von dieser Gesellschaft in Gemeinschaft mit den Mathematikern der anderen Nationen ausgeführt werde. Der Kongreß bittet die Internationale Association der Akademien und

insbesondere die Akademien zu Berlin und Petersburg, deren glorreiches Mitglied Euler gewesen ist, die genannte Unternehmung zu unterstützen.

Dieser Antrag wurde von der vierten Sektion einstimmig angenommen, und darauf gelangte in der allgemeinen Sitzung am 11. April auch die Tagesordnung selbst einstimmig zur Annahme.

Gestützt auf die Tagesordnung des römischen Kongresses hat die Schweizerische Euler-Kommission eingehend darüber beraten, nach welchen Grundsätzen die Euler-Ausgabe durchzuführen sei, und wie hoch sich die Kosten etwa belaufen würden. Nachdem sie dem Zentralkomitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft Bericht erstattet hatte, stellte dieses die folgenden Anträge, die in der Jahresversammlung zu Glarus am 31. August einstimmig zur Annahme gelangten:

I. Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft erklärt sich bereit, eine Gesamtausgabe der Werke Eulers ins Leben zu rufen, unter der Voraussetzung, daß dieses Unternehmen durch die hohen eidgenössischen und kantonalen Behörden sowie durch in- und ausländische gelehrte Körperschaften und Freunde der Wissenschaft unterstützt werde, und daß die zur Durchführung erforderlichen wissenschaftlichen Kräfte ihre Mitwirkung zur Verfügung stellen.

II. Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft beauftragt die Euler-Kommission in Verbindung mit dem Zentralkomitee mit der Durchführung der Vorarbeiten.

III. Nach Beendigung der Vorarbeiten ist ein abermaliger Beschluß der Gesellschaft notwendig, um das Unternehmen in Angriff nehmen zu können.

Der Vorsitzende der Deutschen Euler-Kommission, Stäckel, der an der Versammlung zu Glarus teilnahm, erklärte darauf, daß die Deutsche Mathematiker-Vereinigung diesen Beschluß mit Sympathie aufnehmen und ihrerseits das Unternehmen nach wie vor tatkräftig unterstützen werde.

Die Euler-Kommission ist der Ansicht, daß eine solche Unterstützung auf dreierlei Weise geschehen könne.

Einen wichtigen Teil der Vorarbeiten bildet die Aufstellung eines genauen *Verzeichnisses der Eulerschen Schriften*, aus dem vor allem die chronologischen Daten und der Umfang der Veröffentlichungen ersichtlich werden; auch muß festgestellt werden, in welches Gebiet oder in welche Gebiete die einzelnen Abhandlungen gehören, was aus dem Titel allein in vielen Fällen nicht zu erkennen ist. Die Verzeichnisse von Fuß und Hagen genügen diesen Anforderungen nicht, und die Kommission

hat es daher mit Freude begrüßt, daß Eneström sich bereit erklärte, einen solchen Index auszuarbeiten.

Nach dem Plane Eneströms soll der Index aus drei Abteilungen bestehen. Die Hauptabteilung ist chronologisch nach den Druckjahren geordnet und bringt vollständige bibliographische Angaben. In der folgenden Abteilung erscheinen die Schriften in der Reihenfolge, in der sie verfaßt worden sind; die Titel werden hier, unter Verweisung auf die Hauptabteilung, in abgekürzter Form gegeben. Die dritte Abteilung, bei welcher für die Titel dasselbe gilt, ist systematisch nach dem Inhalt geordnet. Den Schluß bildet ein Sachregister, etwa wie das Sachregister des Inhaltsverzeichnisses eines Bandes der dritten Folge der Bibliotheca mathematica. Den Umfang eines solchen Verzeichnisses schätzt Eneström auf etwa 20 Druckbogen im Format der Ergänzungsbände zu den Jahresberichten der Vereinigung.

Die Verhandlungen mit Eneström führten dazu, daß die Euler-Kommission unter dem 11. Mai an den Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung den folgenden Antrag stellte:

> Der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wolle bewilligen, daß der von Herrn Eneström in Stockholm zu verfassende Index der Eulerschen Schriften als Ergänzungsband der Jahresberichte veröffentlicht wird.

Dieser Antrag wurde einstimmig angenommen. Da Eneström seit Jahren Material gesammelt hatte, ist von ihm schon die Hauptabteilung fertig gestellt worden, und man darf hoffen, daß mit dem Druck im Oktober begonnen werden kann.

Zu den Vorarbeiten gehört ferner, daß die zur Durchführung erforderlichen *wissenschaftlichen Kräfte* gewonnen werden, und hierbei rechnen die schweizerischen Mathematiker auf die Hilfe der deutschen Fachgenossen. Es schien daher wünschenswert, daß die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in einer Tagesordnung sich zu einer wirksamen Unterstützung der Euler-Ausgabe bereit erklärte.

Aber eine solche Tagesordnung sollte noch mehr enthalten. Bei dem großen Umfange des Unternehmens, das gegen 40 Bände umfassen wird, macht die *Kostenfrage* gewisse Schwierigkeiten. Es wird zwar beantragt werden, daß der schweizerische Bundesrat und der Kanton Basel sowie durch diplomatische Vermittlung die preußische und die russische Regierung Subventionen bewilligen, allein auch bei einem günstigen Ausfall dieser Aktion werden noch weitere Geldmittel nötig sein, und die schweizerische Euler-Kommission hat deshalb begonnen, auf privatem Wege Sammlungen für einen Eulerfonds zu veranstalten. Ein ungenannter Gönner der Wissenschaft hatte bereits am 24. Oktober 1907

für die Euler-Ausgabe 12000 Frs. zugesagt und im August hat der Verein Schweizerischer Maschinen-Industrieller 2000 Frs. und Herr Dr. F. Sarasin in Basel 1000 Frs. gespendet. Die Euler-Kommission meint, daß auch die Deutsche Mathematiker-Vereinigung sich ihren finanziellen Kräften entsprechend an der Sammlung beteiligen sollte, und bittet daher den Vorstand in der Geschäftssitzung zu Cöln den folgenden Antrag zur Abstimmung zu bringen:

> In Anbetracht der großen Bedeutung, die Eulers nie veraltende Werke für den gesamten Umfang der mathematischen Wissenschaft besitzen, erklärt sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung bereit, die von der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft inaugurierte Herausgabe der Werke Eulers wirksam zu unterstützen und stellt aus ihrem Vermögen der genannten Gesellschaft als Beitrag zu den Kosten die Summe von 5000 Frs. zur Verfügung.

gez. Krazer. Pringsheim. Stäckel.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. August 1908.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Herr Lucien Godeaux, stud. math. in Lüttich, 43 rue des champs.
Herr Oberlehrer Dr. W. Lietzmann in Barmen, Mendelssohnstr. 31.
Herr Dr. H. Thieme, Professor a. d. Oberrealschule in Posen, Naumannstr. 2.

Ausgetreten:

Hermes, O., Dr., Professor a. d. Artillerieschule, Berlin.
Kraft, A., Dr., Schleswig.
Progymnasium Berg-Gladbach.

Adressenänderungen:

Diestel, F., Dr., Oberbibliothekar a. d. Technischen Hochschule, Hannover, Podbielskistr. 327.
Du Pasquier, L. G., Dr., Privatdozent am Eidgen. Polytechnikum, Zürich IV (Schweiz), Landoltstr. 17.
Frizell, A., Professor am Midland College, Atchison, Kansas (U. S. A.).
Hilb, E., Dr., Privatdozent a. d. Universität, Erlangen, Östl. Stadtmauerstr. 12.
Korselt, A., Dr., Realgymnasiallehrer, Plauen i. V., Antonstr. 43.
Meyer, E., Dr., Oberlehrer und Privatdozent, Charlottenburg, Horstweg 33.
Thiersch, F., Gymnasiallehrer, Rothenburg o. T., Untere Schmiedgasse 109.

Viterbi, A., Dr., Privatdozent a. d. Universität, Pavia (Italien), Hotel Central, Via Mazzini.

Wassiliew, A., Dr., Professor a. d. Universität, St. Petersburg (Rußland), Vassili Ostrow 12. Lin. 19.

Young, W. H., M. A., Sc. D., z. Z. Genf (Schweiz), La Nonette, Servette.

Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen. Die Vereinigung hielt Sonntag den 4. Oktober in Baden (Schweiz) ihre neunte Versammlung ab. Seminarlehrer Rüefli (Bern) referierte über: „Größte und kleinste Werte und ihre Behandlung in der Sekundarschule"; Jaccoltet (Lausanne) über den Descartesschen Lehrsatz in der Theorie der algebraischen Gleichungen; Prof. Fehr (Genf) und Dr. Gubler (Zürich) über die Verhandlungen des vierten internationalen Mathematikerkongresses in Rom. Der Vorsitzende, Prof. Fehr, berichtete ferner über die Organisation und den Arbeitsplan einer in Rom eingesetzten internationalen Kommission für den mathematischen Unterricht, die ein übersichtliches Bild über den Stand des mathematischen Unterrichts aller Schulstufen in sämtlichen Kulturländern geben soll.

Aus den weiteren Verhandlungen sei noch die einstimmige Annahme einer Resolution erwähnt, die an die *Eulerkommission* gerichtet werden soll, welche von der schweiz. naturforschenden Gesellschaft kürzlich eingesetzt worden ist: „Eine Gesamtausgabe der Werke und Schriften Eulers, soweit sie wenigstens noch von Bedeutung sind, ist nicht nur von hohem wissenschaftlichem, historischem und patriotischem Interesse, sondern sie wird auch anregend und befruchtend auf den Unterricht wirken und ist daher sehr zu begrüßen."

Société mathématique de France. Im Jahre 1908—9 finden die Sitzungen an folgenden Tagen statt: 1908 am 28. Oktober, 11. und 25. November, 9. und 23. Dezember; 1909 am 13. und 27. Januar, 10. und 24. Februar, 10. und 24. März, 21. und 28. April, 12. und 26. Mai, 9. und 23. Juni und am 7. Juli.

---

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Technische Hochschule zu Dresden. Die Preisaufgabe der allgemeinen Abteilung für das Jahr 1907: „Es sind die Bedingungen anzugeben, unter denen die ebenen Fachwerke beweglich werden, und zwar für alle Zwischenstufen von der unendlich kleinen bis zur endlichen Beweglichkeit. Diese sind ferner, soweit angängig, geometrisch zu deuten und für die bekannteren Fälle des einfachen Fachwerkes von 6 und 8 Knotenpunkten ausführlicher zu spezialisieren", hatte zwar eine Bearbeitung gefunden, doch konnte dieser der Preis nicht zuerkannt werden.

---

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Wintersemester 1908/9 angekündigten Vorlesungen aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. (Schluß.)

Aachen. Blumenthal, Höhere Mathematik I; Funktionentheorie und ihre Anwendungen. Furtwängler, Höhere Mathematik II und III; Elemente der Differential- und Integralrechnung; Ausgewählte Kapitel der Mathematik (Praxis der

Differentialgleichungen). Kötter, Darstellende Geometrie; Elemente der darstellenden Geometrie; Graphische Statik; Ausgewählte Kapitel aus der graphischen Statik. Reißner, Mechanik I und II; Ausgewählte Teile der technischen Mechanik. Wüllner, Physik in mathematischer und experimenteller Behandlungsweise. Seitz, Mechanische Wärmetheorie; Physikalische Technik. Polis, Allgemeine Meteorologie; Klimatologie; Meteorologische Technik.

Braunschweig. Dedekind, Elemente der Zahlentheorie: Einleitung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fricke, Analytische Geometrie und Algebra; Differential- und Integralrechnung I und II; Einführung in die Funktionentheorie. Ludwig, Darstellende Geometrie; Grundzüge der höheren Mathematik; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik. Wernicke, Statik starrer und elastisch-fester Körper. Schlink, Technische Mechanik II; Graphische Statik; Statik der Baukonstruktionen. Zenneck, Theorie des elektromagnetischen Feldes; Physikalisches Kolloquium. Weber, Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik. Peukert, Elektrotechnik. Hohenner, Grundzüge der Geodäsie; Höhere Geodäsie; Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Vermessungsübungen. Schöttler, Festigkeitslehre; Kinematik; Angewandte Wärmemechanik.

Danzig. Lorenz, Dynamik starrer Körper; Festigkeitslehre und Hydraulik. v. Mangoldt, Höhere Mathematik I. Schilling, Darstellende Geometrie mit Übungen; Photogrammetrie. Sommer, Höhere Mathematik II; Geometrische und physikalische Anwendungen der partiellen Differentialgleichungen. Kalähne, Einführung in das physikalische Praktikum; Kinetische Gastheorie; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik mit praktischen Anwendungen.

Darmstadt. Dingeldey, Höhere Mathematik I, mit Übungen; Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale. Horn, Höhere Mathematik I und II, mit Übungen. Wiener, Darstellende Geometrie I und II, mit Übungen; Arbeiten im mathematischen Institut. Müller, Darstellende Geometrie I, mit Übungen; Ausgewählte Kapitel aus der analytischen Geometrie der Ebene. Henneberg, Mechanik II; Ausgewählte Kapitel der Mechanik. Graefe, Geschichte der Mathematik; Repetitorium der Elementarmathematik mit Übungen; Höhere Mathematik. Schering, Mechanische Wärmetheorie. Zeißig, Physikalische Meß- und Instrumentenkunde; Grundzüge der seismischen Beobachtung. Fenner, Geodäsie; Höhere Geodäsie. Gasser, Astronomische Ortsbestimmung; Praktische Geometrie.

Dresden. Krause, Höhere Mathematik IV; Übungen dazu; Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Größe; Seminar. Helm, Höhere Mathematik II, mit Übungen; Dioptrik; Interferenz des Lichtes; Physikalisches Kolloquium. Disteli, Darstellende Geometrie II; Übungen dazu; Theorie der Raumkurven und Flächen. Grübler, Technische Mechanik I; Übungen dazu. Technische Mechanik III. Heger, Ebene Kurven dritter Ordnung. Naetsch, Elementare Algebra und Analysis; Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades; Übungen. Goerges, Allgemeine Elektrotechnik II; Übungen. Hallwachs, Physikalisches Kolloquium. Mehrtens, Festigkeitslehre; Statik der Baukonstruktionen. Mollier, Technische Wärmelehre II; Gasmaschinen und Gaserzeuger; Kinematik, mit Übungen. Toepler, Elektronen- und Ionenstrahlung; Physikalisches Kolloquium. Ulbricht, Telegraphie und Telephonie. Pattenhausen, Geodäsie; Übungen dazu; Höhere Geodäsie; Übungen dazu; Geodätische Rechenübungen.

Hannover. Kiepert, Höhere Mathematik I; Variationsrechnung. N. N., Höhere Mathematik I; Vektoranalysis; Praxis der trigonometrischen Reihen. Rodenberg, Darstellende Geometrie, mit Übungen. Wieghardt, Grundzüge der höheren Mathematik; Ausgewählte Kapitel der Elektrizitätslehre; Über die für die technische Mechanik wichtigen Differentialgleichungen. Petzold, Algebraische Analysis und Trigonometrie; Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen auf die Geodäsie und

die Grundzüge der sphärischen Astronomie. Hotopp, Mechanik I. II. Weber. Mechanik I, II, III. Oertel, Geodäsie; Höhere Geodäsie. Starke, Praktische Physik. Jänecke, Einführung in die Phasenlehre.

Karlsruhe. Schur, Darstellende Geometrie, mit Übungen; Graphische Statik. Stäckel, Höhere Mathematik I, mit Übungen. Krazer, Höhere Mathematik II; Einleitung in die Funktionentheorie. Heim, Mechanik I und II; Mechanisches Seminar. Faber, Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, Arithmetik und Algebra; Ebene und sphärische Trigonometrie; Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Winkelmann, Elemente der Mechanik; Mechanische Probleme der wissenschaftlichen Technik. Haid, Praktische Geometrie; Höhere Geodäsie; Geodätisches Praktikum; Methode der kleinsten Quadrate. Bürgin, Katastervermessung; Graphische Ausarbeitung der großen geodätischen Exkursion; Repetitorium der praktischen Geometrie. Tolle, Technische Mechanik I und II. Schleiermacher, Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde; Theoretische Elektrizitätslehre; Elektrische Messungen. Bragstad, Theorie des Wechselstromes. Sieveking, Einführung in die mathematische Physik; Repetitorium der Physik.

München. (Technische Hochschule). Finsterwalder, Höhere Mathematik I, mit Übungen; Analytische Mechanik; Seminar. v. Dyck, Höhere Mathematik III, mit Übungen; Differentialgleichungen; Seminar. Burkhardt, Grundzüge der höheren Mathematik, mit Übungen; Mathematische Behandlung periodischer Naturerscheinungen; Seminar. Burmester, Darstellende Geometrie I, mit Übungen. Schmidt, Vermessungskunde I, mit Praktikum; Landesvermessung; Katastertechnik; Geodätisches Praktikum III; Kartierungsübungen. Föppl, Technische Mechanik II (graphische Statik) und III (Festigkeitslehre); Übungen zur graphischen Statik. Kutta, Elementare Mathematik, mit Übungen; Trigonometrie; Seminar. Bischoff, Ausgleichungsrechnung; Mechanisches und graphisches Rechnen. Großmann, Sphärische Astronomie mit besonderer Berücksichtigung der geographischen Ortsbestimmungen. Näbauer, Anleitung zur rechnerischen Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen. Schröter, Mechanische Wärmetheorie (Technische Thermodynamik) mit Übungen. Voit, Angewandte Physik (Heizung, Ventilation etc.). Knoblauch, Anwendungen der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Erscheinungen; Technisch-physikalisches Praktikum; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik. Fischer, Grundzüge der Physik I; Ionen und Elektronen in flüssigen, gasförmigen und festen Körpern. Emden, Luftschiffahrt und Flugtechnik; Allgemeine Meteorologie und Klimatologie.

Stuttgart. Mehmke, Darstellende Geometrie, mit Übungen; Vektoren und Punktrechnung, mit Übungen; Seminar. Reuschle, Analytische Geometrie des Raumes; Ausgewählte Kapitel aus der neueren analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes einschließlich Invariantentheorie; Kurvendiskussion in Beispielen; Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen; Differential- und Integralrechnung III, mit Übungen; Seminar. Wölffing, Elemente der Differential- und Integralrechnung, mit Übungen; Höhere Algebra. Bretschneider, Repetitionen in niederer Mathematik. Stübler, Niedere Analysis; Auflösung numerischer Gleichungen. N. N., Trigonometrie, mit Übungen. Roth, Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde. Kriemler, Technische Mechanik, mit Übungen. Hammer, Ausarbeitung der geodätischen Aufnahmen; Praktische Geometrie I; Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate); Barometrische Höhenmessungen. Koch, Theoretische Physik; Meteorologie.

---

4. Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. B. Glatzel hat sich als Privatdozent der Physik an der Technischen Hochschule Berlin habilitiert.

Dr. E. Meyer, bisher Assistent am Physikalischen Institut der Universität Berlin, habilitierte sich an der Universität Zürich als Privatdozent für Physik.

Dr. M. Näbauer habilitierte sich an der Technischen Hochschule München als Privatdozent für Geodäsie.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. C. Carathéodory, Privatdozent an der Universität Bonn, wurde zum Professor ernannt.

Dr. H. A. Christian wurde zum Professor der theoretischen und praktischen Physik an der Harvard Medical School ernannt.

Professor Dr. G. Darboux, Secrétaire perpétuel der Akademie der Wissenschaften zu Paris, wurde zum Mitgliede der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle gewählt.

Professor Dr. G. H. Darwin in Cambridge wurde von der Akademie der Wissenschaften in Berlin zum korrespondierenden Mitgliede gewählt.

Professor Dr. Enriques in Bologna wurde zum Präsidenten des nächsten internationalen Philosophenkongresses gewählt, der 1911 in Bologna tagen wird.

Dr. Esclangon, Dozent der Mathematik an der Universität Bordeaux, wurde zum ao. Professor daselbst ernannt.

Professor Dr. R. Fricke an der Technischen Hochschule zu Braunschweig wurde zum Geheimen Hofrat ernannt.

Professor Dr. J. G. Hagen, Direktor der vatikanischen Sternwarte zu Rom, wurde zum Mitgliede der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle gewählt.

Dr. G. W. Hartwell wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Kansas ernannt.

Professor Dr. F. R. Helmert, Direktor des Geodätischen Instituts in Potsdam, wurde zum auswärtigen Mitgliede der Royal Society in London gewählt.

Professor Dr. A. Henderson wurde zum Professor der reinen Mathematik an der Universität von North Carolina ernannt.

Professor Dr. K. Hensel an der Universität Marburg wurde zum Geheimen Regierungsrat ernannt.

Dr. Herglotz, ao. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, wurde zum ao. Professor an der Technischen Hochschule in Wien ernannt.

Dr. H. G. Keppel an der Northwestern Universität wurde zum o. Professor der Mathematik an der Universität von Florida ernannt.

Professor Dr. M. Lacombe am Polytechnikum zu Zürich wurde zum ao. Professor für darstellende und analytische Geometrie an der Universität Lausanne ernannt.

Professor Dr. Lebesgue wurde zum Professor der Differential- und Integralrechnung an der Universität zu Poitiers ernannt.

Dr. H. Moritz wurde zum Direktor der Sternwarte in Rio de Janeiro ernannt.

Dr. Ernst Neumann, ao. Professor an der Universität Marburg, wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Professor Dr. Schubert in Hamburg ist vom Unterricht in den Primen der Gelehrtenschule des Johanneums entlastet und wird vom 1. Oktober nur noch seine beiden viersemestrigen Vorlesungs-Zyklen über niedere und höhere Mathematik abhalten.

Professor Dr. v. Seeliger an der Universität München hat die Berufungen an die Universität Wien und als Direktor des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam abgelehnt.

Professor Dr. Cyparissos Stephanos wurde für das Jahr 1908/9 zum Rektor der Universität Athen gewählt.

Professor Dr. E. Study an der Universität Bonn hat eine Berufung an die Universität Leipzig abgelehnt.

Professor Dr. Ch. J. de la Vallée Poussin wurde zum Mitglied der Académie royale belgique in Brüssel ernannt.

Professor Dr. V. Volterra an der Universität Rom wurde zum Mitgliede der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle gewählt.

Professor Dr. H. Wiener an der Technischen Hochschule zu Darmstadt wurde zum Geheimen Hofrat ernannt.

Gestorben.

Dr. A. Hansky, Adjunkt der Sternwarte zu Pulkowa, ist am 11. August d. J. im Alter von 38 Jahren gestorben.

Professor Dr. A. Korkin ist am 1. April d. J. in St. Petersburg im Alter von 71 Jahren gestorben.

Dr. M. Rosenmund, Professor der Geodäsie am Polytechnikum in Zürich, ist am 15. August d. J. im Alter von 51 Jahren gestorben.

---

5. Vermischtes.

Ludwig Boltzmanns gesammelte Schriften. Die Akademie der Wissenschaften zu Berlin hat durch ihre physikalisch-mathematische Klasse 1000 ℳ als Beitrag zu den Kosten der von dem Kartell der deutschen Akademien zu veranstaltenden Ausgabe der gesammelten Schriften Ludwig Boltzmanns bewilligt.

Promotionen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika. Während des akademischen Jahres 1907/8 fanden folgende Promotionen auf Grund mathematischer Dissertationen statt. An der Universität von Chicago: Börger, On the determination of ternary linear groups in a Galois field of order p^2. Ingold, Vector interpretation of symbolic parameters. Lennes, Curves in non-metrical analysis situs with applications to the calculus of variations and differential equations. Owens, The introduction of ideal elements and construction of projective n-space in terms of a planar system of points involving order and Desargues's theorem. Wilson, Isoperimetrical problems which are reducible to non-isoperimetrical problems. Sinclair, On a compound discontinuous solution connected with the surface of revolution of minimum area. — An der Columbia Universität: Cowley, Plane curves of the eighth order having two fourfold points with distinct tangents and no other point singularities. — An der Universität von Pensylvania: Chambers, The groups of isomorphisms of the abstract groups of order p^2q. — An der Yale Universität: Holder, Multiple series. Lytle, Multiple integrals over iterable fields. Worthington, Some theorems on surfaces. — An der Cornell Universität: On a class of hyperfuchsian functions. Van Benschoten, The birational transformations of algebraic curves of genus four. — An der Harvard Universität: Irwin,

The invariants of linear differential expressions. Moore, On the theory of convergence factors and some of its applications. — An der Clark Universität: Slobin, On plane quintic curves. Wolff, The continuous plane motion of a liquid bounded by two right lines. — An der Princeton Universität: Conwell, The 3-space P. G. (3, 2) and its group. — An der Universität von Virginia: Luck, The structures of the non-integrable groups of seven parameters. — An der Vanderbilt Universität: Scarborough, The computation of the orbit of a planet.

Aktuelle Unterrichtsfragen. In *Sachsen* ist am 1. Mai d. J. eine neue Prüfungsordnung für das höhere Lehramt in Kraft getreten, in der eine mathematische und eine naturwissenschaftliche Gruppe unterschieden wird, entsprechend den Vorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Für die mathematische Gruppe sind Mathematik und Physik verbindliche Fächer, zu denen dann noch angewandte Mathematik oder Chemie oder Mineralogie und Geologie oder Erdkunde genommen werden können. Für die naturwissenschaftliche Gruppe sind Chemie oder Mineralogie und Geologie oder Zoologie und Botanik verbindliche Fächer, die beliebig zu zweien kombiniert werden können; als drittes Fach kann eines der genannten Fächer oder Physik oder Erdkunde gewählt werden, als viertes darf ein Kandidat der einen Gruppe ein beliebiges Fach aus dieser oder der andern wählen, als fünftes ein beliebiges Fach aus der sprachlich geschichtlichen Abteilung. Sehr bemerkenswert ist, daß die sogenannte allgemeine Prüfung sich auf Philosophie und Pädagogik beschränkt, im Gegensatz zu den früheren sächsischen und den meisten übrigen deutschen Prüfungsordnungen. — In *Bayern* wird der neue Lehrplan für die Realgymnasien demnächst der Sektion Bayern des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zur Begutachtung vorgelegt werden. Auch hat diese Sektion bereits eine Umfrage in betreff der Lehramtsprüfung in Mathematik und Physik veranstaltet, indem spezialisierte Fragebogen an die Mitglieder versandt wurden. Insbesondere wird die Frage zur Entscheidung kommen, ob die Prüfung in der bisherigen Weise bestehen bleiben oder geändert werden soll. [Bekanntlich zerfällt die Prüfung für das höhere Lehramt zur Zeit in zwei „Abschnitte“, eine Vorprüfung, die nach zwei Jahren abzulegen ist, und eine Schlußprüfung nach abermals zwei Jahren.] — In *Preußen* ist am 14. September 1908 ein Ministerialerlaß betreffend den Linearzeichenunterricht an den Realanstalten erschienen (s. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Oktoberheft 1908). Es heißt dort: „Der Unterricht in der speziellen darstellenden Geometrie, Schattenlehre und Perspektive der Klassen OII bis OI ist einem mit der darstellenden Geometrie vertrauten Lehrer der Mathematik zu übertragen.“

Abel-Denkmal. Wie die Tagesblätter berichten, ist am 17. Oktober d. J. in Christiania das Abel-Denkmal enthüllt worden. Herr H. A. Schwarz von der Universität Berlin hielt die Festrede.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Erklärung.

Durch den schönen neuen Katalog der Firma Teubner bin ich darauf aufmerksam geworden, daß in neueren Programmen der Mathematischen Enzyklopädie als voraussichtlicher Verfasser eines Artikels „Systeme geometrischer Analyse" ein Mathematiker figuriert, der mit mir den gleichen Namen trägt. Meine anfängliche Freude über die Auffindung eines Namensvetters und offenbaren Geistesverwandten wurde indessen bald zunichte, da ich weiter bemerkte, daß dieser mit mir auch die Heimat teilen sollte: Das Bonner Adreßbuch kennt ihn nicht, und auch die alsbald in Bewegung gesetzte Polizei vermochte Spuren seines Erdenwallens nicht nachzuweisen. Also mußte ich es wohl selbst sein. Und nun erinnerte ich mich zur guten Zeit, daß zwei Seelen ach leider ja auch in meiner Brust wohnen: Eine ohne Zweifel edlere, deren Entdeckung der Redaktion der Enzyklopädie vorbehalten geblieben ist; diese wird jenen Artikel schreiben, auf dessen Inhalt man gespannt sein darf; und eine andere, über die wir den Mantel der Liebe decken wollen, zumal der Leser des Jahresberichtes sie, sagen wir mehr als zur Genüge, schon kennt. Aber diese zweite Seele ist noch nicht so ganz verhärtet, daß sie sich die auch nur künftigen Verdienste ihrer so glücklich gefundenen Zwillingsschwester anmaßen möchte. Und der Seele Nr. I muß es erst recht unangenehm sein, mit einer derartigen Nr. II verwechselt zu werden. Daher erkläre ich (Nr. II), daß ich mit mir (Nr. I) nicht identisch, vielmehr von mir verschieden und also vermutlich die Hälfte (oder weniger) eines interessanten Doppelwesens bin (*Diplopsyche L. systemans F. Kl.*; siehe Seite XVIII des erwähnten Katalogs).

E. Study II.

Rara Arithmetica. A Catalogue of the Arithmetics written before the year 1601 with a description of those in the library of George Arthur Plimpton of New-York by David Eugene Smith of Teachers College, Columbia University. [XIII, 507 p. u. 9 Tafeln.] Boston and London 1908, Ginn & Company Publishers.

Sammlungen und Beschreibungen des mathematischen Quellenmaterials — als Vorarbeit für mathematisch-historische Studien — gibt es bisher nicht gerade sehr viele. Was vorliegt, sind meistens Bibliographien, die im Interesse der Erleichterung produktiver Tätigkeit bearbeitet, doch nicht denjenigen Ansprüchen genügen, die eine weitergehende historisch-bibliographische Kritik an sie stellen muß. Zudem betreffen sie meistens nur das Gebiet der sogenannten „höheren Mathematik". Und doch wird man sagen dürfen, daß ein allseitiges Verständnis für die Bedeutung, die die Mathematik allmählich genommen hat und für die Wandlungen, denen ihre Wertschätzung zu den verschiedenen Zeiten unterlegen ist, erst möglich wird, wenn man auch einen Einblick erhalten kann in das Material, welches am meisten zur Popularisierung der Mathematik von

jeher beigetragen hat d. h. in das Quellenmaterial der sogenannten „elementaren Mathematik“. Es ist daher mit Freude zu begrüßen, daß sich das historische Interesse von David Eugene Smith mit der Leistungsfähigkeit seines erfolgreichen Verlegers George Arthur Plimpton verbunden hat, um eine Sammlung von Elementarbüchern und auch Manuskripten der Mathematik zusammenzubringen, in denen sie das Material besitzen für eine wirklich umfassende Geschichte der Elementar-Mathematik.

Das erste Erträgnis dieser kombinierten Interessen ist der vorliegende Katalog aller arithmetischer Elementarbücher, deren erste Ausgabe vor 1601 liegt, mit einer ausführlichen Beschreibung derjenigen Exemplare, die sich in der Bibliothek von G. A. Plimpton befinden. Zwar sind schon früher von Libri, Boncompagni, de Morgan u. a. solche Sammlungen arithmetischer Lehrbücher zusammengebracht und z. T. auch beschrieben worden, aber sie sind nicht nur später durch die Ungunst der Verhältnisse immer wieder zerstreut worden, sondern haben auch nie den Umfang der hier beschriebenen Sammlung gewonnen, die über 300 Bücher zählt, und der weniger als 25 Exemplare von Büchern fehlen, die so wichtig waren, daß sie eine zweite oder mehrere Auflagen erlebten.

Im einzelnen enthält der Katalog im ersten Teil — chronologisch nach dem Erscheinen der Editio princeps geordnet — die genaue Beschreibung der Bücher der Plimptonschen Sammlung, wobei die nach 1601 erschienenen Auflagen zuerst im 15. bzw. 16. Jahrhundert gedruckter arithmetischer Lehrbücher mit aufgeführt werden (Angabe des Titels und Colophons, Größe in cm, Umfang usw., kurze Angaben des Inhalts und biographische Notizen über den Autor). Unter jedem Erscheinungsjahr ist dann weiterhin unter Zuhilfenahme verschiedener Bibliographien wie Graesse, Hain, Coppinger, Riccardi, Murhard u. a., angegeben, welche anderen Bücher in dem gleichen Jahre erschienen sind, wobei die Mehrzahl derselben von dem Verfasser in den verschiedensten Bibliotheken selbst eingesehen worden ist. Im ganzen sind so — unter Mitzählung der verschiedenen Auflagen — ca. 1200 Bücher über Elementar-Arithmetik aufgeführt. Ein zweiter, kürzerer Teil enthält einen Katalog der vor 1601 geschriebenen Manuskripte der Plimptonschen Sammlung über Arithmetik!

Beigegeben sind dem Kataloge 9 Tafeln, die in erster Linie die Reproduktion einiger Seiten der Manuskripte bringen, außerdem 246 Abbildungen im Text, die vorzüglich unter bibliographischen Gesichtspunkten ausgewählt die Titel einzelner bemerkenswerter Bücher wiedergeben. Schließlich fehlen nicht zwei ausführliche Register: Index of dates of printed books and manuscripts and Index of names, places and subjects, deren alleinige Durchsicht schon genügt, um zu erkennen, daß in den den einzelnen Büchern angefügten Bemerkungen die Anfänge einer Geschichte der Elementar-Arithmetik in der Zeit der Renaissance vorliegen, für die in der Vorrede eine ausführlichere Darstellung für eine spätere Zeit in Aussicht gestellt wird. Möge es dem Verfasser vergönnt sein, diese Frucht seiner mühevollen Vorarbeiten bald veröffentlichen zu können.

Göttingen. Conrad H. Müller.

Catalogue of Scientific Papers. 1800—1900. Subject Index. Vol. I: Pure Mathematics. [LVIII u. 666 S.] 8°. Cambridge 1908, University Press.

Als im Jahre 1857 die Royal Society den Plan zu einem Catalogue of scientific papers — beginnend mit dem Jahre 1800 — faßte, wurde neben

einem Autorenkataloge zugleich ein Sachkatalog in Aussicht genommen. Zuerst bearbeitet wurde der Autorenkatalog, der zur Zeit 12 Bände umfassend die Literatur der Jahre 1800—1883 berücksichtigt, und dessen Fortsetzung — umfassend die Jahre 1884—1900 — im Jahre 1898 von der Royal Society beschlossen wurde. Für das 20. Jahrhundert erwies sich zur Weiterführung des Unternehmens eine internationale Kooperation notwendig, die nach mehrjährigen Verhandlungen zu der Herausgabe des bekannten International Catalogue geführt hat, der insofern über das ursprüngliche Unternehmen der Royal Society hinausgeht, als er neben den Aufsätzen und Abhandlungen in periodischen Zeitschriften auch die selbständig erschienenen Bücher und Monographien verzeichnet. (Vgl. C. Brodmann, der internationale Katalog der naturwissenschaftlichen Literatur, diesen Jahresbericht XII (1903, S. 195). Zugleich enthält jeder der jährlich herauskommenden 17 Bände — entsprechend den 17 selbständig unterschiedenen Wissenschaften: Mathematik, Mechanik, usw. bis hin zur Bakteriologie — neben einem Autorenkatalog einen Sachkatalog, bearbeitet unter Zugrundelegung eines von verschiedenen Sachverständigen sorgfältig beratenen Klassifikationsschemas.

Der vorliegende Katalog ist nun der erste — die reine Mathematik umfassend — einer ebenfalls auf 17 Bände berechneten Reihe von Sachkatalogen zu den bereits erschienenen 12 Bänden Autorenkatalog (1800—1883) und den erst in Vorbereitung befindlichen — und nach Fertigstellung jener erscheinenden — weiteren Autorenkataloge (1884—1900). Zugrunde gelegt ist das Klassifikationsschema des Internationalen Katalogs, wobei gelegentlich — wenn es zweckmäßig erschien — noch Unterabteilungen eingefügt sind, die durch *kursiven* Satz kenntlich gemacht sind. Innerhalb der einzelnen Nummern ist dann die Anordnung nach Stichworten getroffen, die für die Arbeiten der Jahre 1800—1883 nach den Titeln des Autorenkatalogs unter häufigem Zurückgreifen auf die Abhandlungen selbst getroffen sind, während für die Jahre 1884—1900 stets auf die Abhandlungen selbst rekurriert werden mußte. Dabei ist durch Hinzufügung der Abkürzung der betreffenden Zeitschrift, der Nummer des Bandes und der Jahreszahl dafür Sorge getragen, daß unter Beihilfe des Autorenkatalogs leicht der genaue Titel einer Arbeit eruiert werden kann. Im übrigen ist unter den einzelnen Stichworten nach Möglichkeit eine chronologische Anordnung gewählt, so daß die Arbeiten zugleich in ihrer historischen Zeitfolge angeordnet erscheinen. Als wertvolle Beigabe des Katalogs ist die Liste der 700 berücksichtigten Zeitschriften mit ihren vollen und abgekürzten Titeln, der Angabe des ersten und ev. auch des letzten Erscheinungsjahrs zu begrüßen, die für die englischen Benutzer noch dadurch an Bedeutung gewinnt, daß gleichzeitig 23 englische Bibliotheken namhaft gemacht sind, in denen sich die verschiedenen Zeitschriften entweder vollständig oder unvollständig vorfinden.

Es erscheint natürlich, daß bei der Verarbeitung eines so weitschichtigen Materials — der Katalog enthält 38 748 einzelne Eintragungen — in einem Band von nur 666 Seiten im einzelnen Ungleichheiten entstehen müssen. Insbesondere mögen durch die Anwendung des rein-bibliographischen Stichwortprinzips innerhalb des Klassifikationschemas hin und wieder Arbeiten, die sachlich näher zusammengehören, jetzt voneinander getrennt sein. Im ganzen wird man aber doch anerkennen müssen, daß hier das praktisch Erreichbare geleistet erscheint, so daß der Katalog ein zuverlässiges und bequemes Nachschlagebuch

für jeden bilden kann, der sich rasch darüber orientieren will, welche Publikationen über eine noch so spezielle Frage im Gebiete der reinen Mathematik im Laufe des 19. Jahrhunderts in einer periodischen Zeitschrift erscheinen sind. Dabei dürfte der mäßige Preis von 27 sh. für das einzelne Exemplar in elegantem Einband nicht wenig zu einer großen Verbreitung beitragen.

Göttingen. CONRAD H. MÜLLER.

Annuario del Circolo Matematico di Palermo. Der Jahrgang 1908 des Annuario ist kürzlich zur Ausgabe gelangt; er gewährt in seinem Inhalt ein übersichtliches Bild von der Zusammensetzung, der Tätigkeit, den literarischen Leistungen und Beziehungen der in voller Blüte stehenden italienischen mathematischen Gesellschaft. Am 2. März 1884 von 27 Mathematikern gegründet, ist sie in ständigem Aufsteigen bis zum 9. August d. J. auf 605 Mitglieder angewachsen. Am 2. März 1909 wird der „Circolo" sein 25jähriges Bestehen feiern, zu dem auch eine neue Ausgabe des Annuario veranstaltet werden wird.

Torricellis Werke. Die aus Anlaß der 300jährigen Wiederkehr des Geburtstages Torricellis von der Geburtsstadt Faenza beschlossene Ausgabe der gesamten Werke dieses Physikers und Mathematikers (vgl. Jahresbericht **16**, 582) befindet sich im Druck. Die *„Opere di Evangelista Torricelli"* werden aus drei Bänden von je etwa 500 Seiten Umfang bestehen, von denen der erste die „Opere geometriche", der zweite „Lezioni accademiche, Meccanica, Varie" und der dritte „Carteggio scientifico in ordine cronologico" umfassen wird. Subskribenten werden 10% Ermäßigung des Preises erhalten, der in jedem Falle 12 Lire für den Band nicht übersteigen wird.

Dr. R. Neuhauß, Lehrbuch der Projektion. Mit 71 Abbildungen. Zweite umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1908, Wilhelm Knapp.

Immer mehr dringt die Benutzung von Projektionsapparaten auch in den mathematischen Unterricht ein, und es ist deshalb im Kreise der Mathematiker eine Übersicht über die verschiedenen Apparate, ihre Vorteile und Nachteile gewiß sehr willkommen. Verfasser vorliegenden Buches hat sich mit Ernst und Erfolg bemüht, bei seiner Darstellung objektiv zu sein, und er leistet damit zweifellos allen, die mit Projektionen zu tun haben oder Projektionseinrichtungen treffen wollen, einen guten Dienst. Formeln und Berechnungen sind nicht vermieden, drängen sich aber nicht unnötig auf. Der Inhalt ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teile werden nach einer kurzen geschichtlichen Übersicht der Projektionsapparat oder „Bildwerfer" in seinen einzelnen Teilen und deren Wechselbeziehungen behandelt; es seien besonders erwähnt: die Lichtquellen, das Glasbild (nebst deren Herstellung) und der weiße Schirm. Der zweite Teil beschäftigt sich mit Apparaten für besondere Zwecke; er ist für den Mathematiker vor allem wichtig. Namentlich die Abschnitte über stereoskopische Projektion, über Projektion wissenschaftlicher Versuche, über Projektion undurchsichtiger Gegenstände usw. seien besonders hervorgehoben. Der dritte Teil enthält allgemeine Regeln, die bei der Projektion zu beachten sind. Daß der Verfasser mit seinem Werkchen einem wirklichen Bedürfnisse entgegengekommen ist, dafür spricht die Tatsache, daß nach wenigen Jahren eine neue Auflage erforderlich geworden ist.

Paul Mahlo, topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene und sphärische Polygone. 98 S. 8^0 m. 39 Figuren auf 8 Tafeln. I.-D. Halle 1908.

Im ersten Teile dieser Arbeit, die unter denselben Auspizien entstand wie die von H. Brandes (s. S. *95*), wird auch ein dem Vorwurfe jener analoges Gebiet untersucht, das der Zerlegungsbeweise des Pythagoreischen Lehrsatzes. Es ist hier jedoch mehr auf eine Klassifikation der Zerlegungsbeweise auf Grund neu eingeführter Begriffe abgesehen. Die dabei auftretenden Probleme sind aber noch zu kompliziert. Das gab dem Verfasser Veranlassung, zu einfacheren Aufgaben in der Topologie ebener Polygone überzugehen.

Er beschäftigt sich daher im zweiten Teile seiner Untersuchungen mit dem Aufbau konvexer Polygone aus konvexen Polygonen und fragt insbesondere, wieviel Polygone von derselben Seitenzahl l ein m-Eck aufbauen können, einfache Überdeckung vorausgesetzt. Die Fragestellung dieses Abschnittes ist wohl neu.

Der dritte Teil der Dissertation befaßt sich, angeregt durch eine Arbeit von D. M. Y. Sommerville, mit der Aufsuchung der Gesamtheit gewisser halbregulärer Zerlegungen der Kugelfläche, wobei die Elemente der Zerlegung reguläre Polygone sind, denen nur zwei verschiedene Seitenlängen zukommen. Die Weiterverfolgung der da und dort auftretenden Fragen verspricht noch wichtige Resultate zu geben.

Speyer. H. Wieleitner.

É. Borel, die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe, besorgt von P. Stäckel. I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Textfiguren und 3 Tafeln [XVI u. 431 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Als F. Klein bei Gelegenheit des Ferienkurses zu Ostern 1904 seinen denkwürdigen Vortrag hielt *„Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen“*, empfahl er den Oberlehrern zum Studium des in Frankreich Gewollten und Erreichten besonders die Bücher von É. Borel, deren i. J. 1903 drei, teilweise stofflich ineinander übergreifende, erschienen waren: (1) *Arithmétique et Notions d'Algèbre;* (2) *Algèbre, Premier cycle;* (3) *Algèbre, Second cycle* (sämtlich bei Armand Colin, Paris). Diese drei Bändchen sind nun durch Herrn Stäckel in einen schönen, übersichtlichen Band zusammengearbeitet worden. Das ist schon äußerlich betrachtet ein Verdienst. Denn wenn auch die Lehrbücher über höhere Teile der Mathematik internationale Verbreitung haben, ist dies mit Elementarbüchern — leider — nicht der Fall. Der Oberlehrer hat einerseits nicht immer die Zeit und Gelegenheit, sich in fremden Sprachen eine gewisse Leseroutine zu verschaffen, ohne die ein fremdsprachliches Werk zur Qual wird, andererseits hapert es besonders an kleineren Orten mit den buchhändlerischen Bestellungsmöglichkeiten.

Das so entstandene Buch führt zunächst in die Zahlenarithmetik ein, aber „nicht so, als ob der Leser von der Arithmetik noch keine Ahnung hätte, sondern so . . ., daß einem Schüler, der bereits rechnen kann, klar wird, wie ein Mechanismus funktioniert, dessen er sich schon lange bedient hat“. Damit hängt zusammen, daß schon in der Arithmetik intuitive Ableitungen der Regeln der Buchstabenrechnung (Klammerregeln; Beweis für die Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen) gegeben werden. Außerdem sind überall Beispiele

aus dem täglichen Leben herangezogen. Sehr zeitgemäß ist ein solches vom lenkbaren Luftschiff (S. 270). Diese Beispiele sollen dem Schüler zeigen, eine wie innige Beziehung zwischen den Symbolen der Algebra und den gewöhnlichen Tatsachen des Lebens besteht. Auf große Anschaulichkeit und Breite ist überall Wert gelegt, auf Strenge nirgends. Die Regel $(-a)(-b) = +ab$ ist z. B. mit Hilfe eines Eisenbahnzuges erläutert, indem sowohl der Zeit als der Strecke Vorzeichen erteilt werden.

Zur Algebra gehört hier auch die Einführung in den Funktionsbegriff, insbes. mittels graphischer Darstellung. Nach dem Kleinschen Vortrage erschienen in Deutschland eine Anzahl Büchlein, die diese Einführung mit Überleitung zur Infinitesimalrechnung zum Zwecke hatten (Lesser, Schröder u. a.). Sie waren desto besser, je mehr sie von Borels *Algèbre* (*2^d cycle*) Nutzen gezogen hatten (bes. Tesař). Auch das neue, recht gute Buch von Behrendsen und Götting (s. ds. Jhrsber. S. *123*) zeigt überall den Borelschen Einfluß. Es sind hier die Gleichungen ersten und zweiten Grades aufs eingehendste behandelt. Die Diskussionen der Gleichungen (und Ungleichungen) mit allgemeinen Koeffizienten oder mit einem Parameter sind zwar spezifisch mathematisch, dürften aber für das angegebene Alter (14—17 Jahre) höchstens an der oberen Grenze verständlich sein. Die linearen und quadratischen Funktionen einer Variabeln werden daran anschließend dargestellt; desgleichen noch die »homographische« Funktion $y = (ax + b)/(cx + d)$. Am Schlusse folgt eine verhältnismäßig kurze Einführung in die arithmetischen und geometrischen Reihen und in die Logarithmen. Diese werden (wie überhaupt in Frankreich) nicht als Umkehrung der Exponentialfunktion eingeführt, sondern durch das formale Entsprechen einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe. Ein sehr gutes alphabetisches Sachregister beschließt den Band.

Deutschen Ansprüchen wird manches, auch bei Betonung der Anschaulichkeit, an wissenschaftlicher Strenge nicht genügen, wie etwa das berührte Beispiel $(-a)(-b)$. Manches wird aber auch, wie die erwähnten Diskussionen, zu schwer erscheinen. Das Buch von Behrendsen-Götting scheint mir hier die rechte Mitte zu halten. Die Methode aber ist unübertrefflich, mit der Borel den Stoff meistert. Und die Übernahme der Bearbeitung durch Herrn Stäckel scheint darauf hinzudeuten, daß die Zeit auch in Deutschland zu schwinden beginnt, wo es nicht für voll galt, ein elementares Lehrbuch zu schreiben.

Speyer. H. Wieleitner.

A. Voß, über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentl. Sitzung d. Kgl. bayerischen Akad. d. Wissensch. zu München. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. [98 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

In dieser kleinen Schrift ist der Versuch gemacht, an der Hand der historischen Entwicklung der Mathematik ihr Wesen in einer auch dem nicht speziell mathematisch Gebildeten zugänglichen Form zu schildern. Der Verfasser sieht das Charakteristische der reinen Mathematik in der Anwendung des Zahlbegriffes, falls dieser so allgemein gefaßt wird, daß Zahlen Zeichen für ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes sind, während die Anwendungsgebiete (Geometrie, Mechanik) sich mit der Arithmetisierung, d. h. der Unterwerfung der Anschauung unter den Zahlbegriff beschäftigen, und sucht von diesem Gesichtspunkt aus die Entwicklung der Mathematik zu be-

leuchten. Einen wesentlichen Teil der Schrift bilden die zahlreichen historisch-kritischen Anmerkungen; sie dürften namentlich denen willkommen sein, welche in die hier behandelten Fragen tiefer eindringen wollen.

München. A. Voss.

Rudolf Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. In 4 Bänden. II. Band. Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. A. u. d. T: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band XXVII, 2. [VIII u. 346 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Der erste im Frühjahr 1908 erschienene Band hat die eindeutigen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zwischen unicursalen Gebilden erster Stufe, den drei Grundgebilden und allen auf sie eindeutig beziehbaren Gebilden behandelt.

Im zweiten Bande folgen nun von den Verwandtschaften zwischen den Gebilden zweiter Stufe, Feldern und Bündeln, die eindeutigen und linearen: Kollineation und Korrelation. Er bildet den dritten und vierten Teil des ganzen Werks. In jenem werden die Eigenschaften einer einzelnen Verwandtschaft und die Erzeugnisse besprochen, in diesem die Ausartungen, die Anzahlen der gegebenen Bedingungen genügenden Verwandtschaften und die durch solche gebildeten Systeme.

In diese Bände I und II ist der erste von den drei in 1907 Nr. 2[1] der Mitteilungen S. 66 angekündigten drei Bänden zerlegt worden, so daß nunmehr das Werk in vier Bänden erscheinen wird.

Breslau. R. Sturm.

A. Schoenflies, Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 69 Textfiguren [IV u. 94 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Kräftiges räumliches Anschauungsvermögen und räumliche Gestaltungskraft gehören jetzt unbestritten zu den wichtigsten Zielen des geometrischen Unterrichts. Um sie zu möglichster Höhe zu entwickeln, ist dem Lehrenden, abgesehen von Modellen, nichts so nötig wie die Kunst, die Auffassung des Lernenden durch gute, körperlich wirkende Zeichnungen zu unterstützen. Doch ist die Kenntnis der Gesetze und Methoden, auf denen diese Kunst ruht, auch heute noch keineswegs überall in dem wünschenswerten Maße vorhanden, obwohl der Hochschulunterricht dem genannten Bedürfnis vielfach Rechnung trägt.

Meines Erachtens liegt die Ursache zum Teil auch an der Form, in der der Stoff in Vorlesungen und Lehrbüchern behandelt zu werden pflegt. Das Gebiet der wissenschaftlichen darstellenden Geometrie hat allmählich eine außerordentliche Ausdehnung erfahren. Jegliche Behandlung des Stoffes muß sich daher auf eine Auswahl beschränken; sie wird für den Techniker und Architekten eine andere sein können als für den Vertreter des höheren Lehrfaches. Diese Erwägung ist für die Abfassung meiner Schrift maßgebend gewesen. Es erschien mir als ein Haupterfordernis, die Auswahl so zu treffen, daß sie so knapp als möglich ist und doch alles berücksichtigt, was dem Lehrer der höheren Schulen naheliegt. Ihn in erster Linie wollte ich befähigen, den Zielen und Bedürfnissen seines geometrischen Unterrichts in vollem Maße zeichnerisch genügen zu können. Ich lasse deshalb fast alles beiseite, was zwar bei der breiteren Darstellung eines Lehrganges der darstellenden Geometrie nicht fehlen darf, aber für den an-

gegebenen Zweck entbehrlich erscheint. Ich hielt es auch für notwendig, nur die elementaren geometrischen Kenntnisse vorauszusetzen. Ich berufe mich deshalb nirgends auf allgemeine Gesetze projektiver Natur und hoffe, daß es mir trotzdem gelungen ist, dem Leser in exakter Weise die Kunst der richtigen zeichnerischen Darstellung und das volle Bewußtsein ihrer Richtigkeit zu vermitteln. Eine größere Zahl von Figuren, die die Anwendung der zeichnerischen Gesetze erkennen lassen, wird beigefügt werden.

Königsberg i. Pr. A. Schoenflies.

Niels Nielsen, Lehrbuch der unendlichen Reihen. Vorlesungen, gehalten an der Universität Kopenhagen. [VIII und 287 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Da dies Lehrbuch eine Darstellung der Reihenlehre ohne Anwendung der Differentiation und Integration gibt, tritt die Theorie der Zahlenfolge ganz natürlich in den Vordergrund. Demzufolge ist der erste Teil des Buches dieser Theorie gewidmet. Da es notwendig war, die verschiedenen, für den Anfänger nicht leichten Fundamentalbegriffe der Grenzlehre (lim. sup., lim. inf., obere und untere Grenze) ausführlich zu behandeln, so erschien es mir auch zweckmäßig, eine Darstellung des von du Bois Reymond sogenannten allgemeinen Kurvengrenzprinzipes, also der Theorie der Fundamentalreihen, zu geben. Wenn diese Darstellung von den üblichen abweichend ist, indem die Irrationalzahl als gemeinsamer Grenzwert zweier monotonen Zahlenfolgen definiert wird, so ist diese Darstellungsweise, meinen Erfahrungen nach, für den Anfänger die einfachste. Dazu kommt noch, daß die Existenz gewisser Zahlen im Texte häufig durch eben diese Methode nachgewiesen werden muß.

Von der Theorie der Zahlmengen behandle ich aber nur die beiden Begriffe: abzählbare Mengen und das Kontinuum, welche für das richtige Verständnis der kontinuierlichen Variabeln notwendig sind. In einem solchen elementaren Lehrbuche darf man natürlich nicht durchweg Originalitäten des Verfassers suchen. So sind z. B. die Kriterien für Reihen mit positiven Gliedern und die Theorie der Doppelreihen beinahe wortgetreu nach Pringsheim gegeben worden. Andererseits erlaube ich mir aber z. B. auf die Darstellung der Multiplikation von Reihen (auch trigonometrischen) und insbesondere auf die Entwicklungen des letzten Kapitels aufmerksam zu machen; durch diese letztere Theorie dürften wohl zum ersten Male die wahren Grundlagen einer wirklich elementaren Theorie der Fakultäten- und der Dirichletschen Reihen gegeben worden sein.

Ich hoffe, daß die den einzelnen Paragraphen angefügten Übungsaufgaben dem Leser durch ihre Auflösung sein Interesse für die entwickelten Theorien und sein Verständnis dieser Theorien fördern.

Am Schluß folgt ein alphabetisches Register, während ein Literaturverzeichnis (wie in meinen früheren Handbüchern) mir nicht mit dem Ziele des Buches vereinbar erschien.

Kopenhagen. Niels Nielsen.

R. Haußner, darstellende Geometrie. 2. Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Mit 80 Figuren im Texte. 164 S. Leipzig 1908, G. J. Göschen. (Sammlung Göschen, 143.)

Wenn man die darstellende Geometrie nicht nur als geometrisches Zeichnen, sondern als eine wissenschaftliche Disziplin ansieht, wird man von ihr außer

der Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens auch eine Förderung des geometrischen Verständnisses verlangen. Leider wird das letztgenannte Ziel recht häufig vernachlässigt, trotzdem der Unterricht in der darstellenden Geometrie erst dann voll befriedigen kann, wenn auch die vorkommenden Gebilde, die gesetzmäßig definiert sind, auf ihre Haupteigenschaften hin untersucht werden, und zwar, soweit als irgend möglich, nur mit Hilfsmitteln, die der darstellenden Geometrie eigentümlich sind. Von diesem Gesichtspunkte aus bietet sich als eine der wichtigsten Aufgaben der darstellenden Geometrie dar, die Lehre von den Kegelschnitten zu entwickeln, ohne die analytische Geometrie oder die Geometrie der Lage zu benutzen.

Deshalb geht der Verfasser in dem vorliegenden Bändchen von dem Doppelverhältnisse von vier Punkten oder Strahlen und seiner Unveränderlichkeit bei der Operation des Projizierens aus. Hieran schließt sich die perspektive Abbildung eines Vierecks auf ein Rechteck und eines Kreises auf einen andern Kreis, bzw. auf sich selbst. Mittelst dieser Abbildungen werden dann die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und des Kreises aus speziellen Figuren unmittelbar abgelesen.

Nachdem so die Grundlagen für die Untersuchung erhalten sind, werden die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises definiert und ihre wichtigsten projektiven Eigenschaften aus denen des Kreises abgeleitet. Dann folgen die metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte. Um zunächst ihre Brennpunktseigenschaften zu erhalten, werden die Kegelschnitte als Schnitte des geraden Kreiskegels angesehen und das Dandelinsche Verfahren der eingeschriebenen Kugeln benutzt; am Schlusse dieses Abschnittes wird dann noch gezeigt, daß alle Kegelschnitte als Schnitte gerader Kreiskegel erhalten werden können. Der letzte Abschnitt des Bändchens enthält Konstruktionen für die Krümmungsradien von Kegelschnitten, wobei nur die für das konstruktive Zeichnen wichtigsten Erwähnung gefunden haben. Auch diese Konstruktionen werden mit Hilfe der Zentralprojektion des Kegelschnittes aus dem Kreise abgeleitet.

Seit dem erstmaligen Erscheinen des ersten Bändchens ist leider ein ungewöhnlich langer Zeitraum verflossen, bis jetzt die vorliegende Fortsetzung erscheint. Verschiedene äußere Umstände haben diese unliebsame Verzögerung verschuldet. Der dritte Teil, welcher für die Behandlung der einfachsten krummen Flächen die Resultate des vorliegenden Bändchens benötigt, wird voraussichtlich in kurzer Frist folgen. R. H.

John Perry, F. R. S., Professor der Mathematik und Mechanik am Royal College of Science zu London, **angewandte Mechanik.** Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ingenieur Rudolf Schick in Köln. Mit 371 Figuren [VIII u. 666 S.]. gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Unter steter Berücksichtigung der Praxis lehrt Perry die „Angewandte Mechanik" so, daß alle Methoden der technischen Wissenschaft zu ihrem Rechte kommen. Infolgedessen ist das Buch wie kaum ein anderes geeignet, den werdenden Ingenieur zur wissenschaftlichen Betrachtung der an ihn herantretenden Aufgaben zu erziehen und ihm vertiefte Einsichten und nachhaltige Anregungen zu bieten.

Köln. R. Schick.

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Intgralrechnung. Mit 31 Figuren im Text. [VI u. 432 S.] gr. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner.

In der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" habe ich eine „Einführung in die Infinitesimalrechnung" erscheinen lassen, die mit dem vorliegenden Buch viele Berührungspunkte hat. Damals mußte wegen der Enge des Raumes und mit Rücksicht auf die Ziele jener Sammlung verschiedenes beiseite gelassen werden, was jetzt ausführlich behandelt werden konnte, so z. B. die Theorie der Irrationalzahlen. Bei der Definition der Irrationalzahlen habe ich mich an Dedekind angeschlossen. Die Rechnungsarten sind dann aber in einer Weise eingeführt, die wieder an Cantor erinnert. Ich bin zu dieser Darstellung durch die Arbeiten Baires angeregt worden. Der Begriff „Grenzwert" läßt sich, wie ich schon in meiner kleinen Schrift gezeigt habe, sehr einfach beschreiben, wenn man sich des Ausdrucks „fast alle" bedient. Haben die Glieder einer unendlichen Menge mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen eine gewisse Eigenschaft, so sage ich, daß fast alle Glieder der Menge diese Eigenschaft besitzen. Die Formel $\lim x_n = x$ bedeudet dann, daß in jeder Umgebung von x fast alle x_n liegen. Der Kennner wird auch an andern Stellen des Buches neue Formulierungen und Vereinfachungen bemerken, die hoffentlich das Studium der Infinitesimalrechnung erleichtern. Ich habe mich bemüht, überall möglichst streng zu sein. Nur bei der geometrischen Interpretation der Zahlen mittels der Zahlenlinie fürchtete ich den Leser abzuschrecken, wenn ich auf eine Erörterung der zugrunde liegenden Axiome eingegangen wäre. Durch die neueste Arbeit Hölders sind die einschlägigen Fragen mit abschließender Gründlichheit erledigt. Hervorgehoben sei noch, daß ich mich aus Rücksicht auf den Umfang des Buches auf das reelle Gebiet beschränkt habe.

G. Kowalewski.

E. Czuber, Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. [X u. 382 S.] gr. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner.

In Ausführung eines langgehegten Planes habe ich in diesem Buche vornehmlich jene Materien zur Darstellung gebracht, die über den Rahmen des Inhaltes meiner „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung" hinausgehend an unseren Technischen Hochschulen zum Vortrag gebracht werden. Ich habe aber die Anlage und Gestaltung so gewählt, daß das Buch auch seine selbständige Stellung behaupten könne als Einführung in das Studium der höheren Gebiete der Mathematik; darum sind auch die Elemente der Differentialrechnung aufgenommen worden, um ihre organische Verbindung mit den anderen behandelten Gebieten herstellen zu können. Das Buch umfaßt eine recht eingehende Entwicklung des Zahlbegriffs, die Darstellung von Zahlen durch unendliche arithmetische Prozesse, eine Einführung in die Funktionentheorie, im Anschluß daran die Elemente der Differentialrechnung nebst den ersten Anwendungen der Differentialquotienten, weiter die Determinantentheorie, die zur Geltung kommt bei der sich anschließenden Gleichungslehre, endlich die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes in jenem Ausmaße und solcher Form, wie es namentlich als Vorbereitung für das Studium der Mechanik erforderlich erscheint. Im übrigen bin ich denselben Grundsätzen gefolgt, die mich bei der Abfassung der „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung" geleitet haben.

E. Czuber.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität. In zwei Bänden. II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Zweite Auflage. Mit sechs Figuren im Text. [XII u. 404 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Der zweite Band des Werkes ist der Theorie der elektromagnetischen Strahlung gewidmet. Der Verfasser unterscheidet zwischen „Wellenstrahlung" und „Konvektionsstrahlung". Die Konvektionsstrahlung wird von der bewegten Elektrizität mitgeführt, während die Wellenstrahlung zwar von der ungleichförmig bewegten Elektrizität entsandt wird, aber dann unabhängig von dieser den Raum durcheilt. Die Theorie beider Arten elektromagnetischer Energieübertragung beruht auf der Dynamik der Elektronen, die im ersten Abschnitte ausführlich behandelt wird. Der zweite Abschnitt ist der Elektrodynamik der wägbaren Körper gewidmet; diese wird hier vom Standpunkte der Elektronentheorie aus behandelt. Besonders eingehend, und zum Teil kritisch, werden in der neuen Auflage diejenigen Hypothesen und Definitionen erörtert, die man in neuester Zeit an das sogenannte „Postulat der Relativität" angeknüpft hat. Auch die Theorie der strahlenden Wärme ist durch einen Paragraphen ergänzt worden, welcher die Dynamik des bewegten, strahlungserfüllten Hohlraumes zum Gegenstande hat. Man gewinnt durch das Studium des vorliegenden Buches einen Einblick in diejenigen Fragen, mit denen sich gegenwärtig die theoretischen Physiker beschäftigen.

Göttingen. M. Abraham.

Felix Müller, Führer durch die mathematische Literatur. Mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXVII. Heft. gr. 8. Leipzig, 1908, B. G. Teubner.

Das Buch gibt eine systematische Übersicht über diejenigen Einzelwerke und Journalabhandlungen aus der reinen Mathematik, deren Kenntnis dem Studierenden unentbehrlich ist. Es ist nicht eine mathematische Bibliographie im gewöhnlichen Sinne, sondern *ein Leitfaden für Studierende*, der das in den Vorlesungen Gegebene ergänzen soll. Der erste Teil orientiert über die größeren historischen Werke, über Gesammelte Schriften und Klassikerausgaben, über mathematische Zeitschriften und Enzyklopädien. Durch die beiden anderen Teile, Analysis und Geometrie, wird der Studierende in den Stand gesetzt, diejenigen Werke zu finden, auf welche in den Vorlesungen über spezielle Disziplinen oft nur in Kürze hingewiesen werden kann, nämlich Quellen und Originalarbeiten, Lehrbücher, Aufgabensammlungen und Tafeln, sowie das einschlägige Historische und Bibliographische. Denjenigen, der nicht Gelegenheit hatte, Vorlesungen über eine spezielle Disziplin zu hören, verweist das Buch auf die erforderlichen Studienwerke. Ein ausführliches Sachregister erleichtert das Auffinden der Literatur. F. M.

G. C. Young und **W. H. Young, der kleine Geometer.** Deutsche Ausgabe besorgt von S. und F. Bernstein. Mit 127 Textfiguren und 3 bunten Tafeln. [XVI u. 239 S.] 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Der Büchlein für den propädeutischen Mathematik-, bes. Geometrieunterricht sind schon viele geschrieben worden. Von tüchtigen Lehrern verfaßt, nach einer Reihe von ausgezeichneten Prinzipien bearbeitet, verfallen sie doch gerne dem Geschick, beim Lesen „ledern" zu erscheinen, wenn ich mich eines

der kräftigen Ausdrücke von M. Simon bedienen darf. Da erschien i. J. 1906 ein Werkchen des verdienten C. A. Laisant *„Initiation mathématique"* (Paris, Hachette)[1]) mit dem kampfesfrohen und vielversprechenden Beisatz *„Ouvrage étranger à tout programme"*. Ledern ist dieses Buch gewiß nicht. Aber ich halte es für ganz ausgeschlossen, die dort behandelten Themata in ihrer Gesamtheit mit 4- bis 11jährigen Kindern durchzugehen, wie dies der Verfasser in lebhafter Polemik gegen die offiziellen Lehrpläne für möglich erachtet.

Anders mit dem vorliegenden Buche! Frau Grace Chisholm Young schrieb es, von ihrem Manne unterstützt, zum Unterrichte ihres eigenen Kindes. Es beschäftigt sich nur mit Geometrie, und indem die Verfasser eine durchdachte Methode befolgen, alle Zeichnungen und Modelle ohne Pappe und Kleister nur durch Falten von Papier herzustellen, sind sie imstande, auch schwierigere stereometrische Sätze anschaulich zu begründen. Ja, es ist erstaunlich, bis zu welchem Grade der Strenge die Beweise hierbei getrieben sind. Daß man den hier vorgeführten Lehrgang sofort in Sexta beginnen könnte, — Teile davon sicher noch früher — bezweifle ich keinen Augenblick Es ist sicherlich ein großer Nachteil unserer Schulordnungen, daß mit der Stereometrie erst in einem Alter begonnen wird, wo die Phantasie des Schülers es nicht mehr interessant findet, sich mit senkrechten Ebenen und ähnlichen Dingen eingehender zu beschäftigen. Hier kommen die Dreieckswinkelsumme und die Parallellinien erst, nachdem der Würfel und seine Schnitte einer genauen Betrachtung unterworfen wurden. Nur der Eingang des Buches ist etwas abstrakt und klebt noch am Hergebrachten.

Ganz neu ist das Verfahren nicht, das Falten von Papier als Unterrichtsmittel zu benutzen. Bereits 1893 erschien in Madras ein Büchlein *„Geometrical Exercises in Paper Folding"* von F. Sundara Row. Aber ich unterschreibe gerne die Meinung der Verfasser, daß dieses Werk „zu schwer für Kinder und zu kindlich für Erwachsene" sei. Außerdem beschränkt es sich auf ebene Geometrie und behandelt auch Gegenstände, die mit dem Papierfalten nur in eine sehr lose Verbindung zu bringen sind. So ist das vorliegende Buch ureigenes Erzeugnis der Verfasser.

Die deutsche Ausgabe ist demnach sehr zu begrüßen und findet hoffentlich auch die verdiente Verbreitung in Lehrerkreisen. Denn wenn die ganze Anordnung auch mit unseren Lehrplänen nicht stimmt, so bieten sich doch mannigfache Gelegenheiten, das gegebene Verfahren auszunutzen. Die Übersetzung selbst ist überall recht gut. Ein sprachliches Novum dürfte nur die Konstruktion von „überdecken" mit dem Dativ sein (S. 39f.). Auf S. 53, Z. 2 v. u. müßte es ferner offenbar „dazu" statt „dann" heißen. Das ist alles, was mir, außer einigen unerheblichen orthographischen Versehen, auffiel.

Speyer. H. Wieleitner.

2. Bücherschau.

Best, L., Beweis des Fermatschen Satzes. [3 S.] Darmstadt 1908. ℳ 0.30.

Boehm, K., Elliptische Funktionen. 1. Teil. Theorie der elliptischen Funktionen, aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren im Text. [XII, 356 S.] Leipzig 1908. ℳ 8.60.

Bromwich, T. J. I'a., An introduction to the theory of infinite series. London 1908. 15 s.

1) Deutsch von F. J. Schicht, *„Einführung in die Mathematik"*. Leipzig und Wien 1908, F. Deuticke.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 1. Band. Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren im Text. 2. sorgfältig durchgesehene und erweiterte Auflage. [X, 410 S.] Leipzig 1908. ℳ 12.—.

Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band VI 1 B. 1. Heft. Leipzig 1908. ℳ 2.60.

Hegemann, E., Übungsschule für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. 3. verbesserte und erweiterte Auflage. [VI, 174 S. m. 41 Abbildungen.] Berlin 1908. ℳ 5.40.

Jurisch, W., Beweis des Fermatschen Satzes. Berlin 1908. ℳ —.40.

Kepler, J., Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. Linz 1615. Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von R. Klug. Mit 29 Figuren im Text. Leipzig 1908. ℳ 2.60.

Kruse, M. G., Schnellrechner. Schnelles und sicheres Rechnen mit Hilfe ausgerechneter, größerer u. tabellarisch geordneter Zahlenwerte. Leipzig 1908. ℳ 12.—.

Lalesco, T., Sur l'équation de Volterra. Thèse. Paris 1908.

Lindow, M., Formeln aus der Differential- und Integralrechnung. Als Anhang zur Sohnckeschen Aufgabensammlung zusammengestellt. [42 S.] Jena 1908. ℳ 1.50.

Loewenberg, G., Was muß man von der Differential- und Integralrechnung wissen? [54 S.] Berlin 1908. ℳ 1.—.

Müller-Breslau, H., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. II. Band. 2. Abteilung. Mit 410 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. 2. Lieferung (Schluß). Leipzig 1908. ℳ 15.—.

Netto, E., Gruppen- und Substitutionstheorie. [VIII, 176 S.] Leipzig 1908. ℳ 5.20.

Newtons Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G. Kowalewski. Mit 8 Textfiguren. Leipzig 1908. ℳ 1.50.

Perry, J., Angewandte Mechanik. Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische oder graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ingenieur Rud. Schick. [VIII, 666 S. m. 371 Fig.] Leipzig 1908. ℳ 18.—.

Planck, M., Das Prinzip der Erhaltung der Energie. 2. Auflage. [XVI, 278 S.] Leipzig 1908. ℳ 6.—.

Runge, C., Analytische Geometrie der Ebene. [IV, 198 S. m. 75 Fig.] Leipzig 1908. ℳ 6.—.

Rühl, H., Elementarer Beweis des Fermatschen Satzes. [4 S.] Darmstadt 1908. ℳ 0.30.

Sachs, J., Tafeln zum mathematischen Unterricht. [II, 120 S.] Leipzig 1908. ℳ 6.—.

Schneider, F., Zur Methode der Elementarmathematik. Winke für Lehramtskandidaten und jüngere Lehrer. [VI, 63 S. m. 30 Fig.] Stuttgart 1908. ℳ 1.40.

Schultze, A., Graphic algebra. London 1908. 4 s. 6 d.

Sturm, R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 2. Band. Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. [VIII, 346 S.] Leipzig 1908. ℳ 16.—

Thomae, J., Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. [VI, 182 S. m. 10 Fig.] Leipzig 1908. ℳ 7.80.

Timerding, H. E., Geometrie der Kräfte. Mit 27 Textfiguren. Leipzig 1908. ℳ 16.—.

Turner, G. C., Graphics applied to arithmetic, mensuration and statics. London 1908. 6 s.

Volkmann, P., Die Subjektivität der physikalischen Erkenntnis und die psychologische Berechtigung ihrer Darstellung. Rektoratsrede. Leipzig 1908. ℳ. —.80.

Weigelin, G., Der Fermatsche Satz und sein Beweis. [15 S.] Stuttgart 1908. ℳ —.75.

Ausländische Literatur. (Juni—September 1908.)

Die Firma K. F. Koehlers Antiquarium in Leipzig, Kurprinzstr. 6, hat sich bereit erklärt, dem Herausgeber regelmäßig eine Zusammenstellung der ausländischen Literatur zur Verfügung zu stellen; auch ist sie bereit, die angekündigten Werke nach Möglichkeit den Mitgliedern der Vereinigung zur Ansicht zu senden bzw. zu beschaffen. Die Umrechnung der Beträge erfolgt dabei nach dem Satze: 1 Fr. (Lire) = 80 Pf.; 1 sh. = 1 ℳ; 1 $ = 4 ℳ. Gesuche um Ansichtssendungen bzw. Kaufaufträge wolle man direkt richten an: K. F. Koehlers Antiquarium, Leipzig, Kurprinzstraße 6.

Arnoux, G., Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques, leurs transformations. (Essais de psychologie et de métaphysique positives.) Av. fig. Paris 1908. 3 Fr.

Baire, R., Leçons sur les théories générales de l'analyse. II. Variables complexes. Applications géométriques. Av. fig. Paris 1908. 12 Fr.

Bourlet, C., et P. Baudoin, Cours abrégé de géométrie plane. Corrigé des 597 exercices et problèmes. Paris 1908. Cart. 2 Fr. 50 c.

Boutroux, P., Leçons sur les fonctions définies par les équations différentes du premier ordre professées au Collège de France. Av. fig. Paris 1908. 6 Fr. 50 c.

Bridgett, R. C., Blackie's elementary modern algebra with answers. Glasgow 1908. 1 sh. 6 d.

Castle, F., Practical arithmetic and mensuration. London 1908. 2 sh.

Chollet, T. et P. Mineur, Traité de géométrie descriptive. I. II. 5e et 3e éd. Av. fig. et plchs. Paris 1908. 7 Fr. 50 c.

Dobbs, W. J., Examples in elementary mechanics, practical, graphical and theoretical. London 1908. 5 sh.

Fehr, H., Th. Flournoy et E. Claparède, Enquête de „l'Enseignement máthem." sur la méthode du travail des mathématiciens. Paris 1908. 5 Fr.

Godfrey, C., and A. W. Siddons, Modern geometry. Cambridge 1908. 4 sh. 6 d.

Hall, H. S., and F. H. Stevens, A school arithmetic. London 1908. 3 sh. 6 d.
— do., With answers. 4 sh. 6 d.

Henry, Ch., La loi des petits nombres. Paris 1908. 5 Fr.

Hermite, C., OEuvres. Publiées sous les auspices de l'Acad. d. Sciences par E. Picard. Vol. II. (Mémoires publiés 1858—72.) Av. portrait. Paris 1908. 18 Fr. 50 c.

Heywood, H. B., Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm et quelques-unes de ses applications (Thèse). 4. Paris 1908. 6 Fr.

Hilton, H., An introduction to the theory of groups of finite order. Oxford 1908. 14 sh.

Jamieson, H. A., The Oxford elementary arithmetics. I. II. London 1908. je —.6 d.

Jones, H. S., A modern arithmetic. With graph. a. pract. exercises. London 1908. 4 sh. 6 d.

Joubert, L., Abrégé théorique et pratique de la compensation des compas. Av. fig. et 2 plches. Paris 1908. 2 Fr. 50 c.

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La Mécanique enseignée par les auteurs originaux. I: Naissance de la mécanique. Av. fig. Paris 1908. 7 Fr. 50 c.

Matriculation model answers. Mathematics. Being the London University matriculation papers in mathematics from September 1904 to June 1908. London 1908. 2 sh.

The Northern **Matriculation** guide. London 1908. —.6 d.

Matthews, E. R., and T. G. H. Thomas, Logarithms and trigonometry for engineers and surveyors. London 1908. 2 sh.

Montessus, R. de, Leçons élément. sur le calcul d. probabilités. Av. fig. Paris 1908. 7 Fr.

The Oxford elementary arithmetics three term in script figuring. I—III. London 1908. je —.2 d.

Russel, J. W., Solutions of the examples in a sequel to elementary geometry. With fig. Oxford 1908. 3 sh. 6 d.

Salvert, de, Trois notes relatives à la fonction elliptique de troisième espèce. Paris 1908. 1 Fr. 50 c.

Severi, F., Lezioni di geometria sopra una curva; superficie di Riemann; integrali Abeliani. Padova 1908. 7 L. 50 c.

Teixeira, F., Gomes, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Traduit de l'Espagnol, revu et très augmenté. Vol. I. Paris 1908. 20 Fr.

Workmann, W. P., and R. H. Chope, Tutorial arithmetic. 3rd ed. London 1906. With or without answers. 4 sh. 6 d.

Worms de Romilly, P., Sur les premiers principes des sciences mathémat. Paris 1907. 2 Fr. 75 c.

Youngson, P., Board of trade arithmetic for first class engineers. London 1908. 3 sh.

---

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Archiv der Mathematik und Physik. 13. Band. 4. Heft.

Landau, Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate. Vogt, Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen. Reißner, Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie. Lohnstein, Einige Reihenentwicklungen für π. Rezensionen.

Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 9. Band. 1. Heft.

Eneström, Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik. Vogt, Die Geometrie des Pythagoras. Mortet, Le plus ancien traité français d'algorisme. Saalschütz, Zur Geschichte der Relationen zwischen den Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung und ihren Koeffizienten. Eneström, Sturm, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Anfragen und Antworten. Rezensionen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 134. Heft III, IV.

Jung, Kurvenscharen in einer Ebene. Saalschütz, Zur Determinanten-Lehre. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Sturm, Bemerkung zu Cremonas Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung. Réthy, Über Labilität eines materiellen Punktes im widerstehenden Mittel. Rémoundos, Sur quelques transformations des équations différentielles du premier ordre.

Mathematische Annalen. 66. Band. 1. Heft.

Hilb, Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen. Jerosch und Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten. Faber, Über stetige Funktionen. Wieferich, Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt. Landau, Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie. Wieferich, Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten. Ouspensky, Note sur les nombres entiers dépendant d'une racine cinquième de l'unité. Meyer, Über eine Anwendung der Invariantentheorie auf die Entwicklung von Integralen, insbesondere

rationaler, elliptischer und hyperelliptischer, in Reihen. Miller, On the multiple holomorphs of a group. Preisausschreiben der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen für den Beweis des Fermatschen Satzes.

Monatshefte für Mathematik und Physik. XIX. Jahrgang 1908. 3., 4. Vierteljahr.

Saalschütz, Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken. Blaschke, Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Plemelj, Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend. Plemelj, Riemannsche Funktionsscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Hahn, Bemerkungen zu den Untersuchungen des Herrn M. Fréchet: sur quelques points du calcul fonctionnel. Rothe, Über das Grundtheorem und die Obertheoreme der automorphen Funktionen im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung mit vier singulären Punkten. Hahn, Über die Anordnungssätze der Geometrie. Ernst, Mechanische Erzeugung der Zissoiden vierter Ordnung. Pölt, Tafel der viergliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen ohne dreigliedrige Involutionsuntergruppe. Graziadei, Die viergliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen mit einer dreigliedrigen Involutions-Untergruppe. Literaturberichte.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39. Jahrgang. 4. Heft.

Lietzmann, Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens). Wieleitner, Bericht über den IV. Internationalen Mathematikerkongreß zu Rom. Walckling, Bericht über die XVII. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Göttingen, Pfingsten 1908. Literarische Berichte.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39. Jahrgang. 5. und 6. Heft.

Reichenbächer, Über das Iterationsproblem. Hagge, Über das Tangentenviereck. Grüttner, Die Zerlegung geometrischer Zeichnungen in Konstruktionselemente und ihre Anwendung bei der Lösung von Aufgaben. Sterba, Beiträge zur Lehre vom Dreiecke. Aufgaben-Repertorium. Literarische Berichte. Pädagogische Zeitung.

L'Enseignement Mathématique. Xe Année. No. 5.

Poincaré, L'invention mathématique. Buhl, Le nouveau diplôme d'études supérieures et l'agrégation des sciences mathématiques. Costabel, Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe. Andrade, Le premier livre de la géométrie naturelle. Burali-Forti, L'importance des transformations linéaires des vecteurs dans le calcul vectoriel général. Chronique. Notes et documents. Bibliographie.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième Série. Tome VIII. Juillet 1908.

Fréchet, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées. Bricard, Sur les polygones inscrits et circonscrits à des quadriques homofocales. Pellet, Sur le centre de courbure d'une roulette. Questions. Solutions.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4me Série. Tome VIII. Août 1908.

Cotty, Sur les surfaces de Steiner. Lery, Sur l'équilibre du corps solide. Haag, Notes sur les surfaces à lignes de courbure planes. Concours. Questions.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 6. Part 5.

Rogers, Note on a soluble dynamical problem. Bromwich, The relation between the convergence of series and of integrals. Hill, On a formula for the sum of a finite number of terms of the hypergeometric series when the fourth element is unity. Hobson, On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions. Harrison, The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII. Part V, VI.

Muir, The theory of Hessians in the historical order of development up to 1860. M'Aulay, Algebra after Hamilton, or multenions.

Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 9. Nr. 4.

Saurel, On the spherical representation of a surface. Sinclair, The absolute minimum in the problem of the surface of revolution of minimum area. Moore, Note on the roots of Bessel functions. Hedrick, A smooth closed curve composed of rectilinear segments with vertex points which are nowhere dense. Gilman, Evaluation of the probability integral. Haskins, On a second theorem of the mean. Carmichael, Another proof of a theorem in multiply perfect numbers. Coolidge, A theorem concerning equal ratios. Hurwitz, Note on certain iterated and multiple integrals.

Periodico di Matematica. Anno XXIII. 1907/08.

Silla, Sui principî che servono a stabilire la definizione di massa. Bisconcini, Numeri interi, che si possono decomporre nella somma o nella differenza dei quadrati di due numeri interi. Galvani, Rappresentazione grafica per le funzioni complesse di variabile complessa. Scaccianoce, Rappresentazione analitica delle superficie generate da due piani $\sigma e \sigma'$, e da una stella di classe p con un piano $(p-1)$-plo, in corrispondenza birazionale fra loro. Orlando, Sullo sviluppo dei numeri equivalenti in frazioni continue. Giudice, Sullo risoluzione asintotica delle equazioni numeriche col metodo di Lagrangia. Scarpis, Soluzione di un sistema omogenes di n congruenze lineari ad n incognite rispetto ad un modulo qualunque. Paternò, Di alcuni perfezionamenti nella risoluzione grafica dell'angelo triedro. Bisconcini, Soluzioni razionali delle equazioni $x^2 \pm y^2 = A$. Tanturri, Dalla formula di Pascal a quella di Bernoulli sulle somme delle potenze simili dei primi n numeri. Vercellin, Equazioni le cui radici sono disponibili in gruppi binare aventi prodotto costante. Bottari, Soluzioni intere dell'equazione pitagorica e applicazione alla dimostrazione di alcuni teoremi della teorica dei numeri. Morale, Sui gruppi di numeri naturali, aventi una data somma. Giudice, Deduzione del principio d'Archimede da quello di continuità. Quintilî, Sopra uno speciale determinante. Cappello, Hudici teoremi sulla moderna geometria del triangolo. Sittignani, Sull' indimostrabilità del postulato di Euclide. Mignosi, Sulla rappresentazione dei numeri irrazionali. Vercellin, Sul triangolo. Pesci, Un problema di analisi combinatoria. Sibirani, Superficie che passano infinite volte per curve o punti arbitrariamente scelti. Mercatanti, I sistemi lineari di cerchi sulla sfera e sulle superficie a curvatura costante positiva. Mignosi, Sulla equazione lineare indeterminata. Bellatalla, Dimostrazione planimetrica del teorema dei triangoli omologici. Cipolla, Intorno ad un radicale continuo. Composto, Sulla trasformazione dei radicali soprapposti. Cattaneo, Osservazioni sopra due articoli del sig. Bottari. Yorung, Sulle soluzioni dell'equazioni: $x = 1 + \{1 + (1 + x^2)^2\}^2$: $x = 1 + [1 + \{1 + (1 + x^2)^2\}^2]^2$; $x = y + \{y + (y + x^2)^2\}^2$. Pincherle, Sulla Teriora dei limiti. IV. Congresso Internazionale dei Matematici. Loria, Intorni ad alcuni problemi metrici che s'incontrano in geometria descrittiva. Bonola, Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede Reeks. Deel VIII. Derde Stuk.

Barrau, Sur un groupe géométrique d'ordre $2 \cdot 2^{n-1} \cdot (n!)$ et sur la configuration, qu'il engendre. Keesing, Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires, suivant la méthode des intégrales définies de Laplace. Postma, Over de grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening. Bouman, Über den linearen Komplex und das Komplexen-Büschel. Van de Griend jr., Imaginaire punten van de kegelsneden. Teixeira de Mattos, Een eenvoudig bewijs voor de stelling van Poncelet, betreffende innen omgeschreven veelhoeken van kegelsneden. van

Geer, Hugeniana geometrica. V. Nielsen, Note sur les intégrales d'Euler et de Weierstraß concernant la fonction gamma. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde. Bibliographie.

4. Kataloge.

W. Junk, Berlin W 15., Kurfürstendamm 201. Bulletin No. 6.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Schulbücher werden nur ausnahmsweise besprochen. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

W. Rouse Ball, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Deuxième édition française traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. — Deuxième partie. Paris 1908, A. Hermann. Frs. 5.—

E. Bardey, Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Sechste Auflage. Bearbeitet von Fr. Pietzker. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

K. Boehm, Elliptische Funktionen. Erster Teil. Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren im Text. [Sammlung Schubert Band XXX.] Leipzig 1908, G. J. Göschensche Verlagshandlung. ℳ 8.60.

E. Borel, Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe, besorgt von Paul Stäckel. In zwei Bänden. Erster Band. Arithmetik und Algebra. Mit 57 Textfiguren und 3 Tafeln. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 8.60.

H. Cornelius, Elementargesetze der bildenden Kunst. Grundlagen einer praktischen Ästhetik. Mit 240 Abbildungen im Text und 13 Tafeln. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Louis Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von Dr. Carl Siegel. Leipzig 1908. Dr. Werner Klinkhardt.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. In zwei Bänden. Erster Band. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren im Text. Zweite, sorgfältig durchgesehene und erweiterte Auflage. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Die Kultur der Gegenwart, ihre Entwicklung und ihre Ziele. Herausgegeben von Paul Hinneberg. Teil I, Abteilung IX. Die osteuropäischen Literaturen und slawischen Sprachen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band VI 1 B. Heft 1. [Inhalt: G. H. Darwin und S. S. Hough, Bewegung der Hydrosphäre.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 2.60.

E. Fabry, Traité de mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences. Avec une préface de G. Darboux. Paris 1908, A. Hermann et Fils. Frs. 9.—.

F. W. Hinrichsen, Vorlesungen über chemische Atomistik. Mit 7 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 7.—.

Fr. Hochheim, Elementare Theorie der Wechselströme. Ein Beitrag zur Behandlung der Wechselströme in der Oberstufe der Realanstalten. I. Teil. Leipzig 1908. In Kommissionsverlag bei B. G. Teubner. ℳ 1.50.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 2 Teile. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1907—08. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig 1908. In Kommission bei B. G. Teubner. ℳ 7.50.

J. Koch, Beweis des großen Fermatschen Satzes. Borna-Leipzig 1908, Robert Noske. M 1.25.

R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erster Band. Kurventheorie. Mit 26 Figuren im Text. Leipzig 1908. B. G. Teubner. M 12.—.

E. Netto, Gruppen- und Substitutionentheorie. [Sammlung Schubert Band LV.] Leipzig 1908, G. J. Göschensche Verlagshandlung. M 5.20.

R. Neuendorff, Über Kreispunktpolarkurven. Dissertation. Kiel 1908.

R. Neuhauß, Lehrbuch der Projektion. Mit 71 Abbildungen. Zweite umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1908, Wilhelm Knapp. M 4.—.

Niels Nielsen, Lehrbuch der unendlichen Reihen. Vorlesungen gehalten an der Universität Kopenhagen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 12.—.

E. D. Perry, Die amerikanische Universität. Mit 22 Abbildungen im Text. [Aus Natur und Geisteswelt, 206. Bändchen.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 1.25.

J. Perry, Angewandte Mechanik. Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Rudolf Schick. Mit 371 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 18.—.

M. Planck, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. Zweite Auflage. [Wissenschaft und Hypothese, Bd. VI.] Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 6.—.

C. Runge, Analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 6.—.

A. Schoenflies, Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 98 Textfiguren. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 2.80.

H. Schubert und **A. Schumpelick,** Arithmetik für Gymnasien. Zweites Heft: Für obere Klassen. M 3.25.

—, Ausgewählte Resultate zur Arithmetik für Gymnasien. Zweites Heft. Leipzig 1908. G. J. Göschensche Verlagshandlung.

Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen. XXIX. Jahrgang. I. Teil (Königreich Preußen). 1908/9. Nach amtlichen Quellen bearbeitet. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 5.—, Teil II (die Anstalten der übrigen deutschen Bundesstaaten) wird unberechnet nachgeliefert.

R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. In vier Bänden. Zweiter Band. Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 16.—.

P. Théodoroff, Démonstration de la grande proposition de Fermat, $x^n + y^n = z^n$ est impossible en nombres entiers si $n > 2$. Sofia 1908.

J. Thomae, Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Mit 10 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 7.80.

G. Vivanti, La nozione dell' infinito secondo gli studi più recenti. Messina 1908.

A. Voss, Über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 3.60.

Marie Wegner, Merkbuch der Frauenbewegung. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 2.40.

A. Werner, Über Systeme von drei Pfaffschen Gleichungen im Raume von fünf Dimensionen. Dissertation. Greifswald 1908.

J. Edm. Wright, Invariants of quadratic differential forms. [Cambridge Tracts in mathematics and mathematical physics No. 9.] Cambridge University Press 1908. 2 s. 6 d.

G. C. Young und **W. H. Young,** Der kleine Geometer. Deutsche Ausgabe besorgt von S. und F. Bernstein. Mit 127 Textfiguren und 3 bunten Tafeln. Leipzig 1908, B. G. Teubner. M 3.—.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Oktober 1908.

Neu aufgenommen als Mitglied:

Herr Dr. Erich Artur Werner in Greifswald, Kuhstr. 7.

Ausgetreten:

Bellermann G., Dr., Professor am Realgymnasium, Berlin.

Crawley E. S., Professor an der Universität, Philadelphia Pa. (U. S. A.).

Adressenänderungen:

Archibald R. C. Dr., Professor a. d. Brown-Universität, Providence R. I. (U. S. A.), Charlesfieldstr. 9.

Blümcke A., Gymnasialprofessor, Augsburg, Maximilianstr. A. 8.

Burkhardt H. Dr. Professor, München, Ludwigstr. 22a; ab 1. April 09 Martiusstr. 3.

Nitz K. Dr., Oberlehrer, Königsberg i. Pr., Löb. Langgasse 29.

Stickelberger, L., Dr., Professor a. d. Universität, Freiburg i. Br., Landsknechtstr. 17.

Wieleitner H. Dr., Gymnasiallehrer, Speyer, Landauerstr. 3.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 28. Oktober 1908.* Kassenbericht und Bericht der Revisionskommission. Neuwahl des Vorstandes. Fuchs, Über elliptische Funktionen und Integrale in ihrer Abhängigkeit von einem Parameter. — *Sitzung am Mittwoch, den 25. November.* Lampe, Der Funktionsbegriff bei Euler. Wallenberg, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Zacharias, Über die allgemeinen Eigenschaften eines Büschels polarer Felder.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. Winter-Semester 1908/09. *Erste Sitzung am 27. Oktober:* F. Klein berichtet über die Ereignisse der Ferien und gedenkt dabei des verstorbenen Althoff. — *Zweite Sitzung am 3. November:* Nach dem Literaturbericht von F. Klein spricht C. Runge über die neuesten Fortschritte der französischen Aviatiker sowie über den neu erschienenen zweiten Band „Aerodonetics" von Lanchester. — *Dritte Sitzung am 10. November:* F. Klein legt die neue Literatur vor. — A. Haar trägt über ein besonderes System von Orthogonalfunktionen vor, nach dem sich jede stetige Funktion auf die Fouriersche Weise in eine konvergente Reihe entwickeln läßt.

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Generalversammlung, Freitag, den 6. November 1908.* Rechenschaftsbericht über das abgelaufene Vereinsjahr. — Antrag auf Festsetzung einer Ablösungssumme für die Mitgliedsbei-

träge. — Wahlen. — Vortrag: v. Schrutka, Über die Newtonsche und verwandte Nährungsmethoden. — *Freitag, den 20. November 1908.* Hahn, Über das einfachste Problem der Variationsrechnung.

British Association for the advancement of science. Die 78. Versammlung der British Association fand am 2.—9. September d. J. zu Dublin statt unter der Leitung von Sir George F. Darwin. Die Vorträge in der „Section A" (Mathematik und Physik), in der W. N. Shaw den Vorsitz hatte, bezogen sich fast ausnahmslos auf Physik und Astronomie. Die nächste Jahresversammlung wird im Sommer 1909 zu Winnipeg unter dem Vorsitz von J. J. Thomson abgehalten werden.

Association française pour l'avancement des sciences. Die französische Naturforscherversammlung hielt ihre 37. Jahresversammlung am 3.—10. August d. J. zu Clermont-Ferrand ab. Den Vorsitz hatte P. Appell inne. In der ersten allgemeinen Sitzung hielt Appell eine Rede über „L'enseignement des sciences et la formation de l'esprit scientifique." Die Fachsitzungen der 1. und 2. Sektion (Mathematik, Astronomie, Geodäsie und Mechanik) boten die folgenden Vorträge: Barisien, Résolution de l'équation du troisième degré; Borel, Enseignement des mathématiques dans les facultés; Boutin, 1. Sur un certain groupe de nombres; 2. Développement de $\sqrt{N}$ en fraction continue et résolution des équations de Fermat; Lebon, Pour la recherche des facteurs premiers des grands nombres; Pellet, Sur les équations ayant toutes leurs racines réelles; Appell, Sur un théorème relatif au déplacement initial d'un système sans frottement; Gérardin, 1. Recherches sur les nombres amiables; 2. Sur la résolution en entiers positifs de $x^p \pm a y^2 = A^2$; 3. Solutions générales de $ax^2 + by^2 = cz^2 + dt^2$; Richard, 1. Sur quelques points de la philosophie des mathématiques; 2. Sur l'enseignement de l'astronomie; Rousseau, La géométrie élémentaire basée sur le groupe des déplacements; Welsch, De la correspondance homographique et de ses applications à la solution d'un grand nombre de problèmes; Chrétien, 1. La comète Daniel 1907—d et son spectre; 2. Un nouveau modèle de spectrohéliographe; Libert, Un catalogue de vingt-cinq bolides; Belot, Essai de cosmogonie tourbillonnaire. — Die nächste Jahresversammlung soll 1909 zu Lille abgehalten werden; zum Vorsitzenden der Sektionen 1 und 2 für 1909 wurde Lebon ernannt.

Società italiana per il progresso delle scienze. Die italienische Naturforschergesellschaft hielt unter dem Vorsitz von Volterra ihre Jahresversammlung vom 18. bis 23. Oktober in Florenz ab. Die Anzahl der Sektionen belief sich auf 20. In der Sektion 1 (Mathematik) wurden folgende Vorträge gehalten: Amoroso, Über die Ausdehnung des Dirichletschen Problems auf Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Boggio, Auflösungen einiger Fragen, die sich auf das Potential einer nichthomogenen Kugel beziehen. Crudeli, Neuere Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren einer in gleichförmiger Rotationsbewegung befindlichen flüssigen Masse. Favaro, Galilei und die Bestimmung des Gewichts der Luft. Loria, Die Geometrographie und ihre Transformationen. Gianfranceschi, Die neueren Fortschritte in der Elektrodynamik bewegter Körper. Gremigni, Über die Bedeutung des Archimedischen Postulats in der Theorie der geometrischen Äquivalenz Pizzetti, Astronomie und Geodäsie als mathematische Wissenschaften. Severi,

Über die mit einer algebraischen Mannigfaltigkeit verbundenen Doppelintregrale erster Art. Somigliana, Über eine mechanische Darstellung einiger Kraftfelder. Venturi, Über die Theorie der Wage von Eötvös. Vivanti, Über den gegenwärtigen Stand der Theorie der ganzen Funktionen.

III. Internationaler Kongreß für Philosophie. Auf dem III. internationalen Kongreß für Philosophie, der vom 31. August bis zum 5. September in Heidelberg stattfand, wurden u. a. folgende, die Mathematiker interessierende Vorträge gehalten. Mansion, Gauß gegen Kant über die nichteuklidische Geometrie. Kuntze, Philosophische Tragweite der Ausdehnungslehre von H. Graßmann. Winter, Beziehungen zwischen der Intuition und dem mathematischen Gedanken. Enriques, Das Prinzip vom zureichenden Grunde. — Der nächste internationale Kongreß für Philosophie wird 1911 in Bologna abgehalten werden.

The London Mathematical Society. Im Jahre 1908—9 finden die Sitzungen an folgenden Tagen statt: 1908 am 12. November und 10. Dezember; 1909 am 14. Januar, 11. Februar, 11. März, 22. April, 13. Mai und 10. Juni.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Benekesche Preisstiftung. Die Philosophische Fakultät der Universität Göttingen schreibt für das Jahr 1911 folgende Preisaufgabe aus: „Die Schwingungszahlen, die in den Emissionsspektren der Elemente beobachtet werden, zeigen in vielen Fällen gesetzmäßige Verteilung. Sie bilden sogenannte Serien. Es sollen alle darüber vorhandenen Beobachtungen gesammelt und bearbeitet und die Theorien, die über die Serien aufgestellt worden sind, kritisch erläutert werden. Erwünscht sind zugleich eigene Versuche, um die vorhandenen Beobachtungen zu ergänzen. So ist z. B. zu vermuten, daß in dem Spektrum von Barium dreifache Serien vorkommen, die den dreifachen Serien in dem Spektrum der verwandten Elemente analog sind."

Bewerbungsschriften sind in der üblichen Weise mit Motto und verschlossener Namenangabe bis zum 31. August 1910 an die Fakultät einzusenden. Der erste Preis beträgt 3400 ℳ, der zweite 680 ℳ; die Bekanntmachung der zuerkannten Preise erfolgt am 11. März 1911.

Preisaufgaben der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Haarlem. Die Gesellschaft schreibt u. a. folgende Preisaufgaben aus:

1. La Société demande une étude physico-mathématique du phénomène des vents de terre et de mer: a) dans le cas d'une côte indéfinie; b) dans le cas d'une langue de terre; c) dans le cas d'une île ronde.

2. La Société demande un aperçu critique des diverses théories des phénomènes thermoélectriques, en y ajoutant, si l'occasion s'en présente, de nouvelles considérations relatives à ce sujet.

3. La Société demande une étude théorique des propriétés magnétiques des corps, fondée sur la théorie des électrons.

Termin: 1. Januar 1909. Der Preis besteht in einer goldenen Medaille oder 150 Gulden. Die Bewerbungsschriften sind mit verschlossener Adresse des Verfassers an den Sekretär der Gesellschaft Dr. J. Bosscha in Haarlem einzusenden.

3. Hochschulnachrichten.

Universität Bonn. An hiesiger Universität ist dem Professor Dr. Carathéodory ein Lehrauftrag für *technische Mechanik* und *höhere Geodäsie* sowie dem Professor an der landwirtschaftlichen Akademie Bonn-Poppelsdorf C. Müller ein Lehrauftrag für *niedere Geodäsie* erteilt worden. Da schon bisher Prof. London mit dem Unterricht in *darstellender Geometrie* beauftragt war, so sind nunmehr alle Fächer, die für die Lehrbefähigung *in angewandter Mathematik* in Frage kommen, an der *Universität Bonn vollständig vertreten.*

Fortbildungskursus an der Universität Breslau. Vom 5. bis 8. Oktober fand zum erstenmal an der Universität Breslau auf Veranlassung des Schlesischen Philologenvereins ein Fortbildungskursus für Oberlehrer statt, an dem ungefähr 200 Direktoren und Oberlehrer der Provinz teilnahmen. Erfreulicherweise war auch unter den Vorträgen die Mathematik vertreten. Professor Kneser sprach in drei Stunden über „neuere Forschungen über die Grundlagen der Geometrie." Die Bibliothek des mathematischen Seminars war während der Kursustage in liberaler Weise für Interessenten zugänglich.

Technische Hochschule zu Breslau. Die Eröffnung der neuen Technischen Hochschule zu Breslau, die für den 1. Oktober 1909 geplant war, ist baulicher Schwierigkeiten wegen bis zum 1. Oktober 1910 verschoben worden.

---

4. Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. R. Bonola habilitierte sich als Privatdozent der projektiven und darstellenden Geometrie an der Universität Pavia.

Dr. Hellinger habilitierte sich als Privatdozent der Mathematik an der Universität Marburg.

Professor Dr. G. Hessenberg, an der Landwirtschaftlichen Akademie zu Bonn-Poppelsdorf, habilitierte sich als Privatdozent der Mathematik an der Universität Bonn.

Dr. Conrad Müller habilitierte sich als Privatdozent der Mathematik und ihrer Geschichte an der Universität Göttingen.

Dr. H. Tietze habilitierte sich als Privatdozent der Mathematik an der Universität Wien.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Professor Dr. E. Almansi an der Universität Pavia wurde zum korrespondierenden Mitgliede des Istituto Lombordo gewählt.

Dr. G. A. Bliss zu Princeton wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Chicago ernannt.

Dr. Bourgeois wurde zum Professor der Astronomie und Geodäsie an der École Polytechnique zu Paris (an Stelle von Poincaré) ernannt.

Professor Dr. A. D. Butterfield an der Universität von Vermont wurde zum Professor der Mathematik am Polytechnischen Institut von Worcester ernannt.

Dr. H. H. Dalaker wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota ernannt.

Professor Dr. S. C. Davisson wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Indiana Universität ernannt.

Professor Dr. Disteli an der Technischen Hochschule zu Dresden hat einen Ruf als etatmäßiger Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe (als Nachfolger von F. Schur) angenommen.

Dr. Dulac wurde zum Professor der Mathematik an der École des sciences zu Alger ernannt.

Dr. E. P. R. Duval wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Oklahama ernannt.

Dr. Fréchet wurde zum „maître de conférence" an der Universität Rennes ernannt.

Dr. J. W. L. Glaisher wurde von der London Mathematical Society der de Morgan-Preis für 1908 verliehen in Anerkennung seiner Untersuchungen in der reinen Mathematik.

Dr. G. W. Hartwell wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Kansas ernannt.

Dr. C. Haseman wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Indiana Universität ernannt.

Dr. A. Henderson an der Universität von Nord-Carolina wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Dr. H. Husson wurde zum Professor der Mechanik an der Universität Caen ernannt.

Professor Dr. H. Lamb an der Universität zu Manchester wurde von der Universität zu Cambridge ehrenhalber zum Doctor of laws ernannt.

Dr. J. N. Lennes wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Brown-Universität ernannt.

Professor Liapounoff, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, wurde zum auswärtigen Mitgliede der Accademia dei Lincei gewählt.

Professor Dr. G. Loria an der Universität Genua wurde zum Ehrenmitgliede der Mathematischen Gesellschaft zu Amsterdam gewählt.

Dr. E. Maillet wurde zum „Répétiteur adjoint" der École Polytechnique in Paris ernannt.

Professor T. E. Mckinney an der Wesleyan Universität wurde zum Professor der Mathematik an der Universität von Süd-Dakota ernannt.

Dr. N. C. Riggs wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Carnegie Technical School ernannt.

Dr. W. H. Roever wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Staatsuniversität von Jowa ernannt.

Professor Dr. D. A. Rothrock wurde zum o. Professor der Mathematik an der Indiana Universität ernannt.

Dr. Erhardt Schmidt, Privatdozent an der Universität Bonn, wurde zum o. Professor der Mathematik an der Universität Zürich ernannt.

Professor Dr. H. v. Seeliger an der Universität München wurde zum auswärtigen Mitgliede der Accademia dei Lincei gewählt.

Professor Dr. F. Severi an der Universität Padua wurde zum korrespondierenden Mitgliede des Istituto Veneto gewählt.

Professor Dr. C. Somigliana an der Universität Turin wurde zum Mitglied der Accademia dei Lincei gewählt.

Dr. J. E. Stocker wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Lehigh Universität ernannt.

Dr. M. N. Vanecek wurde zum ao. Professor der Mathematik an der böhmischen Technischen Hochschule zu Prag ernannt.

Gestorben:

Professor Dr. H. Hertzer, bis zum 1. Oktober 1907 Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, ist am 16. November d. J. im Alter von 77 Jahren gestorben. Er war seit 1891 Mitglied der Vereinigung.

5. Vermischtes.

Bayerische Lehramtsprüfungen für Mathematik und Physik, 1908. Der erste Abschnitt der Prüfungen (Zwischenprüfung) wurde für ganz Bayern in München vom 8.—23. Oktober abgehalten. Die Prüfungskommission bestand aus 7 Mathematikern (darunter 2 Mittelschulrektoren) und 2 Physikern, nebst 2 weiteren Mittelschulmännern zur Zensur des deutschen Aufsatzes. Gemeldet hatten sich 84 Kandidaten, von denen 15 wieder zurücktraten. Von den übrigen erhielten 5 die Note I, 27 Note II, 27 Note III, 10 bestanden die Prüfung nicht. Von letzteren 10 hatten 7 die Prüfung wiederholt; dagegen ist es 7 von 10 schon früher Bestandenen gelungen, durch Wiederholung ihre Note aufzubessern. — Für den zweiten (Schluß-) Abschnitt waren die wissenschaftlichen Arbeiten schon am 1. Mai, bzw. 1. Juni zur Zensur einzuliefern; hierzu und zur mündlichen Prüfung, die vom 26. bis 31. Oktober in München stattfand, waren zwei getrennte Kommissionen gebildet, je bestehend aus 6 Mathematikern und 2 Physikern von den Hochschulen Bayerns sowie einem Pädagogen. Von den 67 ursprünglich gemeldeten Kandidaten traten 5 zurück, von weiteren 5 mußten die eingereichten Arbeiten als ungenügend zurückgewiesen werden. Von den verbleibenden bestanden 4 das Examen nicht, während 5 sich die Note I, 33 Note II, 15 Note III erwarben; darunter sind einige nur Aufbesserungen schon früher erworbener Noten. Das Resultat dieses Abschnittes ist als befriedigend zu bezeichnen; aber der Andrang der Kandidaten ist noch zu groß.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Himmel und Erde. Die bekannte illustrierte Monatsschrift „Himmel und Erde" ist mit dem neuen, 21. Jahrgange, in den Verlag der Firma B. G. Teubner in Leipzig übergegangen. Wie das kürzlich erschienene Heft 1 (Oktober 1908) zeigt, ist die Redaktion in den Händen des Herrn Dr. P. Schwahn, des Direktors der Urania in Berlin, verblieben.

L. Krüger, Bedingungsgleichungen für Liniennetze und Rückwärtseinschnitte. (Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Institutes, Neue Folge Nr. 34). [50 S.] gr. 4. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Behufs Ausgleichung eines Netzes, dessen Linien gemessen sind, verglich Gerling eine gemessene Strecke mit dem für sie aus anderen gemessenen

Strecken berechneten Werte, F. G. Gauß hingegen drückte, je nachdem der vorliegende Fall die Gelegenheit dazu bot, entweder die Tangente eines halben Winkels auf mehrfache Weise durch gemessene Strecken aus und gewann durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke die Bedingungsgleichungen für die Verbesserungen der gemessenen Strecken, oder er stellte, wenn Bedingungsgleichungen zwischen mehreren Winkeln zu erfüllen waren, zunächst wieder mittels der Formel für die Tangente des halben Winkels die Winkel durch die Seiten und sodann mit Benutzung der logarithmischen Differenzen die Winkelkorrektionen durch Streckenkorrektionen dar, worauf die für erstere Korrektionen geltenden Bedingungsgleichungen durch solche für letztere ersetzt werden konnten.

In allgemeinerer Weise geht Verfasser vor, indem er durch Differentiation einer Formel, welche einen Dreieckswinkel aus den drei Seiten bestimmen läßt, — und zwar nimmt er die Kosinusformel — die Verbesserung eines Winkels durch die Seitenverbesserungen ausdrückt. Die für ein Zentralsystem geltende Bedingungsgleichung, wonach die Summe der um die Station herumliegenden Winkel 360^0 betragen muss, wird in mehrfacher Weise, so daß also nur Streckenkorrektionen darin auftreten, dargestellt.

Da ein Viereck als ein Zentralsystem mit einem Dreieck als Grundfläche aufgefaßt werden kann, so gewinnt Verfasser durch Spezialisierung der allgemeinen Formeln die bei Ausgleichung eines Linienvierecks anzuwendenden.

Durch die Betrachtung zweier, in verschiedener Form dargestellter Bedingungsgleichungen für den Zusammenschluß eines Vierecks ergibt sich dem Verfasser die von C. F. Gauß aufgestellte, notwendige und hinreichende Bedingung für die physische Möglichkeit der Pothenot-Snelliusschen Punktbestimmung. Für die Praxis hat dieses Kriterium freilich nur insofern Wert, als man dadurch unter Umständen ein bei der Beobachtung begangenes Versehen entdeckt, wenn nämlich die Pothenotsche Bestimmung des Standortes, von dem aus nach drei Festpunkten visiert wurde, bei Zugrundelegung der notierten Werte unmöglich ist. Denn wenn die Beobachtung ausgeführt ist, so ist damit die Möglichkeit ihrer Ausführung bewiesen.

Verfasser gibt das Kriterium für die physische Möglichkeit der Pothenotschen Bestimmung noch in einer anderen von C. F. Gauß herrührenden Form, wobei die Lagenbezeichnung der Punkte durch komplexe Größen erfolgt, und benutzt ferner auch die Collinsschen Hilfspunkte zu seiner Ableitung.

Des weiteren teilt Verfasser mehrere Lösungen der Pothenotschen Aufgabe mit, die zum Teil schon C. F. Gauß bekannt waren, wie aus seinem Nachlaß hervorgeht. Die betreffenden Gleichungen, welche ohne Ableitung und Zeichenerklärung sich in den nachgelassenen Papieren vorfinden, richtig zu deuten, setzt eine Sachkenntnis und Findigkeit voraus, wie sie fast nur der Verfasser durch seine Bearbeitung des Gaußschen geodätischen Nachlasses sich erwerben konnte.

Die Bedingungungsgleichungen für einen Rückwärtsschnitt nach mehr als drei Festpunkten leitet Verfasser her durch Aufstellung der Bedingungsgleichungen für einen Rückwärtsschnitt nach je drei Punkten. Dabei gelangt er zu zwei Formen von Bedingungsgleichungen. Bei vier Festpunkten gibt es vier Bedingungsgleichungen der ersten Form und sechs Bedingungsgleichungen der zweiten Form, welche durch zyklische Vergleichung der Strecken inein-

ander übergehen und theoretisch einander gleichwertig sind, nicht aber bei praktischer Anwendung, weshalb Verfasser eine Untersuchung über die günstigste Bedingungsgleichung der ersten und der zweiten Form ausführt.

Für ein aus zwei miteinander zusammenhängenden Zentralsystemen bestehendes Liniennetz, für ein Linienviereck und für einen Rückwärtseinschnitt nach fünf Festpunkten ist die Ausgleichsrechnung beispielshalber auch numerisch durchgeführt.

Die Formeln und Ausdrücke, welche in der Abhandlung hergeleitet werden, zeichnen sich in der Regel durch ihren symmetrischen Bau, die mathematische Ableitung selbst durch ihre Eleganz aus.

Jena. OTTO KNOPF.

M. Pasch, Grundlagen der Analysis. Ausgearbeitet unter Mitwirkung von Clemens Thaer. [VI. u. 140 S.] gr. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner.

Die Richtung, in der sich die „Vorlesungen über neuere Geometrie" und die „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung" bewegten, habe ich um so lieber von neuem aufgenommen, als die planmäßige Durchforschung des Aufbaues der Analysis sich zu einem ansehnlichen Bestandteil der mathematischen Arbeit entwickelt hat.

Die Zahl der Versuche, die Analysis auf sichere Grundlagen zu stellen, ist nicht gering. In der Überzeugung, daß dennoch weitere Versuche berechtigt sind, bringe ich die hiermit angekündigte Darstellung zur Veröffentlichung. Ich darf nicht hoffen, die so schwierige Aufgabe gelöst zu haben; ich werde befriedigt sein, wenn meine Darstellung die Lösung fördert, besonders dadurch, daß sie die Punkte, auf die es ankommt, möglichst ohne Ausnahme zutage treten läßt.

Gießen. M. PASCH.

E. Schröder, Abriß der Algebra der Logik. Bearbeitet im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Eugen Müller, Professor an der Oberrealschule zu Konstanz. In 3 Teilen. I. Teil: Elementarlehre. Mit 4 Figuren im Text. [V u. 50 S.] gr. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner. (Teil II in Vorbereitung.)

Wenn die Algebra der Logik bis heute, wenigstens in Deutschland, noch nicht die verdiente Beachtung und Würdigung gefunden hat, so lag dies vielleicht zum Teil an dem Mangel einer kurzen, aber vollständigen einführenden Darlegung ihrer wichtigsten Methoden und Ergebnisse. Solchem Mangel gedachte schon vor Jahren Ernst Schröder abzuhelfen durch einen „Abriß der Algebra der Logik". Es finden sich in seinem handschriftlichen Nachlaß indessen nur kurze, andeutende Entwürfe und einzelne Bemerkungen zu einem solchen Abriß. Immerhin läßt sich daraus die Absicht erkennen, nicht bloß einen Auszug aus seinem größeren Werk, den „Vorlesungen über die Algebra der Logik", zu geben, sondern zugleich auch die Begründung und Entwicklung der Disziplin hier und da zu verbessern, unter Berücksichtigung neuerer einschlägiger Literatur und mancher privaten Mitteilungen. Dieser Absicht gemäß, und mit möglichster Anlehnung an das hinterlassene Material, behandelt das einstweilen vorliegende erste Heft des Abrisses die Voraussetzungen und Grundlagen der „Gebietetheorie" sowie einen elementaren Teil dieser selbst. Nur auf diese Elementarlehre beziehen sich übrigens die nachgelassenen Aufzeichnungen von Schröders Hand. Doch ist damit der Weg vorgezeichnet für die Fortsetzung des Abrisses, von

dem ein zweites Heft die Lehre von den Gebietsfunktionen und von der Auflösung der Gleichungen und Ungleichungen enthalten und binnen kurzem folgen wird. Mit einem dritten Teil endlich soll der Abriß auch den vorläufig letzten und wichtigsten Teil der Theorie, die Algebra der Relative oder Beziehungsbegriffe, umfassen.

Konstanz. E. Müller.

E. Netto, Gruppen- und Substitutionentheorie. (Sammlung Schubert LV.) [VIII. u. 176 S.] Leipzig 1908, G. J. Göschen. Geb. ℳ 5.20.

Die Aufgabe des Buches ist die, eine kurze Einführung in die Theorie der Gruppen und der Substitutionen zu liefern. Die für sein Studium als notwendig vorausgesetzten Kenntnisse sind ganz elementarer Natur; dadurch werden freilich viele ebenso wichtigen wie tiefliegenden Forschungsresultate von der Darstellung ausgeschlossen: aber das entspricht dem Charakter der „Sammlung Schubert": Es sollte eben kein umfassendes Werk geliefert werden; ja, dem jetzigen Stande der Wissenschaft gemäß wäre das kaum möglich gewesen. Dabei konnten die Grenzen für das Gebotene immerhin so weit gesteckt werden, daß die schönen Untersuchungen des Herrn Frobenius, die an das Sylowsche Theorem anknüpfen, Aufnahme gefunden haben.

Gießen. E. Netto.

2. Bücherschau.

Behrendsen, O., und **E. Götting,** Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Mit 280 Figuren. [VII, 254 S.] Leipzig 1909. ℳ 2.80.

Beyer, H., Über ungerade Potenzen. Ein Beitrag zur Potenzenlehre. München 1908. ℳ —.20.

Borel, E., Die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausgabe, besorgt von P. Stäckel. 1. Band. Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XIV, 431 S.] Leipzig 1908. ℳ 8.60.

Ehrig, G., Geometrie für Baugewerkschulen und verwandte technische und gewerbliche Lehranstalten mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Anwendungen. 1. Teil. Geometrie der Ebene. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig 1908. ℳ 2.40.

Feuerbach, K. W., Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung. Mit einer Vorrede von Karl Buzengeiger. 2. nichtgeänderte Ausgabe. [XIII, 73 und VI S. mit Figuren.] Haarlem 1908. ℳ 2.25.

Hensel K., Theorie der algebraischen Zahlen. In 2 Bänden. I. Band. [XI, 349 S.] Leipzig 1908. ℳ 14.—

Jadanza, N., Tachymeter-Tafeln für zentesimale Winkelteilung. Deutsche Ausgabe, nach der zweiten Auflage (Turin 1904) besorgt von E. Hammer. [XX, 64 S. mit Figuren.] Stuttgart 1909. ℳ 3.50.

Keck, W., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. 2. Teil. Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper. 3. Auflage. bearbeitet von L. Hotopp. [XII, 384 S. mit 365 Holzschnitten.] Hannover 1909. ℳ 12.—

Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I. Teil: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1907—8. Ausgearbeitet von E. Hellinger. [VIII, 590 S. autogr. mit Figuren.] Leipzig 1908. ℳ 7.50.

Kübler, J., Beweis des Fermatschen Satzes, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen niemals auflösbar sei. [18 S. mit 3 Figuren und 1 Tafel.] Leipzig 1908. ℳ 1.—

Schafheitlin, P., Die Theorie der Besselschen Funktionen. Mit 1 Figurentafel. [IV, 129 S.] Leipzig 1908. ℳ 2.80.

Schoenflies, A., Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 98 Figuren. [V, 92 S.] Leipzig 1908. ℳ 2.80.

Schram, R., Kalendariographische und chronologische Tafeln. XXXVI, 368 S.] Leipzig 1908. ℳ 18.—

Umfahrer, J., Beweis der Richtigkeit des großen Fermatschen Satzes. [10 S.] München 1908. ℳ —.40.

Voß, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede, erweitert und mit Anmerkungen versehen. [98 S.] Leipzig 1908. ℳ 3.60.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 135. Heft 1.

Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. v. Dávid, Zur Theorie der Schapiraschen Iteration. Haentzschel, Über eine von Hermite herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstraßsche Normalform.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39. Jahrgang. 7. und 8 Heft.

Hagge, Zur Theorie der Lemoineschen Kreise. Gerlach, Das Maßwerk im geometrischen Unterricht. Lorey, Über die Maclaurinsche und Taylorsche Entwicklung einer Funktion. Saalschütz, Bemerkungen über die Ellipsen-Evolute. Weber, Eine Bemerkung zur Kreispotenz. Richter, Dreistellige Logarithmen. Dreßler, Die gegenwärtige Lage des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an den sächsischen Seminaren. Literarische Berichte.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4me Série. Tome VIII. Septembre 1908.

Fontené, Sur l'expression de certains volumes. Lévy, Les constructions géométriques exécutées au moyen de lignes droites et d'un cercle fixe d'après Jacques Steiner. Solutions de questions proposées.

— Octobre 1908.

Buhl, Sur des surfaces dont les lignes asymtotiques se déterminent par quadratures. Deteuf, Sur un point particulier du quadrilatère inscriptible. Juhel-Rénoy, Sur la règle des signes de Descartes. Juhel-Rénoy, Sur l'application des déterminants à la géométrie. Concours. Correspondance. Solutions. Questions.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 2e Année. No. 18. Octobre 1908.

Jacquemin, L'enseignement des sciences en Amérique. Combet, Pour l'emploi des fonctions circulaires naturelles. Vareil, Une leçon sur „la mesure des grandeurs". Lemaire, A propos d'une question de baccalauréat.

Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 10. No. 1.

Bôcher, On the small forced vibrations of systems with one degree of freedom. Whittemore, Two principles of map-making. Hill, Application of Tchébychef's principles in the projection of maps. Lunn, The foundations of trigonometry. Dunkel, Sufficient conditions for imaginary roots of algebraic equations.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XV. Nr. 1.

Snyder, Construction of plane curves of given order and genus, having distinct double points. Ranum, On periodic linear substitutions whose coefficients are integers. Carmichael, Even multiply perfect numbers of five different prime factors. Moore, The fourth international congress of mathematicians: sectional meetings. Notes.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol XV. Nr. 2.

Cole, The fifteenth summer meeting of the American Mathematical Society. Miller, Answer to a question raised by Cayley as regards a property of abstract groups. Westfall, Note on the theorem of generalized Fourier's constants. Schweitzer, On the logical basis of Graßmann's extensive algebra. Hoskins, General algebraic solutions in the logic of classes. Hoskins, A general diagrammatic method of representing propositions and inference in the logic of classes. Bolza, Heinrich Maschke: his life and work. Notes.

Transactions of the American Mathematical Society. Volume 9. Number 3.

Roever, Brilliant points of curves and surfaces. Veblen, Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals. Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces. Underhill, Invariants of the function $F(x, y, x', y')$ in the calculus of variations. Richardson, The integration of a sequence of functions and its application to iterated integrals.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 9. Nr. 4.

Birkhoff, Boundary values and expansion problems of ordinary linear differential equations. Coble, An application of the form-problems associated with certain Cremona groups to the solution of equations of higher degree. Wilson, On the differential equations of the equilibrium of an inextensible string. Mason, The properties of curves in space which minimize a definite integral. Dresden, The second derivatives of the extremal integral. Moore, Sets of metrical hypotheses for geometry.

Annali di Matematica. Serie III. Tomo XV. Fasc. 2.

Tonelli, I polinomi d'approssimazione di Tchebychev. Fubini, Sul principio di minimo di Dirichlet. Tedone, Sui metodi della fisica-matematica. Sannia, Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII. Part. VII. VIII.

M'Aulay, Algebra after Hamilton, or multenions.

---

4. Kataloge.

The Cambridge University Press, London E. C. Bulletin No. XV. October XV. MCMVIII.

Gauthier-Villars, Paris, Quai des Grands-Augustins 55. Ouvrages sur les mathématiques. 1908.

A. Hermann, Paris, Rue de la Sorbonne 6. Publications nouvelles.

B. G. Teubner, Leipzig, Poststraße 3. Auswahl neuerer Werke auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik nebst Grenzwissenschaften. Herbst 1908.

Oswald Weigels Antiquarium, Leipzig, Königstraße 1. Lagerkatalog. Neue Folge. Nr. 132. Exakte Wissenschaften.

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Schulbücher werden nur ausnahmsweise besprochen. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

O. Behrendsen und **E. Götting**, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Mit 280 Figuren im Text. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 2.80.

E. Czuber, Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 12.—

O. Dorner, Über Teiler von Formen. Dissertation. Königsberg i. Pr. 1908.

S. Dumas, Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thèse. Zürich 1908.

P. Fischer, Determinanten. Leipzig 1908, G. J. Göschensche Verlagshandlung. ℳ —.80.

Zoel G. de Galdeano, Boletín de critica, enseñanza y bibliografía matematica. Zaragoza 1908. *Peseta* 1.—

K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen. In 2 Bänden. Erster Band. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 14.—

A. von Ihering, Die Wasserkraftmaschinen und die Ausnutzung der Wasserkräfte. Mit 75 Figuren. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

J. Kübler, Beweis des Fermatschen Satzes, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen niemals auflösbar sei. Mit 1 Tafel und 3 Figuren im Text. Eßlingen 1908, Selbstverlag d. Verfassers. ℳ 1.—

O. Lesser, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Erster Teil: Für die mittleren Klassen sämtlicher höheren Lehranstalten. [Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Im Sinne der Meraner Lehrpläne bearbeitet von K. Schwab und O. Lesser. I. Band. I. Teil.] Wien und Leipzig 1909, F. Temsky. ℳ 2.80.

F. Meisel, Lehrbuch der Perspektive zum Gebrauch an mittleren und höheren technischen Lehranstalten, Kunstgewerbe- und Kunstschulen sowie bei eigenem Studium. Mit 244 Abbildungen im Texte. Leipzig 1908, Seemann & Co. ℳ 9.60.

R. v. Mises, Theorie der Wasserräder. Mit 24 Figuren. Leipzig, 1908, B. G. Teubner. ℳ 3.60.

M. Pasch, Grundlagen der Analysis. Ausgearbeitet unter Mitwirkung von Cl. Thaer. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 4.—

F. Rudio, Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. Zweiter Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 20 Figuren im Texte. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 3.—

E. Schroeder, Abriß der Algebra der Logik. Bearbeitet im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von E. Müller. In 3 Teilen: Erster Teil: Elementarlehre. Mit 4 Figuren. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.60.

M. Schuster, Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie. Stereometrie. Ebene und sphärische Trigonometrie. Nach konstruktiv-analytischer Methode bearbeitet. Ausgabe A: Für Vollanstalten. Dritter Teil: Stereometrie. Zweite, nach den Preußischen Lehrplänen von 1901 umgearbeitete Auflage. Mit zwei Figurentafeln. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

P. Théodoroff, Démonstration de la grande proposition de Fermat, $x^n + y^n = z^n$ est imposible en nombres entiers si $n > 2$. Sofia 1908. *Fr.* —.10.

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Textfiguren. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 16.—

E. B. Wilson, On the theory of double products and strains in hyperspace. New Haven 1908.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. November 1908.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Herr Dr. Eug. Châtelain in Moskau, Comptoir Wogau & Cie.

Frl. Dr. Elisabeth B. Cowley, Instruktor am Vassar-College in Poughkeepsie, New York.

Gestorben:

Am 16. November starb der frühere Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg *G. R. R.* Dr. H. Hertzer.

Ausgetreten:

Godt, W., Dr., Professor, Lübeck.

Rudolf, K., Ingenieur, Bochum.

Trommsdorf, H., Dr., Gymnasiallehrer, Hildesheim.

Adressenänderungen:

Carathéodory, C., Dr. Professor a. d. Universität, Bonn, Kronprinzenstraße 17.

Carda, K. Dr., Professor a. d. Deutschen Technischen Hochschule, Prag, Adalbertgasse 5.

Dannmeyer, F., Dr., Oberlehrer, Hamburg, Eppendorferweg 37.

Horn, J., Dr., Professor an der Techn. Hochschule, Darmstadt, Soderstr. 112.

Jentzsch, cand. math., Gießen, Roonstr. 20.

Jung, H., Dr., Oberlehrer, Hamburg 13, Bundesstr. 18.

Spitz, A., Versicherungsmathematiker, Wien V, Sieveringstr. 5.

Tietze, H., Dr., Privatdozent an der Universität, Wien III, Seidlgasse 30.

Wendt, E., Dr., Oberlehrer an der Seefahrtschule, Bremen, Rembrandstr. 20.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. *Deutscher Unterrichtsausschuß:* Der Verein Deutscher Ingenieure hat seine Vertretung im Deutschen Ausschuß für math. und naturw. Unterricht Herrn Stäckel übertragen. Infolgedessen tritt der von der D. M.-V. in Köln gefaßte Eventualbeschluß in Kraft, wonach Herr Stäckel als unser Vertreter aus dem genannten Ausschuß ausscheidet und an seine Stelle Herr Treutlein tritt.

Internationaler Unterrichtsausschuß. Von der D. M.-V. wurden in Köln die Herren Klein und Treutlein als Bevollmächtigte der Vereinigung in den vom IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom beschlossenen Internationalen Unterrichtsausschuß gewählt mit der Vollmacht, sich ein drittes Mitglied zu kooptieren und als nationalen Beirat die mathematischen Mitglieder

des Deutschen Unterrichtsausschusses zuziehen. Die genannten Herren haben von der ihnen erteilten Vollmacht durch Zuwahl des Herrn Stäckel Gebrauch gemacht und als Mitglieder des nationalen Beirats die Herren Gutzmer, Pietzker, Poske und Schotten benannt.

Bibliographische Kommission. Der Vorstand der D. M.-V. hat infolge eines an ihn gekommenen Antrags beschlossen, die Auflösung der Bibliographischen Kommission einstweilen nicht durchzuführen, die Angelegenheit vielmehr der nächstjährigen Mitgliederversammlung zu nochmaliger Beratung zu unterbreiten und bis dahin die Kommission in ihrer bisherigen Zusammensetzung fortbestehen zu lassen.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch, den 16. Dezember 1908.* Tagesordnung. Steinitz, Über neuere arithmetische Untersuchungen. Salkowski, Über ein Problem des Herrn v. Lilienthal. Zacharias, Über die verschiedenen Arten der Büschel polarer Felder.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur. Mathematische Sektion. *Sitzung Dienstag, den 8. Dezember 1908.* Tagesordnung: 1. Neuwahl der Sekretäre und des Delegierten. — 2. Juretzka, Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *Vierte Sitzung am 17. November 1908:* D. Hilbert legt neue Literatur vor. — O. Toeplitz gibt die vollständige Lösung solcher Systeme abzählbar unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, bei denen in jeder Gleichung nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind (Übertragung der Alternative zwischen der Lösbarkeit der homogenen und der inhomogenen Gleichungen), nebst Anwendung auf das Äquivalenzproblem der entsprechenden unendlichen Matrizen. — *Fünfte Sitzung am 24. November*: Nach dem Literaturberichte von F. Klein bespricht D. Hilbert im Anschluß an die „Fortschr. d. Mathem." von 1906 eine größere Reihe Arbeiten (vorwiegend über Zahlentheorie und Analysis) aus diesem Jahre. — *Sechste Sitzung am 1. Dezember:* F. Klein gibt den Literaturbericht. — Th. v. Kármán berichtet über die von Coulomb, Rankine und Boussinesq aufgestellten Theorien des Erddruckes sowie ihren gegenseitigen Zusammenhang. — *Siebente Sitzung vom 8. Dezember*: F. Klein legt neue Literatur vor. — L. Nelson berichtet über sein neues Buch „Über das sogenannte Erkenntnisproblem" (Göttingen 1908), insofern es Beispiele für die Anwendung einer axiomatischen Methode auf philosophische Probleme gibt. — *Achte Sitzung am 15. Dezember*: F. Klein berichtet über den Plan des mathematischen Teilbandes der „Kultur der Gegenwart". — A. Haar und Th. v. Kármán behandeln weiterhin die Theorien des Erddruckes in Verbindung mit der Charakteristikentheorie und zeigen, daß sich eine eine gewisse Maximaleigenschaft betreffende Hypothese in bestimmten Fällen streng mathematisch herleiten läßt.

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Freitag, den 4. Dezember 1908:* Frank, das Prinzip der Relativität in der Elektrodynamik, insbesondere nach Einstein und Minkowski. — *Freitag, den 11. Dezember 1908:* Frank, Minkowskis Arbeit über die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Medien.

American Mathematical Society. Southwestern Section. Die zweite ordentliche Sitzung fand Sonnabend den 28. November 1908 zu Lawrence, Kansas, statt. Bei dieser Gelegenheit wurden die folgenden Vorträge gehalten:

Van der Vries, The Stinerians of quartic surfaces. — Miller, On the groups generated by two operators satisfying the condition $s_1 s_2 = s_2^{-2} s_1^{-2}$. — Davis, The imaginary elements of the exponential curve. — Gaba, A necessary condition for the cremona transformation of curves. Preliminary communication. — Roever, Optical interpretation of some problems in statics. — Newson, On the theory of collineations. — Brenke, Transformation of series by means of functions admitting a recurrent relation. — Frizell, 1. Some sets whose cardinal is the second transfinite number; 2. A theorem on operation groups. — Wernicke, Note on linkages. — Hedrick, Integrals independent of the path in a complex field.

American Mathematical Society. Die Jahresversammlung der Gesellschaft fand am 30.—31. Dezember 1908 zu Baltimore statt in Verbindung mit der American Association for the advancement of science. Der Vorsitzende, Professor White, hielt eine Eröffnungsrede über „Bézout's theory of resultants and its influence on geometry".

The American Federation of Teachers of the mathematical and the natural sciences. Die Federation, über deren Zweck und Gründung bereits in diesem Jahresbericht S. 7 kurz berichtet worden ist, hat soeben ein „Bulletin" (November 1908) herausgegeben, in dem ausführlich auf den Zweck dieser umfassenden Vereinigung amerikanischer Vereine von Lehrern der Mathematik und der Naturwissenschaften eingegangen wird. Es findet sich darin ferner ein Kassenbericht sowie eine Mitteilung über die nächste Versammlung, die am 28.—29. Dezember 1908 zu Baltimore tagen wird, in Verbindung mit der Unterrichtsabteilung der American Association for the advancement of science. Die Zahl der Mitglieder der Federation beläuft sich bereits auf über 1600 und nimmt noch fortgesetzt zu. Der geschäftsführende Ausschuß besteht aus folgenden fünf Herren: H. W. Tyler (Vorsitzender) vom Massachusetts Institute of Technology zu Boston, Mass., R. E. Dodge vom Teachers' College in New York City, F. N. Peters von der Central High School in Kansas City, Mo., J. T. Rorer von der Central High School in Philadelphia und C. R. Mann (Schriftführer und Schatzmeister) von der University of Chicago. — Es sei erwähnt, daß die Federation begonnen hat, eine Bibliographie der Literatur über den Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften zusammenzustellen. Es ist zu dem Zweck eine besondere bibliographische Kommission eingesetzt worden, die ihre Arbeiten über die letzten zehn Jahre erstreckt und die Schriften in sechs Rubriken ordnet, die je von einem Spezialisten bearbeitet werden. Es sind dies folgende Rubriken, wobei die Bearbeiter in Klammern angegeben sind: 1. Mathematik (Prof. J. W. A. Young, University of Chicago); 2. Biologie (Prof. O. W. Caldwell, University of Chicago); 3. Physik (Prof. John F. Woodhull, Teachers' College, Columbia University); 4. Naturkunde = Nature Study (Prof. M. A. Bigelow, Teachers' College); 5. Chemie (Spezial-Komitee der New England Association of Chemistry Teachers); 6. Geographie und Geologie (R. H. Whitbeck, State Model School, Trenton, N. J.). Man hofft, das Material bis zum 1. Januar 1909 beisammen zu haben, so daß der Druck zu Anfang des Jahres 1909 vonstatten gehen kann. Es ist dies ein neuer erfreulicher Beweis für das tiefe Interesse und die große Tatkraft, womit die amerikanischen Lehrerkreise in den letzten Jahren die Unterrichtsfragen erörtert und gefördert haben.

Australian Association for the advancement of science. Die Jahresversammlung der australischen Naturforscherversammlung wird vom 11.—17. Januar 1909 zu Brisbane, Queensland, abgehalten werden.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

(Vakat.)

3. Hochschulnachrichten.

(Vakat.)

4. Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. U. Cisotti habilitierte sich als Privatdozent der rationellen Mechanik an der Universität Padua.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. P. Boutroux wurde zum ao. Professor der rationellen Mechanik an der Universität Poitiers ernannt.

Dr. A. Denizot, Dozent an der Technischen Hochschule zu Lemberg, wurde zum ao. Professor der allgemeinen Mechanik daselbst ernannt.

Dr. Esclangon an der Universität zu Bordeaux wurde zum ao. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Sir David Gill wurde zum Ehrenmitglied der Royal Society of South Africa ernannt.

Professor Dr. E. Goldstein in Berlin wurde von der Royal Society die Hughes-Medaille für seine Entdeckungen über die Natur der elektrischen Entladung in verdünnten Gasen zuerkannt.

Dr. L. A. Howland wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Wesleyan Universität ernannt.

Professor A. M. Kenyon an der Purdue Universität wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Dr. B. Kollros, Professor am Gymnasium zu La Chaux-de-Fonds, wurde zum Professor für darstellende Geometrie am Polytechnikum in Zürich ernannt.

Professor Dr. H. A. Lorentz in Leiden wurde von der Royal Society in London für seine Untersuchungen in der Optik und Elektrizitätslehre die Rumford-Medaille zuerkannt.

Professor Dr. Lippmann in Paris erhielt den Nobelpreis für Physik.

Dr. F. Rusl, Privatdozent an der tschechischen Universität in Prag, wurde zum ao. Professor der Mathematik an der tschechischen Technischen Hochschule in Prag ernannt.

Professor C. A. Waldo von der Purdue Universität wurde zum Professor der Mathematik an der Washington Universität in St. Louis ernannt.

Dr. Wilkens wurde zum Observator an der Universitätssternwarte in Kiel ernannt.

Gestorben.

Professor Dr. Hermann Minkowski, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, ist am 12. Januar 1909 im Alter von 44 Jahren an Blinddarmentzündung gestorben.

Verlagsbuchhändler Martin Schilling in Halle a. S., Inhaber des bekannten Verlags mathematischer Modelle, ist am 24. Dezember 1908 im Alter von 42 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Über die Errichtung eines Gaußturmes bei Göttingen. Wie auf der Wiener Versammlung der Astronomischen Gesellschaft mitgeteilt wurde, besteht die Absicht, auf dem Hohenhagen, dem höchsten Berg der Umgebung Göttingens, einen Turm zu errichten, der den Namen „Gaußturm" führen soll. Der Hohenhagen ist der direkt an die Göttinger Sternwarte angeschlossene Eckpunkt des großen Dreiecks der hannoverschen Landesvermessung von Gauß. Von hier aus hat Gauß 1821 die Signale seines Heliotrops nach den beiden andern Eckpunkten jenes Dreiecks, dem Brocken und dem Inselsberg, gesandt. Es ist dies zugleich das Dreieck, auf das Gauß im Gespräch mit Sartorius von Waltershausen als empirisches Kriterium der Gültigkeit der Euklidischen Geometrie hinwies.

Als Baufonds sind bereits 10000 ℳ gesammelt. Weitere Beiträge, die an die Kgl. Sternwarte Göttingen zu richten sind, sind erwünscht, um den Turm zu einem würdigen Denkmal zu gestalten. Hier soll einmal die Erinnerung an einen großen Astronomen und Mathematiker die Gegend beherrschen, sich im Volk festsetzen und so im weitesten Kreis für exakte Naturforschung wirken.

Gieseke, Wirklicher Geheimer Rat. F. Klein. K. Schwarzschild.
Ehrenvorsitzender des Turmbaukomitees.

In Ergänzung der vorstehenden, den Astronomischen Nachrichten Nr. 4284 entnommenen Mitteilung und Aufforderung zur Sammlung weiterer Beiträge sei erwähnt, daß der Grundstein am 30. April 1909, dem Geburtstage von Gauß, gelegt werden soll (vgl. Jahresbericht **17**, Heft 7/8, S. *121*), und daß der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beschlossen hat, der Salzburger Jahresversammlung die Bewilligung eines größeren Beitrages vorzuschlagen.

Ein neues Bildnis von Dirichlet. Von einer bisher unveröffentlichten Photographie Dirichlets aus des Meisters letzten Lebensjahren, die alle andern durch Schönheit uud Lebenstreue übertrifft, soll eine Vervielfältigung in Originalgröße, etwa 14/18 cm, in Heliogravüre hergestellt werden, falls sich eine genügende Anzahl von Subskribenten meldet. Die Originalphotographie befindet sich im Besitze von Fräulein Lotte Nelson in Darmstadt, Moosbergstr. 43; Interessenten wollen die gewünschte Anzahl von Exemplaren (zum Preise von 2 Mark) bei dieser Dame bestellen.

Aktuelle Unterrichtsfragen. Ein zur Beratung der Fragen des technischen Mittelschulwesens vom Verein Deutscher Ingenieure eingesetzter Ausschuß hat, wie die Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure vom 5. Dezember 1908 berichtet, in seiner Sitzung im Mai d. J. beschlossen, einen deutschen Ausschuß für technisches Schulwesen ins Leben zu rufen. Im Einvernehmen mit dem Vorsitzenden des Ausschusses ist an eine Anzahl von Vereinen und Verbänden seitens der Geschäftsstelle des Vereins Deutscher Ingenieure die Aufforderung ergangen, an einer Sitzung des zu gründenden Ausschusses im Herbst d. J. teilzunehmen.

Internationale Mathematische Unterrichtskommission.

Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission.[1])

Ausgearbeitet von H. Fehr in Genf.

Inhalt.

A. Einleitung.

Die Abteilung „Philosophie, Geschichte und Unterricht" des Internationalen Mathematikerkongresses, der vom 5. — 11. April 1908 in Rom tagte, hat eine Reihe von Berichten über den mathematischen Unterricht in den wichtigsten Ländern entgegengenommen. Auf Vorschlag des Herrn Prof. David-Eugene Smith, Verfassers des Berichtes für die Vereinigten Staaten, beschloß die Abteilung, dem Kongreß eine Resolution zu unterbreiten des Inhalts, eine internationale Kommission ins Leben zu rufen, welche mit der Erstattung eines Gesamtberichtes über die Fortschritte des mathematischen Unterrichts in den verschiedenen Ländern betraut werden sollte. Der Vorschlag, wie ihn ähnlich Herr Smith bereits 1905 gelegentlich einer Rundfrage des „Enseignement Mathématique" über Reformvorschläge gemacht hatte, fand lebhafte Zustimmung, und so nahm der Kongreß in seiner Sitzung vom 11. April folgende Resolution an:

Überzeugt von der Wichtigkeit einer vergleichenden Untersuchung der Methoden und Lehrpläne des mathematischen Unterrichts in den höheren Schulen der verschiedenen Länder beauftragt der Kongreß die Herren Klein, Greenhill und Fehr mit der Bildung einer Internationalen Kommission, die diese Fragen studieren und dem nächsten Kongreß einen Gesamtbericht vorlegen soll.

Bekanntlich findet der nächste Kongreß im August 1912 in Cambridge (England) statt.

---

1) Übersetzt nach dem in französischer Sprache im „Enseignement Mathématique" t. X, Mai 1908, erschienenen Original von W. Lietzmann-Barmen.

Das Komitee setzt sich wie folgt zusammen:

Vorsitzender: Geh. Rat. Prof. F. Klein-Göttingen.

Stellvertretender Vorsitzender. Prof. Sir George Greenhill, F. R. S.-London

General-Sekretär: Prof. H. Fehr-Genf.

Das Komitee hat alsbald seine Arbeiten begonnen und in einer Besprechung zu Köln, im September 1908, diesen Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission angenommen.

B. Organisation der Kommission.

1. Die Ausschüsse.

a) Die Kommission wird gebildet von den Delegierten derjenigen Länder, die wenigstens zu zwei internationalen Mathematikerkongressen durchschnittlich mindestens zwei Teilnehmer entsandt haben. Jedes Land dieser Art hat Anspruch auf einen Delegierten. Die Länder mit durchschnittlich wenigstens 10 Vertretern können zwei oder drei Delegierte für die Kommission stellen. Indessen hat bei Abstimmungen in der Kommission jedes Land nur eine Stimme.

Stimmberechtigte Länder (pays participants), die zur Teilnahme an den Arbeiten der Kommission aufgefordert werden, sind folgende:

Belgien (1)	Österreich (2 oder 3)
Dänemark (1)	Portugal (1)
Deutschland (2 oder 3)	Rumänien (1)
England (2 oder 3)	Rußland (2 oder 3)
Frankreich (2 oder 3)	Schweden (1)
Griechenland (1)	Schweiz (2 oder 3)
Holland (1)	Spanien (1)
Italien (2 oder 3)	Ungarn (2 oder 3)
Norwegen (1)	Vereinigte Staaten v. Amerika (2 o. 3).

b) Die Länder, welche die obige Bedingung nicht erfüllen, aber gemäß ihren Einrichtungen berufen sind, am Fortschritt der exakten Wissenschaften Anteil zu nehmen, werden eingeladen, sich durch einen Delegierten vertreten zu lassen, der sich an den Arbeiten der Kommission beteiligt, ohne jedoch stimmberechtigt zu sein.

Eine erste, wenn nötig weiter zu vervollständigende Liste solcher *nicht stimmberechtigten Länder* (pays associés) umfaßt die Namen:

Argentinien	China	Kapland
Australien	Egypten	Mexiko
Brasilien	Englisch Indien	Peru
Bulgarien	Japan	Serbien
Chile	Kanada	Türkei.

c) *Nationale Unterausschüsse.* Die Ausschüsse in den einzelnen Ländern werden gebeten, sich nationale Unterausschüsse anzugliedern, welche sich aus Vertretern der verschiedenen Arten des mathematischen Unterrichts: der allgemeinbildenden Unterrichtsanstalten, der technischen Schulen, der gewerblichen Fortbildungsschulen usw. zusammensetzen. Diese Unterausschüsse haben die Aufgabe, die Delegierten bei der Ausarbeitung der Berichte (vgl. Abschnitt G) zu unterstützen.

2. Der Hauptausschuß.

Die Kommission wird geleitet von dem Komitee der drei vom Mathematikerkongreß beauftragten Mitglieder. Dieser *Hauptausschuß* (Comité central) hat ausgedehnteste Vollmacht. Mit Zustimmung der Kommission behält er sich ausdrücklich alle Rechte hinsichtlich der Organisation und der Veröffentlichung der allgemeinen Berichte vor.

Was die Einsetzung der Kommission anlangt, so ist der Hauptausschuß bestrebt, sich in allen Ländern die tatkräftige Unterstützung solcher Herren zu sichern, die sich ganz besonders für die Fortschritte des mathematischen Unterrichts interessieren. Er wird diese Herren bitten, zu gegebener Zeit mit ihrer Regierung in Verbindung zu treten, damit diese bereits über Ziel und Organisation der Kommission unterrichtet ist, wenn sie offiziell eingeladen wird, die Vorschläge des Hauptausschusses für die Wahl des Ausschusses und ebenso die Vorschläge der Delegierten für die Wahl der nationalen Unterkommission ihrerseits zu genehmigen. In Anbetracht der sehr umfassenden Aufgaben, welche der Ausschüsse harren, ist es in der Tat äußerst wünschenswert, daß ihre Arbeiten in kürzester Zeit beginnen können.

3. Finanzielle Regelung.

Der 4. Internationale Mathematiker-Kongreß hat Geldmitttel nicht zur Verfügung gestellt. Es werden deshalb die Regierungen der *stimmberechtigten Länder* angegangen werden, ihren Delegierten eine Summe zur Verfügung zu stellen, welche zur Deckung der Ausgaben der Delegierten und der nationalen Unterausschüsse wie auch zu einem Beitrage für die allgemeinen Ausgaben der Kommission ausreicht.

Für die allgemeinen Ausgaben der Kommission (d. h. die Ausgaben des General-Sekretariats und des Hauptausschusses) soll ein Fonds gebildet werden, zu dem die stimmberechtigten Länder jährlich 80 ℳ beisteuern. Diese Summe ist Anfang Januar der Jahre 1909, 1910, 1911 und 1912 oder auch in einer Rate 1909 einzusenden. Das General-Sekretariat wird einen Kassenbericht der gelegentlich des 5. Internationalen Kongresses 1912 in Cambridge stattfindenden Versammlung vorlegen.

Die Delegierten der nicht stimmberechtigten Länder werden gebeten, sich direkt mit ihrer Regierung über die Unkosten auseinanderzusetzen. Der Hauptausschuß behält sich vor, nachträglich für die nicht stimmberechtigten Länder einen geringen Beitrag zu den allgemeinen Kosten der Kommission festzusetzen.

C. Offizielles Organ der Kommission. Veröffentlichung der Berichte der Unterausschüsse.

Als Organ der Kommission dient die internationale Zeitschrift „L'Enseignement Mathématique", herausgegeben von den Herren Laisant und Fehr. Sie wird den Vorbericht veröffentlichen und die Zusammensetzung der Ausschüsse bekannt geben. Später wird sie regelmäßig über die Arbeiten der Kommission und der Unterausschüsse berichten.

Selbstverständlich können diese Berichte von anderen Zeitschriften abgedruckt oder anderweit veröffentlicht werden. Die Unterausschüsse veröffentlichen ihre Berichte nach eigenem Befinden. Der Hauptausschuß spricht jedoch den Wunsch aus, die Berichte möchten im Format des „Enseignement

Mathématique" gedruckt und in 75 Exemplaren an das General-Sekretariat eingesandt werden; dieses wird sie dann den Mitgliedern der Kommission zugehen lassen.

D. Verhandlungssprachen.

Die Briefe und die Berichte müssen in einer der vier bei den Internationalen Mathematikerkongressen zugelassenen Sprachen verfaßt sein. Diese Sprachen sind: deutsch, englisch, französisch, italienisch.

E. Allgemeine Aufgabe der Kommission.

In Übereinstimmung mit den verschiedenen in Rom geäußerten Wünschen bezeichnet der Hauptausschuß als allgemeine Aufgabe der Kommission:

Über die gegenwärtigen Bestrebungen im mathematischen Unterricht der verschiedenen Länder eine Enquete zu veranstalten und einen Gesamtbericht zu veröffentlichen.

Man wird also nicht nur auf die Unterrichtsmethoden und die Lehrpläne, sondern auch auf die Organisation des Unterrichts eingehen müssen, ohne diese jedoch vollständig in ihrer geschichtlichen Entwicklung darzustellen. Es wird nicht Aufgabe der Kommission sein, Statistiken auszuarbeiten.

Jedenfalls wird die Arbeit der Kommission mehr darauf gerichtet sein, die Grundsätze, von denen der Lehrer sich leiten lassen muß, zum Ausdruck zu bringen, als Übereinstimmung in Einzelheiten zu suchen oder Lehrpläne vorzuschlagen, die sich gleichzeitig den Einrichtungen aller Staaten anpassen sollen.

F. Organisation der Arbeiten.

Damit die Arbeit, deren Grundzüge wir sogleich besprechen werden, dem Unterricht auch wirklich förderlich sei, ist tatkräftige Mitarbeit aller Delegierten und ihrer nationalen Unterausschüsse unbedingt erforderlich.

Die Ausschüsse der *stimmberechtigten Länder* werden zunächst aufgefordert, ihre Meinung über den allgemeinen Arbeitsplan auszusprechen; dann werden sie mit Hilfe ihrer Unterkommissionen einen Bericht verfassen, entsprechend dem Arbeitsplan, wie ihn der Hauptausschuß endgültig festgesetzt hat. Für die nicht stimmberechtigten Länder ist dieser Bericht freiwillig.

Es ist wünschenswert, daß die Hauptpunkte der Berichte in jedem Lande zunächst in Lehrerversammlungen und in wissenschaftlichen, technischen und anderen Gesellschaften, die an dem Fortschritt des mathematischen Unterrichts ein Interesse haben, zur Besprechung kommen. Außerdem wird empfohlen, den Text mit möglichst genauen und vollständigen bibliographischen Nachweisen zu versehen.

Die gedruckten Berichte sind dem General-Sekretariat zu Beginn des Jahres 1911 einzureichen. Die Kommission wird dann in den Osterferien 1911 eine Sitzung halten, um über die Fragen des allgemeinen Programmes einen Überblick zu bekommen und die Grundlagen für den allgemeinen Bericht festzulegen. Was dessen Abfassung anlangt, so wird sich der Hauptausschuß darüber schlüssig werden, welche Schritte zu tun sind, um ihn dem Kongreß in Cambridge 1912 vorlegen zu können, und seine Maßnahmen der Kommission unterbreiten.

G. Arbeitsaufgabe der Kommission.

I. Allgemeine Betrachtungen.

Im Text der Resolution des römischen Kongresses ist nur vom mathematischen Unterricht an den höheren Schulen die Rede. Da jedoch Schulziel und Schulzeit in den einzelnen Ländern sehr verschieden sind, so wird die Kommission ihre Arbeit auf das Gesamtgebiet des mathematischen Unterrichts, vom Anfangsunterricht bis zum Hochschulunterricht ausdehnen. Sie wird sich nicht auf Anstalten beschränken, die auf die Universität vorbereiten, sondern auch den mathematischen Unterricht in den technischen und gewerblichen Fortbildungsschulen heranziehen. — In Anbetracht der stetig wachsenden Bedeutung dieser Schulen und der neuen Forderungen, die immer und immer wieder an den mathematischen Unterricht gestellt werden, wird man bei dieser Enquete die angewandte Mathematik in ausgedehntem Maße berücksichtigen.

Es handelt sich also um eine Gesamtdarstellung des mathematischen Unterrichts in den verschiedenen Schularten und auf ihren verschiedenen Stufen, die vor allen Dingen in objektiver Weise die gegenwärtigen Bestrebungen in diesem Unterricht charakterisieren soll.

Die Arbeit der Kommission wird sich auf die Berichte gründen, welche die Delegierten der stimmberechtigten Länder mit Hilfe ihrer nationalen Unterausschüsse nach dem vom Hauptausschuß angegebenen Plan liefern werden. In einem ersten Teile sollen diese Berichte über die gegenwärtige Organisation der Studien, der sich anschließenden Prüfungen, der Unterrichtsmethode, der Vorbereitung der Lehramtskandidaten orientieren. Erst auf dieser Grundlage wird eine klare Darstellung der gegenwärtigen Bestrebungen im Unterricht möglich sein, die in der Art und Weise der im Laufe der letzten Jahre durchgeführten Reformen zum Ausdruck gekommen sind. Das wird Aufgabe eines zweiten Teiles sein, der dieselben Unterabteilungen hat wie der erste.

II. Allgemeiner Arbeitsplan.

1. Teil. Gegenwärtiger Zustand der Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts.

1. Kapitel. Die verschiedenen Schularten. In diesem ersten Kapitel wird eine kurze Darstellung der verschiedenen öffentlichen Unterrichtsanstalten, in denen mathematischer Unterricht erteilt wird, und des Zieles, das sie verfolgen, zu geben sein. Dabei sind auch die Mädchenschulen zu berücksichtigen.

Die Anstalten sind in folgender Weise anzuordnen:

a) Primärschulen, elementare (Volksschulen) und höhere (Bürgerschulen);
b) Höhere Schulen (Gymnasien, Realschulen, Lyzeen usw.);
c) Berufsschulen (Technika usw.);
d) Seminare („Écoles normales“; „teachers' colleges“);
e) Hochschulen: Universitäten, technische Hochschulen.

Es wird sich empfehlen, dieser Darlegung eine Übersicht beizugeben, die über Aufeinanderfolge, gegenseitiges Entsprechen der verschiedenen Anstalten und auch über das Durchschnittsalter der Schüler ein Gesamtbild gibt.

2. Kapitel. Ziel und Stoff des mathematischen Unterrichts. Diese Frage wird für die verschiedenen obenerwähnten Schultypen zu untersuchen sein; dabei wird man gegebenenfalls die angewandte Mathematik, besonders die Mechanik, berücksichtigen.

Das Ziel des mathematischen Unterrichts wechselt nicht nur von einer Anstalt zur andern, sondern hat auch im Laufe des letzten Jahrhunderts erhebliche Wandlungen erfahren. Es kann rein formal oder formal mit Betonung des räumlichen Anschauungsvermögens sein; es kann entweder gleichzeitig auf Entwicklung logischer Fähigkeiten wie auf praktische Anwendbarkeit gerichtet oder aber lediglich utilitaristisch sein. Andererseits kann man als Ziel entweder in erster Linie die Schulung des Gedächtnisses oder aber die Entfaltung der mathematischen Fähigkeiten ansehen.

Welche Gebiete der Mathematik werden in den verschiedenen Schulen gelehrt? Wieviel Zeit ist den einzelnen Disziplinen gewidmet, und in welcher Ausdehnung werden sie behandelt? In welchem Maße berücksichtigt man die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zweigen und gegebenenfalls mit der angewandten Mathematik (eingeschlossen die Mechanik) und der Physik?

3. Kapitel. Die Prüfungen. Unbestreitbar hat das Prüfungssystem einen großen Einfluß auf die Unterrichtsmethode. Man wird also in großen Zügen das Charakteristische der Prüfungen in den einzelnen Schulgattungen angeben, ganz besonders bei der Reifeprüfung, beim „baccalauréat" etc., bei der Lehramtsprüfung.

4. Kapitel. Die Unterrichtsmethoden. Welches sind die Methoden in den verschiedenen Anstalten, vom Anfangsunterricht angefangen bis hin zu den Hochschulstudien? Unterrichtsmittel; mathematische Modelle. — Verwendung von Lehrbüchern, Aufgabensammlungen, Handbüchern. — Theoretische Übungen, Probleme aus den angewandten Wissenschaften. — Praktische Arbeiten.

5. Kapitel. Vorbereitung der Lehramtskandidaten. Auch hier sind die verschiedenen Schularten durchzugehen, und es ist anzugeben, welche Forderungen die Schulbehörden stellen hinsichtlich 1. der theoretischen, 2. der praktischen Vorbereitung.

2. Teil. Moderne Bestrebungen im mathematischen Unterricht.

1. Kapitel. Moderne Ideen in der Organisation. Freiere Gestaltung des Unterrichts. — Neue Schularten. — Die Frage der Koedukation.

2. Kapitel. Moderne Bestrebungen hinsichtlich des Unterrichtszieles und des Lehrstoffes. Unterrichtsziel. — Neue Gebiete oder neue Kapitel, welche unzweckmäßige oder weniger interessante, aber aus Überlieferung und Gewohnheit beibehaltene Gegenstände ersetzen sollen.

In Anbetracht der raschen Fortschritte der Mathematik und ihrer Anwendungen empfiehlt der Ausschuß, von neuem sorgfältig zu untersuchen, welche Zweige der Mathematik am meisten zur allgemeinen Bildung beitragen. Unter den Gegenständen, die gegenwärtig einen Platz in den Lehrplänen verlangen, seien erwähnt die Differential- und Integralrechnung, die analytische Geometrie, gewisse Begriffe aus der darstellenden und projektiven Geometrie, ein Studium der Physik vom mathematischen

Standpunkt aus usw. Ferner wird auch die Einführung neuer Gegenstände speziellerer Art oder neuer Fundamentalbegriffe (wie Funktions-, Gruppen-, Mengenbegriff) vorgeschlagen. Es wäre angebracht, wenn die Enquete untersuchte, in welchem Maße man diesen Forderungen Rechnung tragen kann, und angäbe, welches das für die späteren Studien notwendige Mindestmaß der Elemente der Euklidischen Geometrie, der darstellenden und projektiven Geometrie, der Algebra, der Differential- und Integralrechnung, der Trigonometrie, der analytischen Geometrie usw. ist.

Dieselbe Frage läßt sich für die Fachschulen stellen. Welche Gebiete sind die zweckmäßigsten für die verschiedenen Berufe?

3. Kapitel. Die Prüfungen. Vorschläge zur Änderung des Systems der Prüfungen oder ihrer gänzlichen Abschaffung.

4. Kapitel. Die Unterrichtsmethoden. Moderne Ideen über Methodik auf verschiedenen Stufen und in den verschiedenen Schulgattungen. — Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Gebieten der Mathematik. — Die Beziehungen zwischen der Mathematik und den andern Fächern. — Praktische Übungen; Modelle und Instrumente. — Gebrauch des Lehrbuches.

Einige Bemerkungen zu diesem Kapitel: Bemerkung 1. Seit der Zeit Pestalozzis hat die Psychologie eine wichtige Rolle im Volksschulunterricht gespielt, und seit einer Generation etwa erweist sie sich als gleicherweise nützlich — wenigstens in einem gewissen Maße — bei der Aufstellung der Lehrpläne von höheren Schulen. Es wird angebracht sein, die Ergebnisse der Psychologie und ihre Verwendbarkeit im mathematischen Unterricht zu prüfen.

Ganz besonders wird auf die Rolle des Anfangsunterrichtes zu achten sein, auf die Notwendigkeit, dem theoretischen einen rein anschaulichen Unterricht vorauszuschicken. Von welchem Zeitpunkt ab muß andererseits das rein logische Verfahren vorwiegen, beispielsweise in der elementaren Geometrie oder in der Differential- und Integralrechnung?

Bemerkung 2. Praktische Anwendungen. An vielen Schulen haben lange Erörterungen darüber stattgefunden, welchen Anteil man praktischen und experimentellen Methoden einzuräumen hat.

a) Im Elementarunterricht läßt sich beispielsweise anführen das Papierfalten, das Arbeiten im Freien, der Gebrauch einfacher Meßapparate, die Beobachtungs-Geometrie usw. Praktisches, approximatives Rechnen (Grad der Annäherung, Logarithmen mit verschiedener Zahl von Dezimalen, Gebrauch des Rechenschiebers usw.) Die Frage graphischer Methoden in der Algebra; ausgedehnterer Gebrauch von Millimeterpapier.

b) In den letzten Jahren ist die Frage mathematischer Laboratorien aufgeworfen worden. Was ist in dieser Hinsicht geschehen, und welche Ergebnisse hat man erzielt? — Herstellung von Modellen durch die Schüler. — Modellsammlungen.

c) Wie könnte man es erreichen, der Mathematik einen größeren Platz in der Volkshochschulbewegung zu sichern? — Angewandte Mathematik in Museen. — „Mathematische Mußestunden."

Alle diese Mittel sind geeignet, die gegenüber der Mathematik bestehenden Vorurteile zu bekämpfen.

Bemerkung 3. Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen mathematischen Gebieten. Empfehlenswert wäre eine Untersuchung, wie man die üblichen Grenzen zwischen gewissen Gebieten der reinen Mathematik beseitigen kann, z. B. zwischen Algebra und Geometrie, Algebra und Differential- und Integralrechnung, synthetischer und analytischer Geometrie, Geometrie und Trigonometrie. Nicht allein die Möglichkeit solcher Reformen wäre zu erörtern, sondern auch, was ebenso wichtig ist, die ihnen entgegenstehenden Bedenken.

Außerdem sind Berichte über die Ergebnisse folgender, in den letzten Jahren von neuem vorgeschlagener oder erprobter Verschiebungen erwünscht:

a) Die Stellung der Geometrie zur Algebra. — b) Die Fusion von ebener und räumlicher Geometrie. — c) Eine innigere Verbindung der Differential- mit der Integralrechnuug oder die Einführung dieser vor jener.

Bemerkung 4. Beziehungen der Mathematik zu anderen Fächern. In gleicher Weise scheint eine Untersuchung der Berührungspunkte zwischen der Mathematik und den anderen Fächern geboten, so die Beziehungen: a) zum Zeichnen (geometrisches, technisches, Freihand-Zeichnen); b) zu den angewandten Disziplinen; c) zu den andern exakten Fächern (Physik, Chemie, Biologie, Geographie usw.); d) zu der Philosophie; e) zu den Problemen des täglichen Lebens.

Diese Berührungspunkte sind von Wichtigkeit für die praktische Erziehung. Es genügt nicht, einfach die Möglichkeiten und hauptsächlichsten Wünsche zu untersuchen, man muß sich auch darüber klar werden, was gegenwärtig mit Erfolg erprobt ist, und welche Bedenken obwalten. Wo beispielsweise eine direkte Verbindung zwischen Mathematik und Physik angestrebt wird, muß genau dargelegt werden, welche Begriffe aus der Geometrie direkte Anwendung in der Physik finden, welche Aufgaben der elementaren Physik auf lineare simultane Gleichungen, auf Gleichungen zweiten Grades mit einer oder mit mehreren Unbekannten, auf transzendente Gleichungen, Reihen usf. führen.

Bemerkung 5. Geschichtliche Betrachtungsweise. Man hat eine ausgedehnte Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik gefordert. In welchem Maße ist eine solche möglich und wünschenswert?

5. Kapitel. Die Ausbildung der Lehramtskandidaten. Welche Bedingungen hat eine rationelle Vorbereitung der Lehramtskandidaten zu erfüllen? Wie sind die theoretischen und praktischen Kurse einzurichten?

Der Fortschritt im Unterricht hängt unmittelbar ab von der Vorbereitung der Lehrer. Das Studium und damit die Anforderungen sind notwendigerweise in den verschiedenen Ländern verschieden; sie sind mit bedingt durch die Anzahl der Kandidaten und durch ihre pädagogischen Fähigkeiten. Der Ausschuß wünscht also eine Orientierung über die gegenwärtigen Reformen oder Reformbestrebungen, die auf eine den modernen Anforderungen entsprechende Vorbereitung der Lehrer abzielen, und zwar nicht nur der Lehrer in den Volks- und höheren Schulen, sondern auch der Dozenten an den Universitäten.

Diese Untersuchung wird sich hauptsächlich erstrecken auf

a) die mathematische Vorbildung, die man von den Kandidaten fordert,
b) die Einführung der Kandidaten in wissenschaftliche Arbeiten;
c) die beste Methode, sie mit der theoretischen und praktischen Pädagogik vertraut zu machen;
d) die Frage nach dem Geschlecht des Lehrers in den verschiedenen Schuljahren;
e) Fragen wie z. B., welche Zeit auf die Geschichte der Mathematik, die Geschichte des mathematischen Unterrichts zu verwenden ist, welche auf die „unterhaltsame" Mathematik, auf die allgemeine mathematisch-pädagogische Literatur.

Allgemeine Bemerkungen.

In jedem Kapitel werden in genauer Fassung erstens die Grundzüge der vorgeschlagenen Reformen, zweitens die Gefahren und die Einwendungen anzugeben sein, welche die Gegner der vorgeschlagenen Veränderungen geltend machen. Einige hier zu erörternde grundlegende Fragen seien angeführt.

1. — Wenn man den Unterricht anziehender macht, so kann darunter sein Ernst leiden, und das wäre ebenso im Interesse der Wissenschaft wie des praktischen Wertes der Mathematik zu bedauern.

2. — Eine schlecht angewandte Psychologie könnte dazu führen, allzusehr die logischen Grundlagen der Mathematik zu übertreiben, und daraus würde sich für den Schüler eine fortwährende Unsicherheit ergeben.

3. — Es erscheint notwendig, die abstrakte Seite nicht zu vernachlässigen, damit sich dem kindlichen Geist die mathematischen Wahrheiten dauernd einprägen.

4. — Man gibt sich zuweilen nicht Rechenschaft von der Tatsache, daß ein Fach wie die Geometrie so, wie man sie heute auffaßt, zu Ergebnissen führt, die von denen verschieden sind, welche die Algebra liefert; eine Verschmelzung beider Fächer hätte notwendig den Verlust wichtiger Vorzüge jedes einzelnen zur Folge. — Entsprechendes gilt für andere Gebiete.

Es gibt noch eine Reihe anderer Gefahren; sie alle sind sorgfältig zu beachten, damit nur Reformen durchgeführt werden, die einen wirklichen Fortschritt darstellen.

Oktober 1908.

Der Hauptausschuß:

F. Klein, Vorsitzender, Göttingen, Wilhelm Weberstr. 3,
Sir George Greenhill, Stellvertretender Vorsitzender, 1, Staple Inn, London, W. C.,
H. Fehr, General-Sekretär, 72, Florissant, Genf.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil I. Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung, gehalten im Winter 1907—1908 von **Felix Klein.** [590 S.] Ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Wieder hat uns Felix Klein eine seiner interessanten Vorlesungen in autographierter Vervielfältigung geschenkt. Diesmal führt er uns in das Gebiet der Elementarmathematik d. h. in das Gebiet des mathematischen Schulunterrichts, wie er sich nach den neueren Bestrebungen auf dem Gebiete der Unterrichts-Reform gestalten sollte. Das Gebiet der Elementarmathematik ist hierbei soweit als möglich abgesteckt, so daß eigentlich kein Teil der höheren Mathematik ganz davon ausgeschlossen ist. Es wendet sich das vorliegende Werk keineswegs an den Anfänger, der diese Dinge erst lernen soll, sondern an den gereiften Leser und künftigen Lehrer, der den sachlichen Inhalt schon beherrscht, dem darin gezeigt werden soll, wie die Gesichtspunkte und Anschauungen der höheren Mathematik auch für den elementaren Unterricht fruchtbar gemacht werden können. Es ist daher auch weniger Gewicht gelegt auf die Ausführung und Darstellung der Beweise im einzelnen als auf den großen Zusammenhang der verschiedenartigen Lehren auf allen Gebieten. Dafür wirkt aber auch das Ganze auf den kundigen Leser mit der vollen Frische der mündlichen freien Rede, bei deren Wiedergabe offenbar auch der Herausgeber E. Hellinger eine glückliche Hand gehabt hat.

In ihrer ganzen Tendenz unterscheiden sich hiernach diese Vorlesungen von der von dem Berichterstatter in Gemeinschaft mit Wellstein und anderen Gelehrten herausgegebenen „Encyklopädie der Elementarmathematik", die sich an denselben Leserkreis wendet, und auf die in Kleins Darstellung mehrfach Bezug genommen wird. Treffend bezeichnet Klein unseren Standpunkt als den konservativen gegenüber dem seinigen mehr fortschrittlichen. Diese Unterscheidung hängt zusammen mit einem tiefer gehenden Unterschied in der Auffassung von Ziel und Zweck des Unterrichtes überhaupt, nicht nur in der Mathematik. Die Schule muß einerseits ihre Zöglinge mit einer gewissen Menge notwendiger Kenntnisse und Fertigkeiten ausrüsten, mit denen sie ins Leben treten und den harten Kampf ums Dasein aufnehmen, der Gesammtheit nützliche Dienste leisten können. Der Umfang dieser Forderung wird mit jedem Tag größer und die Aufgabe der Schule immer schwerer. Demgegenüber läuft dann das andere, mehr ideale Ziel der Schule Gefahr, zu kurz zu kommen, nämlich der Jugend ohne Rücksicht auf künftige Anwendung eine allgemeine Durchbildung des Geistes zu geben, die sie in den Stand setzt, an allen Kulturbestrebungen verständnisvoll Anteil zu nehmen, und die Ausbildung für den Beruf auf eine spätere Lebensperiode verschieben möchte. Für diesen Zweck kommt es weniger auf den Inhalt des Unterrichts an als auf die Gewöhnung des Geistes an wissenschaftliches Denken überhaupt.

Sehr bemerkenswert ist die Art und Weise, wie Klein zwischen den beiden Richtungen der Mathematik, der Approximations- und der Präzisions-Mathematik, unterscheidet.

Die erste, die dem Praktiker in den Anwendungen vollauf genügt, weiß nichts von Irrationalzahlen, von Gleichungs-Wurzeln, von unstetigen Funktionen.

Konsequenter Weise kennt sie in der Geometrie keine geraden Linien, keine Kegelschnitte, sondern nur die in der Analysis situs vorkommenden Unterscheidungen und Gebilde, die sich jenen Idealen mehr oder weniger annähern. „Die Präzisionsmathematik ist nur zum Vergnügen derer da, die sich mit ihr beschäftigen, und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine bequeme Stütze".

Die Zahlentheorie gehört durchaus in das Gebiet der Präzisionsmathmatik, und Klein ist geneigt, die Mathematiker je nach ihrer Stellung zu dieser Disziplin in zwei Klassen, in „Enthusiasten" und „Indifferente" zu teilen. „Für die erste gibt es keine Wissenschaft, die so schön und wichtig wäre, keine, die so klare und präzise Beweise und Theoreme von völlig einwandfreier Strenge enthielte als die Zahlentheorie; wenn die Mathematik die Königin der Wissenschaften ist, so ist die Zahlentheorie die Königin der Mathematik", sagt Gauß. „Den Indifferenten andererseits liegt die Zahlentheorie ganz fern; sie kümmern sich wenig um ihre Entwicklungen und gehen ihr wohl gar aus dem Wege".

In der Tat ist die Freude an der Zahlentheorie wesentlich ästhetischer Natur. Eine gewaltige Musik nennt sie Minkowski in der Vorrede zu seinen „diophantischen Approximationen". Wer dafür keinen Sinn hat, wer nicht ein wenig Enthusiast ist, ist zum Mathematiker verdorben.

Es ist übrigens keineswegs Kleins Meinung, die Präzisionsmathematik und damit die Zahlentheorie wegen ihrer geringen Anwendbarkeit von der Schule zu verbannen. Er räumt ihr im Gegenteil einen ziemlichen Raum ein, will sie aber durch anschauliche Methoden beleben und den Zugang zu ihr erleichtern. Ich erwähne die schöne geometrische Darstellung der Annäherung einer Irrationalzahl durch die Näherungsbrüche eines Kettenbruches. Eingehender hat Klein die Anwendung geometrisch anschaulicher Methoden in der Zahlentheorie in den gleichfalls in autographierter Ausarbeitung erschienenen Vorlesungen von 1895/96 behandelt.

Es ist überhaupt ein charakteristischer Zug in Kleins Ideen über die Reform des Unterrichts, daß durch ausgiebige Benutzung der geometrischen Anschauung, selbst auf Kosten einer exakten logischen Strenge, auch schwierigere Partien der höheren Mathematik dem Verständnis des durchschnittlich begabten Schülers zugänglich gemacht werden sollten. Das ist gewiß ein richtiger Gedanke, der aber freilich einen in dieser Richtung gut durchgebildeten und dafür interessierten Lehrer voraussetzt. Auch ist nicht ganz zu übersehen, daß bei manchem dazu besonders angelegten Schüler logische Skrupel und Bedenken gar früh erwachen und nach Befriedigung rufen. Diesem Bedürfnis gegenüber ist es daher erwünscht, daß auch der Lehrer einmal in seiner Studienzeit die logischen Voraussetzungen der Mathematik gründlich durchdacht habe.

Auch auf eine innige organische Verknüpfung der verschiedenen Zweige der Mathematik legt Klein großes Gewicht. Er unterscheidet in der Entwicklung der Mathematik überhaupt eine Richtung A und eine Richtung B. Die Richtung A ist die bisher im Unterricht der Schule fast allein angewandte, bei der jede einzelne Disziplin, Geometrie, Trigonometrie, Arithmetik, Algebra von der andern unabhängig in möglichst einfacher und abgeschlossener Weise aus ihren eigenen Grundlagen entwickelt wird, die dann in ihrem weiteren Verlauf in der Weierstraßschen Funktionentheorie ihre Krönung findet. Die Richtung B sucht dagegen von vornherein die verschiedenen Teile der Mathematik miteinander organisch zu verbinden und auseinander herzuleiten. Diese Richtung

führt dazu, möglichst früh die Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals aus der Anschauung des Verlaufs und des Flächeninhaltes von Kurven zu definieren und führt in ihrem weiteren Verlauf zu der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie. Daneben ist noch eine dritte Richtung C zu bemerken, die Klein die algorithmische nennt, das ist die, die durch die rein formale Weiterbildung bekannter Regeln zu neuen mathematischen Begriffen gelangt.

Es ist nun sehr interessant, wie Klein in großen Zügen die Wirkung dieser drei Richtungen durch die Jahrhunderte der geschichtlichen Entwicklung verfolgt. Hier gewinnen die sonst oft so trockenen Darlegungen überwundener Standpunkte der Wissenschaft Leben und Gestaltung.

Ich muß es mir versagen, auf weitere Einzelheiten aus dem reichen Inhalt der Vorlesungen einzugehen, die wie gesagt kein Gebiet der Mathematik unberührt lassen, und mit einem Abschnitt über die Transzendenz von e und π und mit einer Darstellung der Mengenlehre abschließen. Jeder künftige oder bereits tätige Lehrer einer Mittelschule wird reichen Gewinn für seine Berufstätigkeit daraus ziehen. Aber auch der mathematische Forscher wird den Band mit Dank und Befriedigung aus der Hand legen.

Straßburg, im Dezember 1908. H. Weber.

M. Planck, das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. 2. Auflage. A. u. d. T.: Wissenschaft und Hypothese. Band VI. [XVI. u. 278 S.] 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Das Buch verdankt seine Entstehung einem Preisausschreiben der von der Philosophischen Fakultät der Universität Göttingen verwalteten Benekeschen Stiftung für das Jahr 1887. In den zwanzig Jahren, welche seitdem verflossen sind, hat sich in der Physik nach den verschiedensten Richtungen hin eine Reihe von Umwälzungen vollzogen, die in dieser Tragweite und in dieser raschen Aufeinanderfolge völlig beispiellos dastehen. Aber jede neue Entdeckung und jede neue Begriffsbildung hat immer wieder nur dazu geführt, das Prinzip der Erhaltung der Energie in seiner zentralen Stellung zu behaupten und zu befestigen. Durch diesen Umstand war die Möglichkeit gegeben, die in der neuen Auflage vorzunehmenden Verbesserungen auf einige geringe Änderungen und Zusätze zu beschränken. Der gesamte Inhalt gliedert sich in drei Abschnitte: die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson u. a.; die allgemeine Definition des Energiebegriffs und die Formulierung des Prinzips nebst einer Übersicht und Kritik der versuchten Beweise: schließlich die Darlegung, wie man durch Anwendung des Prinzips unabhängig von jeglichen Hypothesen über das Wesen der Naturkräfte zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Physik gelangen kann.

Berlin. M. Planck.

Dr. **Karl Boehm,** Professor an der Universität Heidelberg. **Elliptische Funktionen.** I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. [XIII u. 356 S.] Sammlung Schubert, Bd. XXX. Leipzig 1908, G. J. Göschen.

Wer sich vor die Aufgabe gestellt sieht, eine in vielseitigster Weise behandelte und zu hoher Vollkommenheit entwickelte Lehre, wie es die Theorie

der elliptischen Funktionen ist, aufs neue darzustellen, genießt den Vorteil, sich auf sehr zahlreiche Vorarbeiten stützen zu können, hat aber auch eigentümliche Schwierigkeiten zu überwinden, welche gerade aus diesem Reichtum an Material entspringen. Handelt es sich auch nicht darum, neue Pfade zu bahnen, so ist doch die Entscheidung, welche von den gangbaren Wegen die beste Orientierung über das Gebiet ermöglichen, nicht immer leicht. Soll eine einführende Darstellung ihren Zweck nicht verfehlen, so muß sie den Leser in den Stand setzen, sich in den größeren und tiefer eindringenden Werken sowie in den Abhandlungen über den Gegenstand zurecht zu finden und weiterzubilden, wie verschiedenartig auch die Gesichtspunkte sein mögen, unter welchen solche Arbeiten abgefaßt sind. Diese Erwägung hat mich zunächst veranlaßt, die beiden Hauptabschnitte des vorliegenden Lehrbuches zu bilden und streng zu scheiden. Der erste Teil, welcher als erster Band erscheint, entwickelt aus gewissen analytischen Ausdrücken und dem Begriffe der Periodizität eine Theorie der einfach periodischen und doppelt periodischen Funktionen, jene, gewissermaßen als Einleitung, in Kürze zusammenfassend, diese, als Hauptgegenstand, in breiterer Ausführung gebend. Der zweite Teil, welcher im nächsten Bande folgen soll, behandelt das Umkehrproblem der elliptischen Integrale und greift erst gegen Ende der Untersuchung auf die Resultate des vorangehenden Teiles zurück. Dadurch ist erreicht, daß nicht nur der erste Band ein durchaus in sich abgeschlossenes Ganze bildet, sondern auch der zweite eine große Selbstständigkeit besitzt. Je nach seinen Neigungen und Zwecken kann der Leser sehr wohl mit dem Studium des zweiten Teiles beginnen.

Wie hier in der Anlage des Ganzen, so war ich auch im einzelnen bestrebt, Dinge, welche unabhängig voneinander abgehandelt werden können, auch tatsächlich streng auseinanderzuhalten, da nichts den Anfänger mehr verwirrt und einschüchtert, als wenn er sich an einem nicht abreißenden Faden wie durch ein Labyrinth unaufhaltsam weiter gezogen sieht. Um durch ein Beispiel zu bezeichnen, was ich meine, so erwähne ich, daß die arithmetrischen Betrachtungen im vierten und siebenten Kapitel, welche sonst häufig mit dem Begriffe der Periodizität verquickt werden, mit dem sie gar nichts zu tun haben, eine Abhandlung für sich zu bilden, welche man lesen kann, ohne durch Einmischung irgendeines fremdartigen Begriffs unterbrochen zu werden. Auch sonst habe ich keine Mühe gescheut, den Bedürfnissen verschiedenartiger Leser nach Möglichkeit entgegenzukommen. In den ersten Kapiteln ist ein abgekürzter und erleichterter Gang der Lektüre in Fußnoten bezeichnet, welcher den Anfänger rascher zum Hauptgegenstande geleitet. Ich wünsche, daß diese doppelte Durchführung den jüngeren Lesern die Arbeit ebensosehr erleichtern möge, als sie die meine erschwert hat.

Zur Orientierung der Leser dieses Jahresberichts seien hier noch die Überschriften der zwölf Kapitel des ersten Bandes mitgeteilt: I. Einfach und zweifach ausgedehnte abzählbare Mengen; ihre Summen und Produkte. — II. Untersuchung gewisser aus Partialbrüchen gebildeter zweistrahliger Reihen. — III. Untersuchung gewisser zweistrahliger Produkte. — IV. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der einfach periodischen Funktionen. — V. Untersuchung gewisser aus Partialbrüchen gebildeter zweifach ausgedehnter Reihen. — Die Funktionen $p(u)$ und $\zeta(u)$. — VI. Untersuchung gewisser Doppelprodukte. — Die Funktion $\sigma(u)$. — VII. Arithmetische Betrachtungen über Kongruenzen komplexer Zahlen. — VIII. Elliptische Funktionen. — Eigenschaften, aus dem

Begriffe entwickelt. — IX. Verschiedenartige analytische Darstellungen der elliptischen Funktionen. — Eigenschaften, welche sich daraus ergeben. — X. Elliptische Funktionen zweiter und dritter Art. — XI. Die Weierstraßschen Transzendenten. Zusammenstellung von Lehrsätzen und Formeln. — XII. Die Jacobischen Transzendenten. K. Boehm.

Roland Weitzenböck (k. u. k. Leutnant im 2. Pionierbataillon, Linz a. Donau), **Komplexsymbolik**, Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume. (Sammlung Schubert. Leipzig 1908, Göschen).

Der Zweck dieses Buches ist das Ausfüllen einer Lücke in der analytischen Geometrie höherer Räume. Meines Wissens ist dieser Gegenstand besonders in der deutschen mathematischen Literatur in letzterer Zeit sehr vernachlässigt worden. Die Behandlungsart der Rechnung ist ausschließlich symbolisch, und ich trachtete, den invariantentheoretischen Teil besonders hervorzuheben. Es fällt demgemäß jede Metrik im Sinne der Euklidischen Geometrie weg. Mit der Theorie der Komplexe in höheren Räumen hoffe ich etwas Neues den Geometern zu bieten. Mit Rücksicht auf den Umfang des Buches konnte natürlich vieles nur angedeutet werden, und ich hoffe damit genug Anregung zu einem weiteren Ausbau gegeben zu haben. Meiner Ansicht nach ist eine rationelle Geometrie höherer Räume nur mittelst symbolischer Methoden erreichbar; die „Komplex-Symbolik" zeigt die Art dieser Methoden. Schließlich möchte ich noch erwähnen, daß mir leider nicht genügende Behelfe zur Verfügung standen, um einen ausführlichen Literaturnachweis anzufügen. In einem Gebirgsnest an der italienischen Grenze hat man eben keine Universitätsbibliothek. Roland Weitzenböck.

H. Ganter und **F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie**. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. II. Teil. Die analytische Geometrie des Raumes. 4., verbesserte Auflage. Mit 20 Figuren im Texte. [X u. 194 S.] gr. 8. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Die vorliegende Auflage wird, wie ich hoffe, als eine wesentlich vervollkommnete bezeichnet werden: einem oft ausgesprochenen Wunsche nach Vermehrung der Figuren folgend, habe ich 8 sorgfältig ausgeführte Zeichnungen (Fig. 11—18) von Flächen zweiten Grades hinzugefügt, die ich der Künstlerhand des Herrn Prof. Dr. G. Stiner in Winterthur verdanke, und auf die ich wohl besonders aufmerksam machen darf. — Im übrigen habe ich mich wieder bemüht, den Text zu verbessern, wo immer es wünschenswert erschien. Zu größeren Änderungen hatte ich aber keine Veranlassung. Nur die Theorie der Kugelbüschel hat, entsprechend der 6. Auflage des ersten Teiles, eine etwas ausführlichere Darstellung erfahren.

Zürich. F. Rudio.

---

2. Bücherschau.

Burkhardt, H., Funktionentheoretische Vorlesungen. 1. Band. 2. Heft: Algebraische Analysis. 2., durchgesehene und vermehrte Auflage. Mit Figuren. [XII, 199 S.] Leipzig 1908. ℳ 5.60.

Czuber, E., Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. [X, 382 S.] Leipzig 1909. ℳ 12.—

Haußner, R., Darstellende Geometrie. 2. Teil. Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Mit 80 Figuren im Texte. [164 S.] Leipzig 1908. ℳ —.80.

Hess, W., Beweis des großen Fermatschen Satzes für ungerades $n > 1$. [4 S.] Dresden 1908. ℳ —.50.

—, Weiteres über den großen Fermatschen Satz. Dresden 1908. ℳ —.50.

Hoffmann, F., Der Satz von Fermat. Sein seit dem Jahre 1658 gesuchter Beweis. [24 S.] Straßburg 1908. ℳ —.50.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Fortgesetzt von C. Reinhertz. 2. Band. Feld- und Landmessung. 7., erweiterte Auflage. Bearbeitet von O. Eggert. Mit Abbildungen. [XVI, 911 u. 47 S.] Stuttgart 1908. ℳ 20.—

—, Hilfstafeln für Tachymetrie. 4. Auflage. Mit 5 Figuren. [XV, 246 S.] Stuttgart 1908. ℳ 8.—

Kowalewski, G., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Mit 31 Figuren. [VI, 452 S.] Leipzig 1909. ℳ 12.—

Mensing, F., Rechenbuch für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten, insbesondere für Fortbildungs-, Gewerbe- und Handwerkerschulen mit fachgewerblichen Abteilungen. III. Teil. Technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen (Kalkulationen). Antwortenheft. 40 autographierte Seiten. Leipzig 1909. ℳ 1.50.

Metz, J. v., Beweis des Fermatschen Satzes. [6 S.] Göttingen 1908. ℳ —.20.

Mises, R. v., Theorie der Wasserräder. Mit 24 Figuren. [120 S.] Leipzig 1908. ℳ 3.60.

Müller, F., Führer durch die mathematische Literatur, mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. [X, 252 S.] Leipzig 1909. ℳ 7.—

Pasch, M., Grundlagen der Analysis. Ausgearbeitet unter Mitwirkung von C. Thaer. [V, 140 S.] Leipzig 1909. ℳ 3.60.

Poincaré, H., Die Maxwellsche Theorie und die Hertzschen Schwingungen. Die Telegraphie ohne Draht. Aus dem Französischen von Max Iklé. Mit Figuren. [199 S.] Leipzig 1908. ℳ 3.20.

Reye, Th., Die Geometrie der Lage. I. Abteilung. 5., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 98 Figuren. Leipzig 1909. ℳ 8.—

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 4. und 5. Auflage, bearbeitet von G. Scheffers. 1. Band. Differentialrechnung. Mit 70 Figuren. [XVI, 626 S.] Leipzig 1908. ℳ 13.—

Vapotitsch, F., Zahl der Amben und Ternen, gebildet aus den natürlichen Zahlen, wenn noch Nebenbedingungen zu erfüllen sind. Programm. [18 S.] Klagenfurt 1908. ℳ 1.—

Weigelin, G., Der Fermatsche Satz und sein Beweis. 2. Teil. Mit einer Tafel. [16 S.] Stuttgart 1908. ℳ 1.50.

Wieleitner, H., Spezielle ebene Kurven. Mit 189 Figuren im Text. [XVI, 409 S.] Leipzig 1908. ℳ 12.—

---

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe. 14. Band. 1. und 2. Heft.

Steinitz, Über diejenigen konvexen Polyeder mit n Grenzflächen, welche nicht durch $n-4$ ebene Schnitte aus einem Tetraeder abgeleitet werden können. Saalschütz, Wertbestimmung zweier Integrale. Pexider, Über Potenzreste. Ernst, Die Radiale einer ebenen Kurve. Rezensionen. Vermischte Mitteilungen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 135, Heft II.

Hessenberg, Kettentheorie und Wohlordnung. Dickson, On the congruence $x^n + y^n = z^n$ (mod. p). Biermann, Eine formale Ableitung der Laurentschen Reihe einer Funktion aus einer ihrer rational gebrochenen Näherungsfunktionen. Friedmann und Tamarkine, Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et des nombres de Bernoulli.

Mathematische Annalen. 66. Band. 2. Heft.

Jacobsthal, Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik. Landsberg, Über die Klasse der Flächen, welche ein Strahlenbündel unter festem Winkel schneiden. Fubini, Applicazioni della teoria dei gruppi continui alla geometria differenziale e alle equazioni di Lagrange. Hilb, Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Haseman, Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben der Funktionentheorie. Von der Mühll, Berichtigung.

Mathematische Annalen. 66. Band. 3. Heft.

Weyl, Singuläre Integralgleichungen. Myller-Lebedeff, Über die Anwendung der Integralgleichungen in einer parabolischen Randwertaufgabe. Study, Über die reellen Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Schnee, Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen. Hamel, Über die Grundlagen der Mechanik. Dall' Acqua, Sulla integrazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili. Frank, Berichtigung zu „Ein Satz von Routh".

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 56. Band. 3. Heft.

Runge, Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ konst. numerisch zu integrieren. Disteli, Über einige Sätze der kinematischen Geometrie, welche der Verzahnungslehre zylindrischer und konischer Räder zugrunde liegen. Francke, Der Kreisscheibenträger. Meißner, Zur Anwendung der Zufallskriterien. Pfarr, Die sogenannte Reaktion der ausströmenden Flüssigkeiten. v. Obermayer, Aus den Vorlesungen Josef Petzvals über Ballistik. Bergmann, Einige Berichtigungen zu Kuliks Quadratzahlentafeln. Vahlen, Über graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume. Schöckel, Lösung einer geometrischen Aufgabe in bezug auf kotierte Pläne. Gruber, Experimentelles zum Gaußischen Fehlergesetz. Mehmke, Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Friedrich Schilling „Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive". Kleinere Mitteilungen. Bücherschau.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39. Jahrgang. 9. Heft.

Zdelar, Bemerkungen über die Figuren der mathematischen Lehrbücher. Pfaff, Über die einem Dreieck um- und eingeschriebenen homothetischen Kegelschnitte. Lorey, Die mathematischen Grundlagen des Systems der Verhältniswahl. Meyer, Zur Lehre von den Logarithmen. Meyer, Zur Dreiteilung des Winkels. Siebert, Zur Ableitung der Pendelformel. Aufgaben-Repertorium. Literarische Berichte.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 39. Jahrgang. 10. Heft.

Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Heimbach, Der biologische, chemische und geologische Stoff in der Lehrordnung der sächsischen Oberrealschulen. Schotten, Diskussion über die Dresdener Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Schotten, Der Deutsche Ausschuß für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Literarische Berichte.

L'Enseignement Mathématique. Xe Année. No 6.

Commission internationale de l'enseignement mathématique: Rapport préliminaire sur l'organisation de la commission et le plan général de ses travaux. Godfrey, L'enseignement des mathématiques dans les écoles publiques anglaises pour les garçons. Cailler, Sur les congruences du troisième degré. Hioux, Sur le 5e livre de Géométrie. Mélanges et Correspondances. Chronique. Notes et documents. Bulletin bibliographique.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4me Série. Tome VIII. Novembre-Décembre 1908.

Deltour, Continuants: applications à la théorie des nombres. Egan, Note sur les courbes gauches. Têtu, Démonstration de quelques propriétés de l'ellipse. Favre, Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1908), solution de la question de mathématiques spéciales. Padoa, Une question de maximum. Sparre, Note au sujet de la composition de mécanique du concours d'agrégation de 1908. Correspondance.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 6. Part 6.

Harrison, The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids. Isserlis, On the ordering of the terms of polars and transvectants of binary forms. Hardy, The multiplication of conditionally convergent series. Glaisher, Relations between the divisions of the first n natural numbers. Dixon, On a form of the eliminant of two quantics.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII. Part. IX.

Muir, The theory of general determinants in the historical order of development up to 1860.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XV. Nr. 3.

Manning, The September meeting of the San Francisco Section. Wilson, Note on statistical mechanics. Moore, On certain constants analogous to Fourier's constants. Richardson, The Cologne meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Osgood, Goursat's cours d'analyse. Notices.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XVI. Fascicolo III.

Landau, Beiträge zur analytischen Zahlentheorie. Ludwig, Zur Theorie der Berührungstransformationen der Kreise in einer Ebene mit nichteuklidischer Maßbestimmung. Ciani, Sopra le curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione. Lebesgue, Sur la représentation approchée des fonctions. Basset, The constituents of a multiple point on a surface. Basset, On quintic curves with four cusps. Koenigs, Sur une correspondance ponctuelle entre deux courbes gauches. König, Zur Theorie der Mächtigkeiten. Koenigsberger, Über die Abgrenzung der Lösungen einer algebraischen Gleichung. Pick, Über den Rang der Sylvesterschen und der Bézoutschen Determinante. Capelli, Determinazione del coefficiente generale nello sviluppo in serie della radice di un'equazione algebrica. Burali-Forti e Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Cisotti, Esempio di efflusso da un recipiente a sezione non rettilinea. Severini, Aggiunta alla nota: „Studio sul primo teorema fondamentale di Lie." Veneroni, Sui connessi bilineari fra punti e rette negli iperspazi.

Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto. Volume III. No. 1; 2; 3; 4.

Haton de la Goupillière. Surfaces nautiloïdes. Bosmans, L'algèbre de Pedro Nuñez.

4. Kataloge.

A. Hermann, Paris, Rue de la Sorbonne 6. No 95. Ouvrages de mathématiques. Acquisitions et publications nouvelles. Première partie. 1909.

B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3. Mitteilungen. Nr. 2. 41. Jahrgang 1908.

H. Welter, Paris, Rue Bernard-Palissy 4. Extrait du catalogue de livres d'occasion.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Schulbücher werden nur ausnahmsweise besprochen. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Zweite Auflage. Mit 6 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 10.—

H. Andoyer, Cours d'astronomie. Seconde partie. Astronomie pratique. Paris 1909, A. Hermann & Fils. Fr. 10.—

G. Blume, Das Veranschlagen für Hochbauten. Leitfaden für den Gebrauch an technischen Fachschulen und für die Baupraxis. Mit 2 Tafeln und 17 Figuren im Text. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

E. Czuber, Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren im Text. X, 382 S. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 12.—

Die Kultur der Gegenwart. Herausgegeben von P. Hinneberg. Teil I, Abteilung IX, 1. Die romanischen Literaturen und Sprachen mit Einschluß des Keltischen. Leipzig 1909, B. G. Teubner.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I, volume 4. Fascicule 2. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

M. Girndt, Leitfaden der bautechnischen Algebra. Für den Unterricht in der allgemeinen Zahlenlehre und der Lehre von den Gleichungen an den bautechnischen Fachschulen. Dritte Auflage. Mit 29 Figuren im Text und 2 Tafeln. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 1.50.

— — Aufgabensammlung zur bautechnischen Algebra nebst kurzem Abrisse der Theorie. Für den Unterricht an bautechnischen Fachschulen verfaßt. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 1.50.

Girndt-Liebmann, Mathematische und technische Tabellen. Für den Gebrauch an bautechnischen Fachschulen und in der Baupraxis bearbeitet. Mit 58 Figuren. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 1.20.

L. Günther, Die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers, besonders seiner Gesetze und Probleme. Mit 13 Figuren, 1 Tafel und vielen Tabellen. Leipzig 1909. ℳ 2.50.

R. Haußner, Darstellende Geometrie. Zweiter Teil. Perspektive ebener Gebilde. Kegelschnitte. Mit 60 Figuren. Leipzig 1908, G. J. Göschensche Verlagshandlung. ℳ —.80.

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Dritte, durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. (Wissenschaft und Hypothese, Band VII.) Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 6.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Zehnter Band. Erstes Heft. Enthaltend: Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, im Auftrage des Vorstandes für den III. Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg im August 1904 verfaßt von A. Gutzmer, sowie Generalregister des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 1—10 von E. Wölffing. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von R. Mehmke und A. Gutzmer. Leipzig 1909, B. G. Teubner.

Koppe-Diekmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Ausgabe für Reallehranstalten. I. Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. (24. Auflage). 8. Auflage der neuen Bearbeitung von K. Knops. — II. Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. (20. Auflage). 4. Auflage der neuen Bearbeitung von K. Knops. Essen 1908, G. D. Baedeker.

A. Korn, Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont données à la surface. (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 1908).

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Mit 31 Figuren im Text. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 12.—

Fr. Mensing, Rechenbuch für Baugewerkschulen und verwandte Lehranstalten, insbesondere für Fortbildungs-, Gewerbe- und Handwerkerschulen mit fachgewerblichen Abteilungen. Teil II: Die bürgerlichen Rechnungsarten und deren Anwendung auf baugewerbliche Aufgaben (technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen). Teil III: Technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen (Kalkulationen). Mit 5 Tafeln. Leipzig 1909, B. G. Teubner. Teil II ℳ 1.25; Teil III ℳ 1.50.

F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur. Mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 7.—

H. Müller, Aufgaben zu planimetrischen Konstruktionen und graphischen Darstellungen. Ergänzungsheft zu der Aufgabensammlung von H. Müller und M. Kutnewsky und dem Lehrbuch der Mathematik von H. Müller. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ —.80.

A. Rey, Die Theorie der Physik bei den modernen Physikern. Deutsch von Dr. R. Eisler. X, 371 S. Leipzig 1909, Dr. Werner Klinkhardt. ℳ 8.50.

Th. Reye, Die Geometrie der Lage. Erste Abteilung. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 98 Figuren im Text. Leipzig 1909, Alfred Kröner. ℳ 8.—

M. Roegner, Die Steinersche Hypozykloide. Dissertation. Jena 1908.

E. Sasse, Fermats letzter Satz. Berlin, Oktober 1908.

P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen. Mit einer Figurentafel. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 2.80.

J. Schick, Isomorphopolzentrik. München 1908, G. Franzscher Verlag. ℳ 3.—

E. Schröder, Abriß der Algebra der Logik. Bearbeitet im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Dr. Eugen Müller. In drei Teilen. Erster Teil: Elementarlehre. Mit 4 Figuren im Text. Leipzig 1909, B. G. Teubner. ℳ 1.60.

J. Schumacher, Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes. (D. R. G. M. S. Nr. 344576). Für den Unterricht konstruiert. Mit 2 Tafeln. München 1909, J. Lindauersche Buchhandlung (Schöpping). ℳ 1.—

I. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. Vierte und fünfte Auflage, bearbeitet von Georg Scheffers. Erster Band. Differentialrechnung. Mit 70 Figuren im Text. Leipzig 1908, B. G. Teubner. ℳ 12.—

Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen und heilpädagogischen Anstalten Deutschlands, Luxemburgs und der Schweiz. Nach amtlichen Quellen bearbeitet. Zwei Teile. XXIX. Jahrgang. 1908/1909. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

R. Suppantschitsch, Geometrische Anschauungslehre für die erste Klasse der Realgymnasien. Mit 77 Figuren im Text und 221 Fragen und Aufgaben. Wien 1909, F. Tempsky. 80 Heller.

A. Walsleben, Der große Fermatsche Satz. Ein Versuch zur allgemeinen Lösung desselben. Osterode am Harz, Selbstverlag des Verfassers.

R. Weitzenböck, Komplexsymbolik. Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume. Leipzig 1908, G. J. Göschensche Verlagshandlung ℳ 4.80.

H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. Mit 189 Figuren im Text. Leipzig 1908, G. J. Göschensche Verlagshandlung. ℳ 12.—





